

УДК 550.385.37+550.383

## ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ УЛЬТРАНИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ ПРИ УЧЕТЕ КОНЕЧНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДАВЛЕНИЯ ГОРЯЧИХ ЧАСТИЦ

© 2022 г. Ф. З. Фейгин<sup>1</sup>, \*, Ю. Г. Хабазин<sup>1</sup>, \*\*<sup>1</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (ИФЗ РАН), Москва, Россия

\*e-mail: feygin@ifz.ru

\*\*e-mail: khabazin@ifz.ru

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.

После доработки 08.08.2021 г.

Принята к публикации 24.09.2021 г.

Представлен анализ влияния плазменного давления горячих анизотропных протонов радиационного пояса Земли на развитие циклотронной неустойчивости УНЧ-волн. Показано, что при увеличении давления плазмы радиационного пояса Земли инкремент нарастания существенно уменьшается и при достижении значений декремента затухания радиационного пояса Земли процесс генерации УНЧ-волн может прекратиться. Для генерации УНЧ-волн необходимы малые значения давления плазмы радиационного пояса Земли, которые характерны для низкой магнитной активности. Это позволяет объяснить наблюдаемый факт, что для появления  $Pc1$  пульсаций на земной поверхности наиболее благоприятна именно низкая магнитная активность. В этом заключаются особенности генерации УНЧ-волн в магнитосфере Земли при учете влияния конечных значений плазменного давления горячих частиц радиационного пояса Земли, которые не рассматривались в предыдущих работах по аналогичной тематике.

DOI: 10.31857/S0016794022020067

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование устойчивости радиационных поясов Земли является важной проблемой физики магнитосферной плазмы. В работах [Cornwall, 1966; Kennel and Petschek, 1966; Тверской, 1968; Фейгин и Якименко, 1969; Трахтенгерц и Райкрофт, 2011; Гульельми и Потапов, 2021] устойчивость протонов радиационного пояса Земли связывается с ультранизкочастотными электромагнитными волнами в частотном диапазоне пульсаций  $Pc1$  (0.2–5.0 Гц), известные как “жемчужины”. Протонный радиационный пояс в спокойном состоянии характерен тем, что давление энергичных анизотропных протонов (~100 КэВ) много меньше магнитного давления (т.е.  $\beta = 8\pi n_h T / B_0^2 \ll 1$ ) и концентрация горячей плазмы мала по сравнению с плотностью холодной плазмы ( $n_h \ll n_0$ ). Эти условия были положены в основу теоретического исследования механизма генерации  $Pc1$  пульсаций в результате циклотронной неустойчивости протонов радиационного пояса Земли. Однако в работе [Berko et al., 1975] было обнаружено, что в области 4–6 радиусов Земли, где генерируются и откуда распространяются “жемчужины”, давление плазмы может быть повышенным и даже равным давлению геомагнит-

ного поля. Мы проиллюстрировали это утверждение, построив зависимость радиационного пояса Земли ( $\beta$ ) от  $L$  ( $L$  – параметр Мак-Илвейна) для протонов с энергией ~100 КэВ во время магнитной бури 17–20 июня 1972 года по данным [Berko et al., 1975] (рис. 1). Для этой цели были использованы данные спутника Explorer 45 (S3-A) [Longanecker and Hoffman, 1973; Smith and Hofmann, 1973; Konradi et al., 1973]. Как видно из рис. 1, действительно, в магнитосфере Земли возможны периоды, когда давление горячей протонной плазмы близко к давлению магнитного поля. Повидимому, такая геофизическая ситуация характерна для периодов повышенной магнитной активности. Впоследствии, большие значения  $\beta$  в магнитосфере наблюдались на десятках космических аппаратов [например, Stepanov et al., 2004; Antonova et al., 2014]. В работе [Antonova et al., 2014] проанализированы характеристики плазмы по данным спутника THEMIS; и было установлено, что имеются области, где параметр  $\beta$  может достигать единицы в экваториальной плоскости магнитосферы Земли. В работе [Stepanova et al., 2004] также показано, что в магнитосфере Земли возможны большие значения  $\beta$  вплоть до единицы.

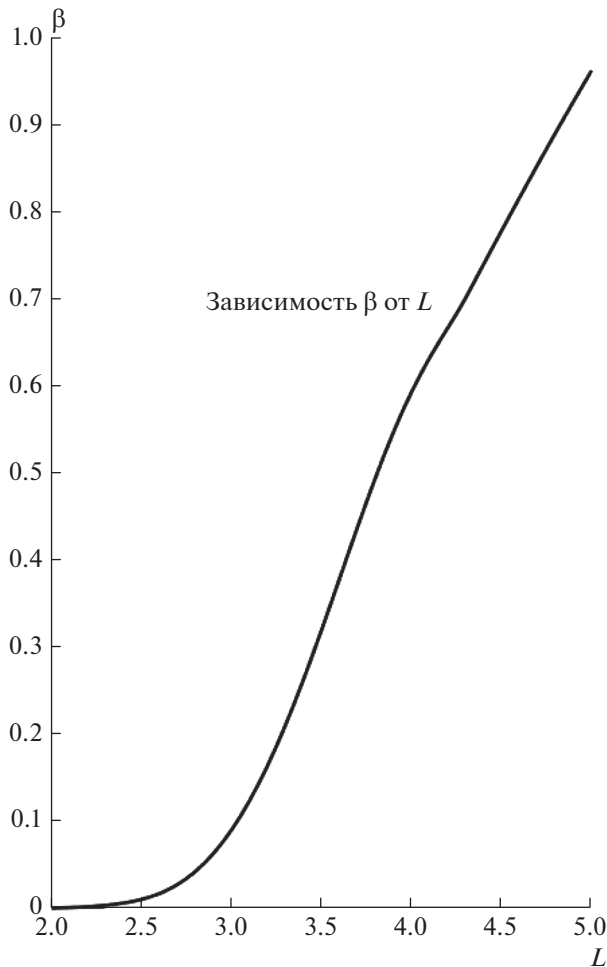


Рис. 1. Зависимость параметра  $\beta$  от параметра Мак-Илвейна  $L$ .

В магнитосфере Земли во время магнитных бурь в области протонного радиационного пояса возможно резкое повышение концентрации горячих протонов с энергией  $E \sim 100$  КэВ [Feugin et al., 1970; Ковтюх и др., 1975]. Так, например, во время магнитных бурь 18 апреля и 15 июня 1965 года потоки протонов с энергией  $E < 200$  КэВ в области  $L \geq 4$  увеличивались до 4-х раз, в то время как в других энергетических диапазонах потоки протонов уменьшались в 10 раз по сравнению с добуревыми значениями [Sogaas and Davis, 1968; Williams, 1970]. Аналогичные возрастания потоков протонов в радиационном поясе во время магнитных бурь наблюдалось и на спутнике Молния-1. Наличие анизотропии и повышенной интенсивности потоков этих частиц приводит к развитию циклотронной неустойчивости, ответственной за генерацию  $Pc1$  пульсаций. В результате резонансного взаимодействия между анизотропными протонами и  $Pc1$  пульсациями происходит рассеяние этих частиц в конус потерь и сбросу “излишка” протонов в ионосферу, т.е. к восстановлению

устойчивого состояния радиационного пояса протонов. Для проверки данной гипотезы была проанализирована связь частоты появления  $Pc1$  пульсаций на земной поверхности с повышенной интенсивностью протонов по данным спутников Эксплорер-26 и Молния-1 [Feugin et al., 1970; Ковтюх и др., 1975].  $Pc1$  пульсации на земной поверхности начинают генерироваться в тот момент, когда потоки протонов превышают критический уровень и анизотропия их становится достаточно высокой. Проявлением резонансного взаимодействия  $Pc1$  пульсаций с протонами является высыпание этих частиц в ионосферу [Yahnin et al., 2007; Yahnina et al., 2000, 2008; Попова и др., 2018; Яхнин и др., 2018]. Взаимодействие этих пульсаций с протонами радиационного пояса приводит к высыпанию энергичных протонов в ионосферу, которое неоднократно регистрировалось при сопоставлении наземных и спутниковых наблюдений, например, [Yahnina et al., 2000; Попова и др., 2018; Яхнин и др. 2018]. Картина высыпаний энергичных заряженных частиц напрямую связана с ионосферной проекцией геомагнитных силовых трубок, подходящих для работы протонного циклотронного мазера [Трахтенгерц и Райкрофт, 2011].

Развитие циклотронной неустойчивости характеризуется инкрементом  $\gamma$  – обратным временем нарастания амплитуды в  $e$  раз. Как известно [Тверской, 1968; Demekhov, 2007], нарастание амплитуды возможно только в случае, если инкремент нарастания превышает декремент затухания  $\delta$ . Суммарный коэффициент усиления определяется разностью инкремента и эффективного коэффициента затухания, связанного с отражением от сопряженных ионосфер [Тверской, 1968; Гульельми, 1979; Demekhov, 2007].

Инкремент  $\gamma$  пропорционален отношению концентраций горячих анизотропных частиц и холодной плазмы ( $n_h/n_c$ ). Обычно считается, что в магнитосфере это отношение  $N = n_h/n_c \ll 1$  и  $\beta \ll 1$ . В этом приближении был вычислен инкремент во многих предыдущих работах [см, например, Тверской, 1968; Фейгин и Якименко, 1969; Feugin and Yakimenko, 1971; Gendrin et al., 1971; Гульельми, 1979; Guglielmi and Pokhotelov, 1996; Гульельми и Потапов, 2021].

Поскольку к настоящему времени уже хорошо известно, что  $\beta$  в магнитосфере может быть велико, то необходимо распространить существующую теорию генерации ультранизкочастотных электромагнитных волн в частотном диапазоне пульсаций  $Pc1$  (“жемчужины”) на случай большого давления (больших  $\beta$ ) анизотропных протонов. В этом заключается основная цель нашей работы.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При би-Максвелловском распределении с различными температурами вдоль и поперек магнитного поля  $T_{\parallel}$  и  $T_{\perp}$  квадрат показателя преломления  $N^2 = k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2$  поперечных волн с круговой поляризацией [Шафранов, 1963] имеет вид ( $v_{\parallel} = \sqrt{2T_{\parallel}/m}$ ):

$$N^2 = \varepsilon \pm g = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \left\{ \frac{1}{\omega \mp \omega_B} Z \left( \frac{\omega \mp \omega_B}{k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \pm \frac{\omega_B}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \right\} + \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \quad (1)$$

где суммирование проводится по сортам частиц. В этом уравнении верхний знак соответствует электромагнитным ионно-циклотронным (ультранизкочастотным – УНЧ) волнам, которые нас далее интересуют. Функция  $Z(\alpha)$  выражается через плазменную дисперсионную функцию  $S(\alpha) = e^{-\alpha^2} \int_0^{\alpha} e^{t^2} dt$  [Стикс, 1965]:  $Z(\alpha) = 2\alpha S(\alpha) - i\sqrt{\pi}\alpha e^{-\alpha^2}$ . При  $|\alpha| \gg 1$  и  $|\operatorname{Re} \alpha| > |\operatorname{Im} \alpha|$  плазменная дисперсионная функция имеет асимптотическое разложение  $S(\alpha) \approx \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^3} + \dots$ ; обычно в разложении  $S(\alpha)$  ограничиваются двумя первыми членами, и тогда  $2\alpha S(\alpha) \approx 1 + \frac{1}{2\alpha^2}$ .

Мы рассматриваем плазму, состоящую из холодных электронов, ионов ( $n_{0e} = n_{0i} = n_0$ ) и горячих анизотропных протонов ( $n_h$ ). Обычно при исследовании УНЧ-волн в диапазоне пульсаций  $Pc1$  предполагают [Cornwall, 1966; Kennel and Petschek, 1966; Тверской, 1968; Фейгин и Якименко, 1969; Трахтенгерц и Райкрофт, 2011; Гульельми и Потапов, 2021], что холодная компонента плазмы ( $n_0$ ) определяет распространение волн, а малая горячая добавка ( $n_h$ ) обуславливает их генерацию или затухание.

Рассмотрим влияние горячей компоненты  $n_h$  на генерацию и развитие УНЧ-волн в магнитосфере Земли. Дисперсионное уравнение для УНЧ-волн, распространяющихся вдоль магнитного поля с учетом горячей компоненты  $n_h$  после суммирования по всем частицам, следующее из формулы (1) принимает вид:

$$\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega(\Omega - \omega)} + \frac{\omega_{0h}^2}{\omega} \times \left[ \frac{A}{\omega} - 2\alpha S(\alpha) \left( \frac{A}{\omega} - \frac{1}{\Omega - \omega} \right) \right] - i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{0h}^2}{\omega} \times \alpha e^{-\alpha^2} \left( \frac{A}{\omega} - \frac{1}{\Omega - \omega} \right). \quad (2)$$

Здесь  $\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$ ,  $\omega_{0h}^2 = 4\pi n_h e^2 / m$  – ионные плазменные частоты фоновой плазмы и горячих частиц.  $\Omega = eB_0 / mc$  – ионная гирочастота.

$$\alpha = (\Omega - \omega) / k_{\parallel} (2T_{\parallel} / m)^{1/2},$$

$$A = (T_{\perp} / T_{\parallel} - 1) - \text{анизотропия.}$$

Для действительной части (или, что то же самое, в нулевом порядке по малой мнимой части уравнения) из (2) получается:

$$\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega(\Omega - \omega)} + \frac{\omega_{0h}^2}{\omega} \times \left[ \frac{A}{\omega} - 2\alpha S(\alpha) \left( \frac{A}{\omega} - \frac{1}{\Omega - \omega} \right) \right], \quad (3)$$

что представляет собой дисперсионное уравнение для ионно-циклотронных волн с учетом горячей компоненты  $n_h$ . Когда добавка от горячей компоненты мала, дисперсионное уравнение (3) сводится к известному уравнению  $\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} =$

$1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega(\Omega - \omega)}$  для холодной плазмы [например, Kennel and Petschek, 1966]; единицей в (2) можно пренебречь, так как обычно плазменная частота много больше циклотронной. Формула  $\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega(\Omega - \omega)}$  далее используется для выражения  $k_{\parallel}$  через  $\omega$ .

Упростим вклад горячей компоненты в действительную часть уравнения (3), подставляя вместо величины  $S(\alpha)$  его асимптотическое разложение:

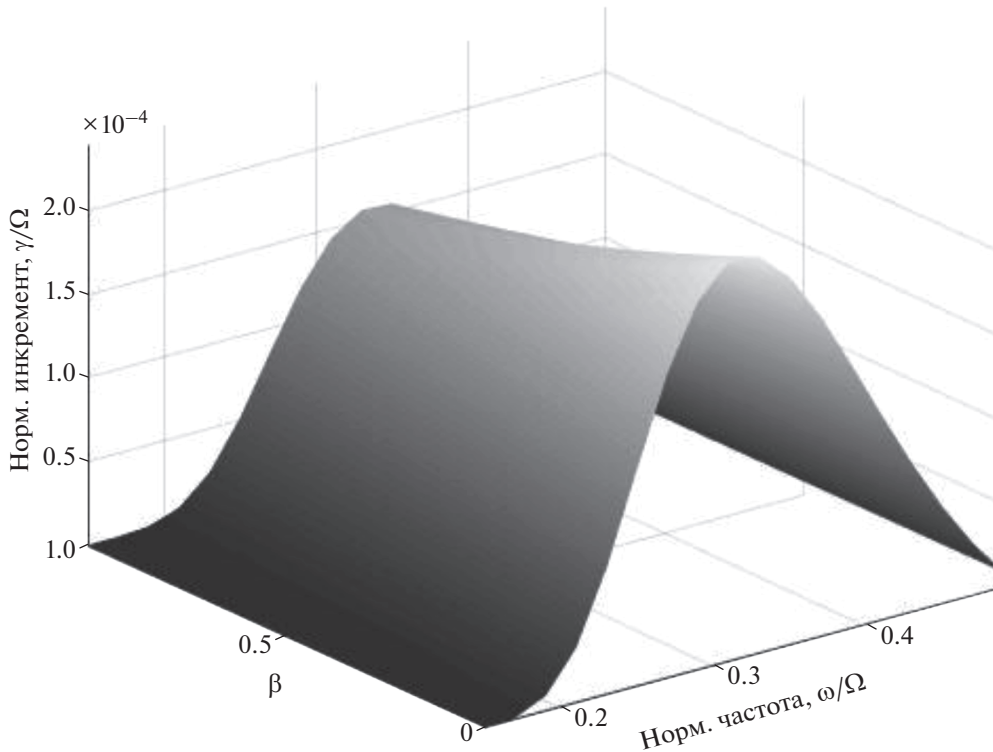
$$\frac{\omega_{0h}^2}{\omega} \left[ \frac{A}{\omega} - 2\alpha S(\alpha) \left( \frac{A}{\omega} - \frac{1}{\Omega - \omega} \right) \right] \approx -\frac{\omega_{0h}^2}{\omega^2} \frac{A}{2\alpha^2} + \frac{\omega_{0h}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{1}{2\alpha^2} \right) \frac{\omega}{\Omega - \omega}.$$

Введем далее  $\omega = \omega_r + i\gamma$ . Тогда получим (индекс “r” в дальнейшем будет опускаться)

$$\alpha = \alpha_r \left( 1 - \frac{i\gamma}{\Omega - \omega_r} \right).$$

Подставим комплексные  $\alpha$  и  $\omega$  в (2), разложим  $S(\alpha)$  как

$S(X + iY) = S(X) + iY(dS/dX)$  где  $Y \ll X$ , и тогда с учетом соотношения  $dS/dX = 1 - 2XS(X)$  из мнимой части уравнения (2) для нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  получится выражение ( $x = \omega/\Omega$  – частота волны, нормированная на гирочастоту ионов):



**Рис. 2.** Зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и параметра  $\beta$  при заданных значениях  $A = 1$ ,  $n_h/n_0 = 10^{-3}$ .

$$\frac{\gamma}{\Omega} = \pi^{1/2} \frac{n_h}{n_0} \times \frac{\alpha e^{-\alpha^2} [A - x/(1-x)] (1-x)^2}{x(2-x) + (n_h/n_0)[1 + (1-x)(A+1)/2\alpha^2]} \quad (4)$$

В этом выражении инкремент  $\gamma/\Omega$  фактически зависит от многих переменных; все они “спрятаны” в  $\alpha$ . Далее приведена (одна и та же) функция  $\alpha$ , выраженная через разные переменные: каждое выражение удобно для построения своего рисунка:

$$\alpha^2 = \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3 (A+2)}{\beta} + \frac{1}{2} (A-x) \right], \quad (5a)$$

$$\alpha^2 = \frac{(1-x)^3}{x^2} \frac{c_A^2}{v_{\parallel}^2} + \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{2x^2} (A-x). \quad (5b)$$

(Вывод формул (5) показан в *Приложении*).

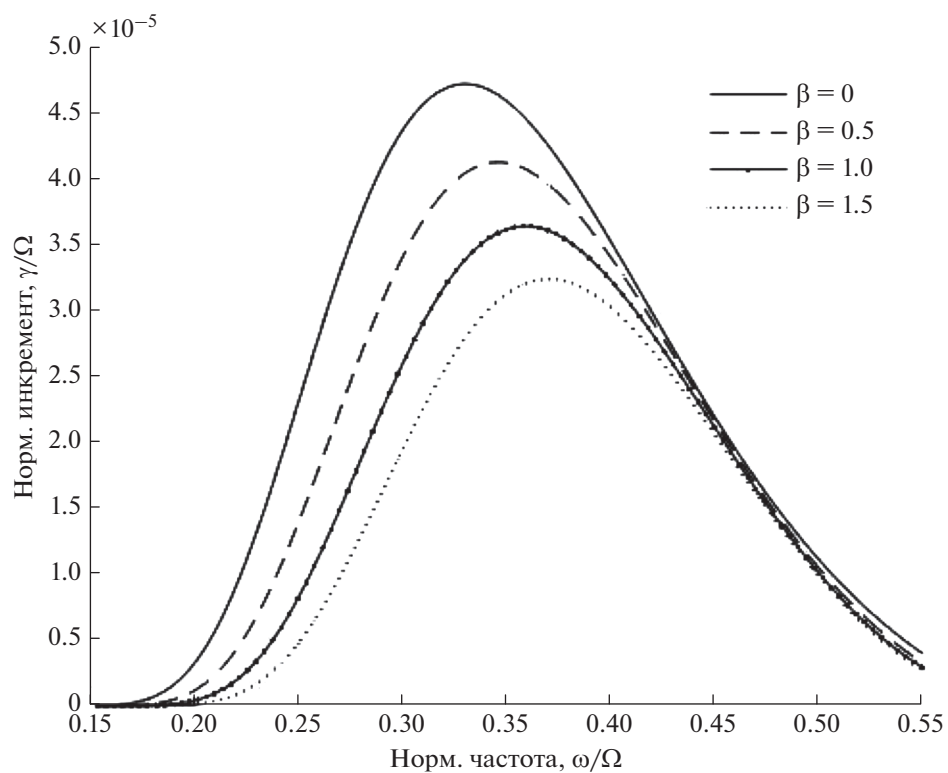
В приближении  $\beta \ll 1$  (и  $\alpha \gg 1$ ), выражение (4) сводится к известному выражению для инкремента, полученному во многих работах [Фейгин, Якименко, 1969; Feygin, Yakimenko, 1971; Gendrin et al., 1971; Гульельми, 1979].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

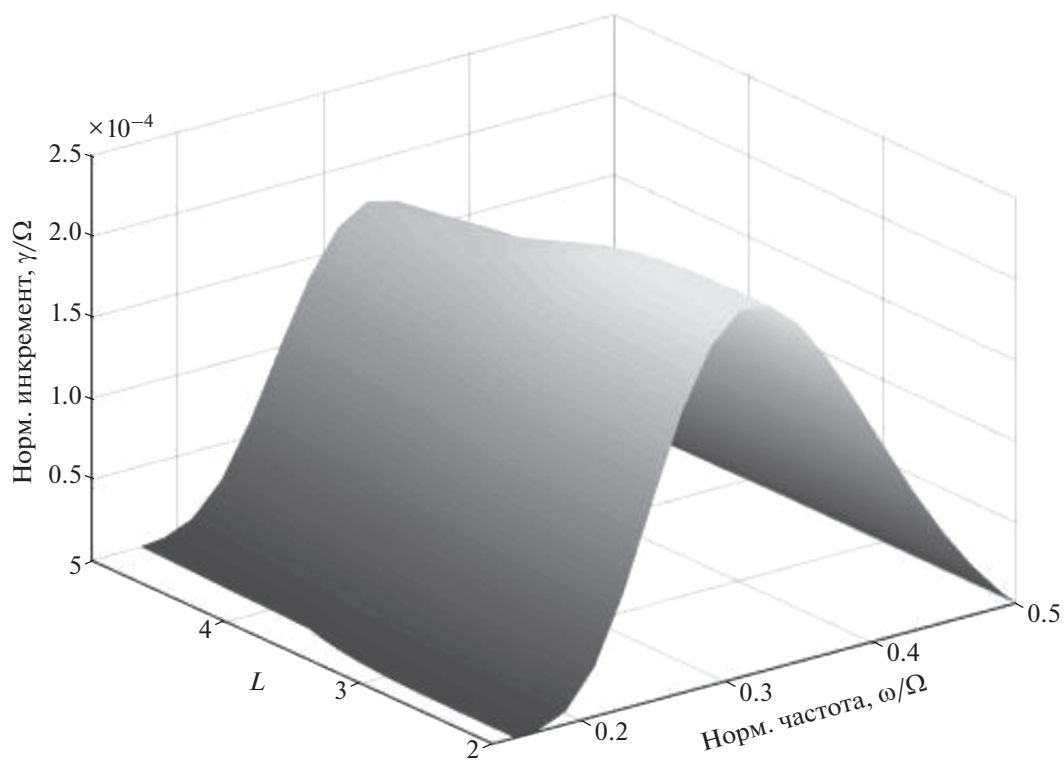
На основе полученных формул мы исследовали зависимость нормированного инкремента (4) от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  для различных параметров магнитосферной плазмы.

Рисунок 1 показывает зависимость  $\beta$  от  $L$  ( $L$  – параметр Мак-Илвейна) для протонов с энергией  $\sim 100$  Кэв во время магнитной бури 17–20 июня 1972 года по данным [Berko et al., 1975]. Рисунок был построен по данным спутника Explorer 45 (S3-A) [Longanecker and Hoffman, 1973; Smith and Hofinan, 1973; Konradi et al., 1973]. Как видно из рис. 1, параметр  $\beta$  растет при увеличении  $L$ ; относительно большие значения  $\beta$  ( $\sim 1$ ) достигаются в районе максимальных  $L$  из-за быстрого убывания геомагнитного поля. Такое изменение  $\beta$  с удалением от поверхности Земли скажется и на зависимости нормированного инкремента от параметров магнитосферной плазмы.

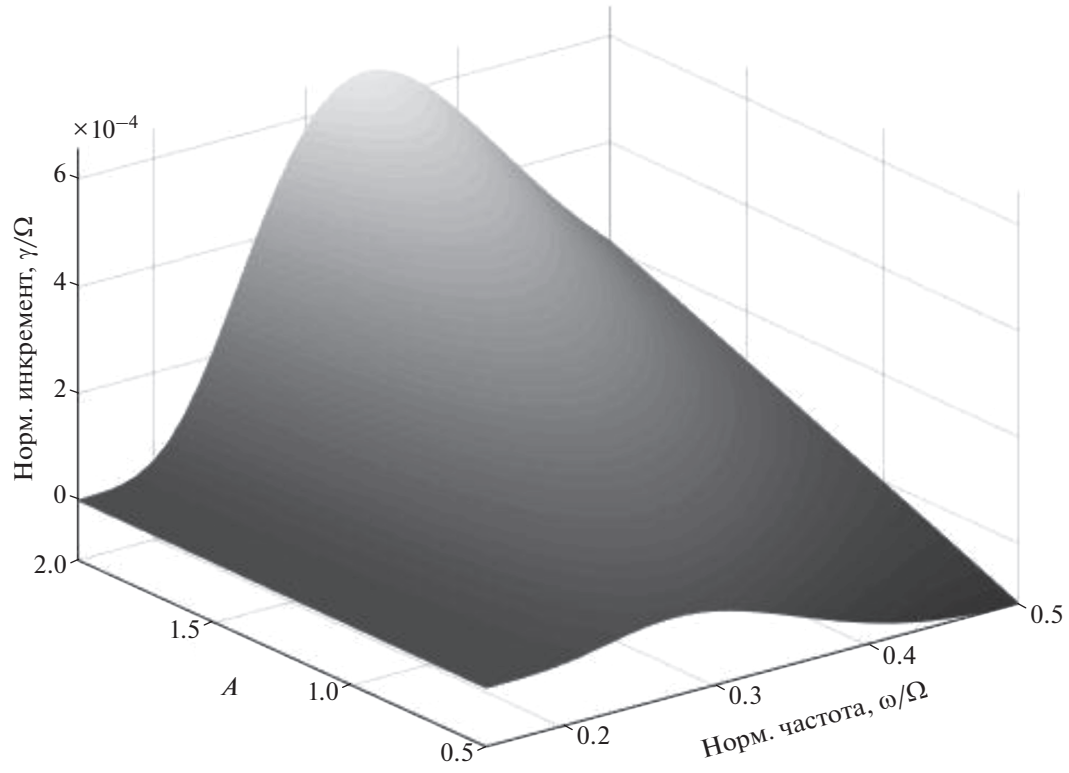
Рисунок 2 демонстрирует зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  для разных значений  $\beta$  при выбранных значениях  $n_h/n_0 = 10^{-3}$  и  $A = 1$ . Рисунок показывает, что при увеличении  $\beta$  инкремент уменьшается. Как известно [Тверской 1968; Demekhov, 2007],



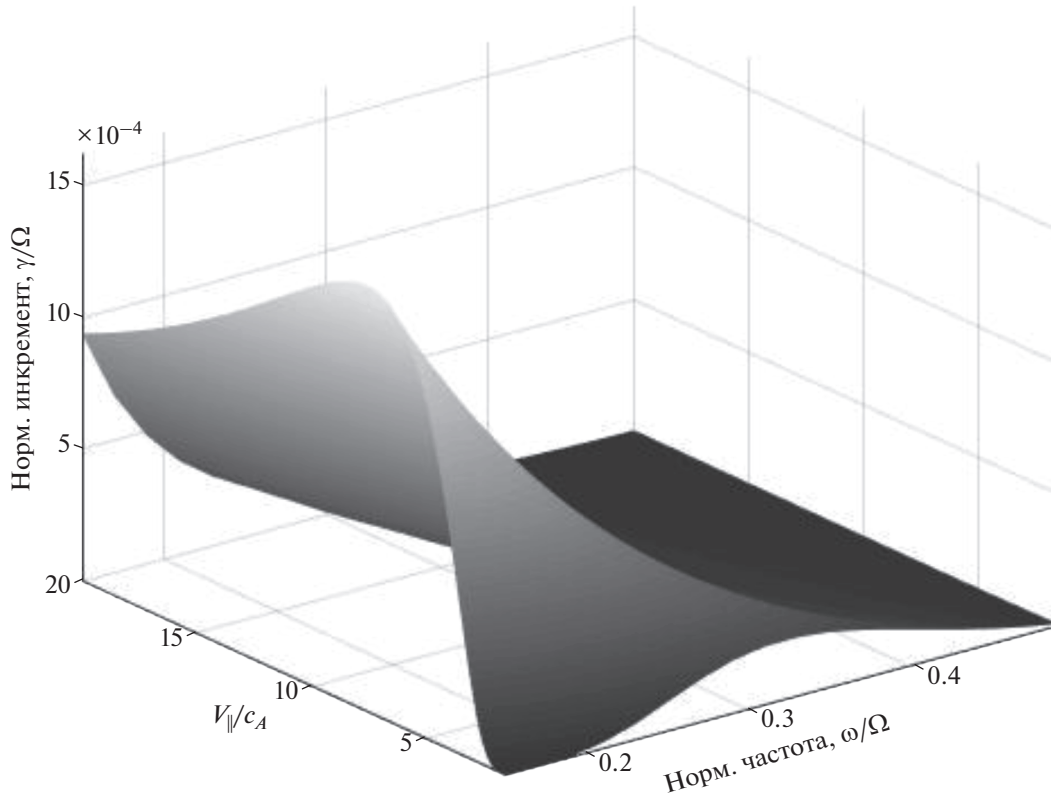
**Рис. 3.** Зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  для  $\beta = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$  при заданных значениях  $A = 1, n_h/n_0 = 10^{-3}$ .



**Рис. 4.** Зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и параметра  $L$  при заданных значениях  $A = 1, n_h/n_0 = 10^{-3}$ .



**Рис. 5.** Зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и анизотропии  $A$  при заданных значениях  $\beta = 0.1$ ,  $n_h/n_0 = 10^{-3}$ .



**Рис. 6.** Зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и параметра  $v_{||}/c_A$  при заданных значениях  $\beta = 0.1$ ,  $n_h/n_0 = 10^{-3}$ .

нарастание амплитуды возможно только в том случае, если инкремент нарастания превышает декремент затухания  $\delta$ . Таким образом, при больших  $\beta$  инкремент  $\gamma$  может снизиться до значений равных  $\delta$ , что приводит к прекращению генерации УНЧ-волн.

Для обоснования существенного различия между выведенными выражениями и известными ранее, графики инкремента по старым (при  $\beta = 0$ ) и новым формулам при учете влияния конечных значений плазменного давления горячих частиц (при  $\beta = 0.5, 1.0, 1.5$ ) приведены на одной плоскости (рис. 3). Из этих графиков отчетливо видно, что при учете плазменного давления ( $\beta = 0.5, 1.0, 1.5$ ) инкремент уменьшается и при достижении значений вблизи декремента затухания, процесс генерации УНЧ-волн может прекратиться.

На следующем рисунке (рис. 4) показано поведение нормированного инкремента УНЧ-волн в зависимости от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  на разных расстояниях от поверхности Земли. Из рисунка видно, что максимальное значение инкремента достигается при малых  $L$ , соответствующих малым значениям  $\beta$  [Berko et al., 1975] (ср. с рис. 1).

Так как мы выяснили, что максимальный инкремент соответствует малым значениям  $\beta$ , то зафиксировав какое-либо значение  $\beta$ , например,  $\beta = 0.1$  мы можем исследовать поведение инкремента УНЧ-волн от анизотропии и параметра  $v_{\parallel}/c_A$ . (Здесь  $c_A$  — альвеновская скорость, см. Приложение).

Рисунок 5 показывает зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и анизотропии  $A$  при заданных значениях  $\beta = 0.1$ , и  $n_h/n_0 = 10^{-3}$ .

На рисунке 6 приведена зависимость нормированного инкремента  $\gamma/\Omega$  от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  при  $\beta = 0.1$ ,  $n_h/n_0 = 10^{-3}$  и меняющемся  $v_{\parallel}/c_A$ .

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Выведено аналитическое выражение для исследования влияния конечного плазменного давления  $\beta$  на развитие циклотронной неустойчивости УНЧ-волн в магнитосфере Земли, которое существенно отличается от аналогичных выражений для инкремента, не учитывающих конечного плазменного давления  $\beta$  [см., например, Фейгин, Якименко, 1969; Feygin, Yakimenko, 1971; Gendrin et al., 1971; Гульельми, 1979].

2. Анализ полученных результатов показал, что максимум инкремента уменьшается при ро-

сте  $\beta$  и увеличивается при росте  $v_{\parallel}/c_A$  и  $A$ . Таким образом, при больших  $\beta$  инкремент  $\gamma$  может снизиться до значений равных декременту затухания  $\delta$ , что может привести к прекращению генерации УНЧ-волн [Тверской, 1968; Demekhov, 2007]. В этом и заключаются особенности генерации УНЧ-волн в магнитосфере Земли при учете влияния конечных значений плазменного давления горячих частиц, которые не рассматривались в предыдущих работах по аналогичной тематике.

3. Полученные результаты позволили выяснить, как влияет учет конечных значений  $\beta$  на развитие циклотронной неустойчивости УНЧ-волн в магнитосфере Земли. В частности, так как увеличение  $\beta$  происходит во время магнитных бурь [Berko et al., 1975], то мы можем предположить, что низкая магнитная активность соответствует малым значениям параметра  $\beta$ . Именно низкая магнитная активность, а значит и малые значения параметра  $\beta$ , наиболее характерны для генерации Pc1 пульсаций (рис. 2, рис. 3). Этот теоретический вывод подтверждается и экспериментальными наблюдениями Pc1 пульсаций в зависимости от уровня магнитной активности, появление которых характерно для низкой магнитной активности [Wentworth, 1964; Plyasova—Bakounina and Matveeva, 1968; Feygin et al. 1970; Erlandson and Ukhorskiy, 2001].

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь для справки приведены формулы, которые хотя и просты, но из-за их количества и взаимозаменяемости могут приводить к недоразумениям.

$$\begin{aligned} c_A^2 &= B_0^2/4\pi n_0 m, \quad v^2 = 2T/m, \quad v_{\parallel}^2 = 2T_{\parallel}/m, \\ v_{\perp}^2 &= 2T_{\perp}/m, \\ \beta &= (n_h/n_0)v^2/c_A^2, \quad \beta_{\perp} = (n_h/n_0)v_{\perp}^2/c_A^2, \\ \beta_{\parallel} &= (n_h/n_0)v_{\parallel}^2/c_A^2, \\ c_A^2/v^2 &= (n_h/n_0)/\beta, \quad c_A^2/v_{\perp}^2 = (n_h/n_0)/\beta_{\perp}, \\ c_A^2/v_{\parallel}^2 &= (n_h/n_0)/\beta_{\parallel}, \\ F &= 1 + \frac{1}{2}\beta_{\perp} \frac{(1 - T_{\parallel}/T_{\perp} - x)}{(1 - x)^3} \equiv 1 + \frac{1}{2}\beta_{\perp} \times \\ &\times \frac{(1 - \beta_{\parallel}/\beta_{\perp} - x)}{(1 - x)^3}. \end{aligned}$$

Используя дисперсионное уравнение для ионно-циклотронных волн с учетом горячей компоненты  $n_h$  (3) и подставляя  $k_{\parallel}$  в  $\alpha^2$ , получаем



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

$$\alpha^2 = \frac{(1-x)^3 c_A^2}{x^2 v_{\parallel}^2} F = \frac{(1-x)^3 n_h F}{x^2 n_0 \beta_{\parallel}},$$

$$\alpha^2 = \frac{n_h (1-x)^3}{n_0 x^2 \beta_{\parallel}^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta_{\perp} \frac{(1-\beta_{\parallel}/\beta_{\perp} - x)}{(1-x)^3} \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \left[ \frac{(1-x)^3}{x^2 \beta_{\parallel}^2} + \frac{1}{2x^2} \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} \left( -\frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}} + 1 - x \right) \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \left[ \frac{(1-x)^3}{x^2 \beta_{\parallel}^2} + \frac{1}{2x^2} \left( \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} - 1 - x \right) \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2 \beta_{\parallel}^2} \left[ (1-x)^3 + \frac{1}{2} (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel} - \beta_{\parallel} x) \right], \quad (6)$$

$$\alpha^2 = \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3}{\beta_{\parallel}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} - 1 - x \right) \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3 B_0^2}{8\pi n_h T_{\parallel}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} - 1 - x \right) \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3 B_0^2}{4\pi n_0 \frac{n_h}{n_0} m v_{\parallel}^2} + \frac{1}{2} (A - x) \right] =$$

$$= \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3 c_A^2}{\frac{n_h}{n_0} v_{\parallel}^2} + \frac{1}{2} (A - x) \right],$$

$$\beta = \frac{n_h v^2}{n_0 c_A^2} = \frac{n_h v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{n_0 c_A^2} = \frac{n_h v_{\parallel}^2}{n_0 c_A^2} \left( \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + 1 \right) =$$

$$= \frac{n_h v_{\parallel}^2}{n_0 c_A^2} (A + 2). \quad (7)$$

Откуда  $\frac{c_A^2}{v_{\parallel}^2} = \frac{n_h (A + 2)}{n_0 \beta}$ .

И, наконец, получим выражения  $\alpha^2$  через  $\beta$  и через  $c_A^2/v_{\parallel}^2$ :

$$\alpha^2 = \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{(1-x)^3 (A + 2)}{\beta} + \frac{1}{2} (A - x) \right], \quad (8)$$

$$\alpha^2 = \frac{(1-x)^3 c_A^2}{x^2 v_{\parallel}^2} + \frac{n_h}{n_0} \frac{1}{2x^2} (A - x). \quad (9)$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН.

– Гильельми А.В. МГД волны в околоземной плазме. М.: Наука, 139 с. 1979.

– Гильельми А.В., Потанов А.С. Частотно-модулированные ультранизкочастотные волны в околоземном космическом пространстве // УФН. Т. 191. № 5. 475–491. 2021.

– Плясова–Бакунина Т.А., Матвеева Э.Т. Связь пульсаций типа Pc1 с магнитными бурями // Геомагнетизм и Аэронавтика. Т. 8. С. 153–155. 1968.

– Попова Т.А., Яхнин А.Г., Демехов А.Г., Черняева С.А. Генерация ЭМИЦ волн в магнитосфере и высыпания энергичных протонов: сопоставление данных высокоорбитальных спутников THEMIS и низкоорбитальных спутников ROES // Геомагнетизм и аэронавтика. Т. 58. № 4. С. 484–497. 2018.

– Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат., 344 с. 1965.

– Тверской Б.А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 223 с. 1968.

– Трахтенгерц В.Ю., Райкрофт М.Дж. Свистовые и альфвеновские мазеры в космосе. // М.: ФИЗМАТЛИТ, С. 278–295.2011

– Фейгин Ф.З., Якименко В.Л. Механизм генерации и развитие “жемчужин” при циклотронной неустойчивости внешней протонной зоны // Геомагнетизм и аэронавтика. Т. 9. С. 700–705. 1969.

– Шафранов В.Д., Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М.: Госатомиздат. 1963. С. 3–140.

– Яхнин А.Г., Яхнина Т.А., Семенова Н.В., Попова Т.А., Демехов А.Г. Протонные сияния к экватору от овала как проявление ионно-циклотронной неустойчивости в магнитосфере земли (краткий обзор) // Геомагнетизм и аэронавтика. Т. 58. № 5. С. 599–607. 2018. <https://doi.org/10.1134/S0016794018050176>

– Antonova E.E., Kirpichev I.P., Stepanova M.V. Plasma pressure distribution in the surrounding the Earth plasma ring and its role in the magnetospheric dynamics // J. Atmos. Sol. Terr. Phys. V. 115–116. P. 32–40. 2014.

– Berko F.M., Cahill I.J., Jr Fritz T.A. Protons as the prime contributors to storm time ring current // J. Geophys. Res. V. 80. P. 3539–3552. 1975.

– Chappell C.R., Harris R.R., Sharp G.W. The morphology of the bulge region of the plasmasphere // J. Geophys. Res. V. 75. P. 3848–3861. 1970.

– Cornwall J.M. Micropulsations and the outer radiation zone // J. Geophys. Res. V. 71. P. 2185–2199. 1966.

– Cornwall J.M., Schulz M. Electromagnetic Ion-Cyclotron Instabilities in Multicomponent Magnetospheric Plasmas // J. Geophys. Res. V. 76. P. 7791–7796. 1971.

– Davis L.R., Williamson J.M. Low-energy trapped protons // Space Rev. V. 3. P. 365–375. 1963.

– Demekhov A.G. Recent progress in understanding Pc1 pearl formation // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. V. 69. P. 1609–1622. 2007.

– Erlandson R.E., Ukhorskiy A.J. Observations of electromagnetic ion cyclotron waves during geomagnetic storms: Wave occurrence and pitch angle scattering. // J. Geophys. Res. V. 106. № A3. P. 3883–3895. 2001.



- Feygin F.Z., Gokhberg M.B., Matveeva E.T. Comparison of satellite data with the occurrence of pulsations // *Ann. Geophys.* V. 26. P. 903–906. 1970.
- Feygin F.Z., Yakimenko V.L. Appearance and development of geomagnetic Pc1 type micropulsations (“pearls”) due to cyclotron instability of proton belt // *Ann. Geophys.* V. 27. P. 49–55. 1971.
- Gendrin R., Lacourly S., Roux A., Solomon J., Feygin F.Z., Gokhberg M.B., Troitskaya V.A., Yakimenko V.L. Wave packet propagation in an amplifying medium and its application to the dispersion characteristics and to the generation mechanism of Pc1 events // *Planet. Space Sci.* V. 19. P. 165–194. 1971.
- Guglielmi A.V., Polhotelov O.A. *Geoelectromagnetic Waves*. LOP Publishing. Ltd., Bristol, 397 p. 1996.
- Kangas J., Guglielmi A., Pokhotelov O. Morphology and physics of the short period magnetic pulsations // *Space Sci. Rev.* V. 83. P. 435–512. 1998.
- Kennel C.F., Petschek H.E. Limit on stably trapped particle fluxes // *J. Geophys. Res.* 1966. V. 71. P. 1–28.
- Stepanova M.V., Antonova E.E., Bosqued J.M., Kovrazhkin R. Radial plasma pressure gradients in the high latitude magnetosphere as sources of instabilities leading to the substorm onset // *Adv. Space Res.* V. 33. P. 761–768. 2004.
- Wentworth, R.C., Enhancement of hydromagnetic emissions after geomagnetic storms. *J. Geophys. Res.* V. 69. P. 2291–2298. 1964.
- Yahnina T.A., Yahnin A.G., Kangas J., Manninen J., Proton precipitation related to Pc1 pulsations // *Geophys. Res. Lett.* V. 27. № 21. P. 3575–3578. 2000.
- Yahnin A.G., Yahnina T.A., Frey H.U. Subauroral proton spots visualize the Pc1 source // *J. Geophys. Res.* V. 112. A10223. 2007.  
<https://doi.org/10.1029/2007JA012501>
- Yahnina T.A., Frey H.U., Bussinger T., Yahnin A.G. Evidence for subauroral proton flashes on the dayside as the result of the ion cyclotron interaction // *J. Geophys. Res.* V. 113. A07209. 2008.  
<https://doi.org/10.1029/2008JA013099>