

УДК 523.62+523.9

ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ КАК ПРИЧИНА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ ВЕКОВОГО ЦИКЛА ГЛЕЙСБЕРГА В СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

© 2022 г. Н. Г. Птицына¹, *, И. М. Демина¹, **

¹Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (СПбФ ИЗМИРАН), г. Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: nataliaptitsyna@ya.ru

**e-mail: dim@izmiran.spb.ru

Поступила в редакцию 15.07.2021 г.

После доработки 25.08.2021 г.

Принята к публикации 24.09.2021 г.

Среди цикличностей солнечной активности с периодом более 22 лет вековой цикл, или цикл Глейсберга, привлекает наибольшее внимание исследователей. В данной работе методами Фурье и вейвлет-анализа проведено изучение цикличности солнечной активности, выраженной числом солнечных пятен SN , реконструированных из разных источников (длина рядов до ~ 12000 лет), в диапазоне периодов цикла Глейсберга. Найдено, что цикл Глейсберга состоит из трех выделенных ветвей со средними периодами 60, 88 и 140 лет. Характер амплитудной вариации всех трех ветвей идентичен, что указывает на то, что они являются частью одного квазипериодического процесса. Анализ показал, что 88-летний цикл является основным. Его источником является солнечное динамо. А 60- и 140-летние циклы являются результатом частотной модуляции основного цикла процессом с периодом 224 года (цикл Зюсса). Построена модель, которая подтверждает и объясняет этот результат. Цикл Зюсса, являющийся частотным модулятором цикла Глейсберга, скорее всего, имеет внесолнечное происхождение. Наши результаты не поддерживают гипотезу о хаотическом Солнце, свидетельствуя о более регулярном квазипериодическом поведении солнечного динамо.

DOI: 10.31857/S0016794022010163

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее характерных и загадочных особенностей солнечной активности (СА) является ее изменчивость в широком диапазоне периодов. Наиболее известным является 11-летний цикл Швабе в числах солнечных пятен. Физически оправданным считается удвоенный цикл Швабе длиной около 22 лет, который можно связать с переполусовкой солнечных крупномасштабных магнитных полей [Vabcock, 1961]. Обнаружено, что амплитуда 11-летнего солнечного цикла и его длина меняются с периодом, близким к 100 годам [Gleissberg, 1944, 1965]. Эта периодичность известна как цикл Глейсберга (88-летний цикл или вековой цикл). В работе [Sonett, 1982] продемонстрировано, что амплитуда 22-летнего цикла Хейла также модулируется на шкале цикла Глейсберга.

Число солнечных пятен SN по прямым наблюдениям известно достаточно надежно только с 1610 г., когда был изобретен телескоп. Более длинные ряды SN могут быть получены с использованием косвенных данных по наблюдениям полярных сияний (порядка 2000 лет) или космоген-

ных изотопов ^{10}Be , ^{14}C , ^{36}Al в природных архивах (порядка десятков тысяч лет).

Gleissberg [1944] выявил ~ 80 -летний цикл в СА после фильтрации записей числа наблюдаемых солнечных пятен через низкочастотный фильтр (так называемое вековое сглаживание). Похожая периодичность была обнаружена и в записях исторических наблюдений полярных сияний [Schove, 1955; Siscoe, 1980; Feynman and Fougere, 1984; Attolini et al., 1990; Птицына и Демина, 2021], а также в данных о космогенных изотопах [см., например, Usoskin, 2017]. Для цикла Глейсберга в различных исследованиях были получены периоды 55, 65, 58, 78.8, 83, 87, 95, 104, 130, 150 лет [Kuklin, 1976; Silverman, 1992; Feynman and Fougere, 1984; Ogurtsov et al., 2002; McCracken et al., 2013; Usoskin, 2017]. Таким образом, видно, что полученные циклы не являются циклами в смысле наличия строгой периодичности. Предполагается, что это скорее некие вариации, периоды которых меняются во времени в широком диапазоне от 50 до 160 лет [Ogurtsov et al., 2002]. Авторы работ [Наговицын, 2001; Ogurtsov et al., 2002], используя прямые исторические наблюдения сол-

нечных пятен восточными астрономами, а также данные о космогенных изотопах, установили, что периоды цикла Глейсберга располагаются в двух диапазонах: 50–80 лет и 90–140 лет.

Есть свидетельства того, что цикл Глейсберга, будучи модулятором 11-летнего солнечного цикла, сам подвергается модуляции со стороны более длиннопериодных квазипериодических процессов. В частности, в работе [Птицына и Демина, 2021] для циклов Глейсберга предполагается длинноволновая амплитудная модуляция (с периодом ≥ 1500 –1700 лет), а также частотная модуляция квазипериодическим процессом, длина которого (~ 216 лет) лежит в пределах периода цикла Зюсса. В работе [Peristykh and Damon, 2003] показано, что спектральные характеристики цикла Глейсберга модулируются циклом Зюсса и 2400-летним циклом. Напротив, в работе [Ma, 2009] не найдено модулирующих эффектов со стороны цикла Зюсса.

Большой интерес представляет анализ стабильности и вариативности обнаруженных циклических составляющих в диапазоне периодов цикла Глейсберга, однако результаты различных исследований в этой области не всегда согласуются между собой. В работе [Peristykh and Damon, 2003] получено, что цикл Глейсберга с периодом 88 лет существует достаточно стабильно в течение $\sim 11\,000$ лет. Наличие 80-летнего цикла выявлено в генерации радиоуглерода ^{14}C в кольцах деревьев на шкале 8000 лет, однако не найдено никакого спектрального пика в районе 60–100 лет для периода после 700 г. н. э. [Lin et al., 1975]. В работе [Svalgaard, 2018] найдено, что околовековой цикл обнаруживается в течение тысячелетий с 6755 г. до н. э., но отсутствует в современных данных. Отсутствие 88-летнего цикла в СА в современную эпоху было отмечено также в работе [McCracken et al., 2013] на основе частотного анализа содержания ^{14}C и ^{10}Be , а также в других исследованиях [Clilverd et al., 2006]. Анализируя различные наблюдательные данные о СА за последние 400 лет, авторы работы [Komitov et al., 2016] нашли существование 60- и 120-летних циклов, но слабое присутствие затухающего 80-летнего цикла.

Происхождение цикла Глейсберга до сих пор не ясно. Обычно считается, что он генерируется солнечным динамо, и есть исследования, в которых разработанные модели динамо подтверждают такую точку зрения [Tobias, 1996; Pipin, 1999]. Однако, в работах [Feynman and Gabriel, 1990; Attolini et al., 1990] высказано утверждение, что 88-летний период не является реальным самостоятельным циклом, а представляет из себя третью субгармонику фундаментального 11-летнего цикла, или субгармонику 22-летнего цикла Хейла. Кроме того, некоторые исследователи вообще выражают сомнение в реальности векового цикла, так как длина наблюдательного ряда индикаторов СА всего ~ 400 лет [Siscoe, 1980; Feynman and Fogere, 1984; Ma and Vaquero, 2009; Hathaway, 2015]. Этого недостаточно для достоверного исследования вековых вариаций.

Можно заключить, что, несмотря на большую литературу по этому вопросу, многие черты цикла Глейсберга остаются неясными. Многие его характеристики, полученные разными методами из разных рядов данных, не согласуются между собой. Нет единой обоснованной точки зрения на происхождение этого цикла. Неизвестно, отражают ли полученные периодичности действительные изменения СА, или они могут объясняться также случайными вариациями или нерепрезентативностью выборки.

Цель данной работы – подробно рассмотреть существование и стабильность вариаций СА в диапазоне периодов цикла Глейсберга, а также их модуляцию более длиннопериодными процессами. Исходным шагом для данного исследования послужили результаты, полученные в работе [Птицына и Демина, 2021] о возможном воздействии на циклы Глейсберга модуляторов с периодами $T = 216$ лет и $T \geq 1500$ лет. Однако, в работе [Птицына и Демина, 2021] анализировался ряд данных СА за достаточно короткий промежуток времени (700 лет). Для подробного исследования вековых вариаций СА и еще более длинноволновых модулирующих процессов необходимо рассмотреть более длинные ряды. Для этого наряду с реконструкцией СА, полученной на основе числа полярных сияний [Птицына и Демина, 2020] за 700 лет, мы дополнительно использовали временной ряд числа солнечных пятен SN , реконструированный по данным о генерации радиоуглерода ^{14}C за $\sim 12\,000$ лет [Solanki et al., 2004]. Особое внимание было уделено сравнению полученных одними и теми же методами спектральных структур двух рядов SN , реконструированных из принципиально разных исходных данных. Это помогло выявить циклическую структуру СА в диапазоне периодов Глейсберга, которому наиболее уверенно можно считать отражением действительной динамики СА, а также идентифицировать происхождение такой структуры.

2. ДАННЫЕ И МЕТОДЫ

Мы проанализировали спектральные свойства двух временных рядов числа солнечных пятен, реконструированных из разных исходных данных:

SN_1 – ряд, реконструированный на основе данных о числе полярных сияний N на средних широтах с учетом экранирующего влияния магнитного момента Земли за 700 лет (1000–1700 гг.) [Птицына и Демина, 2020];

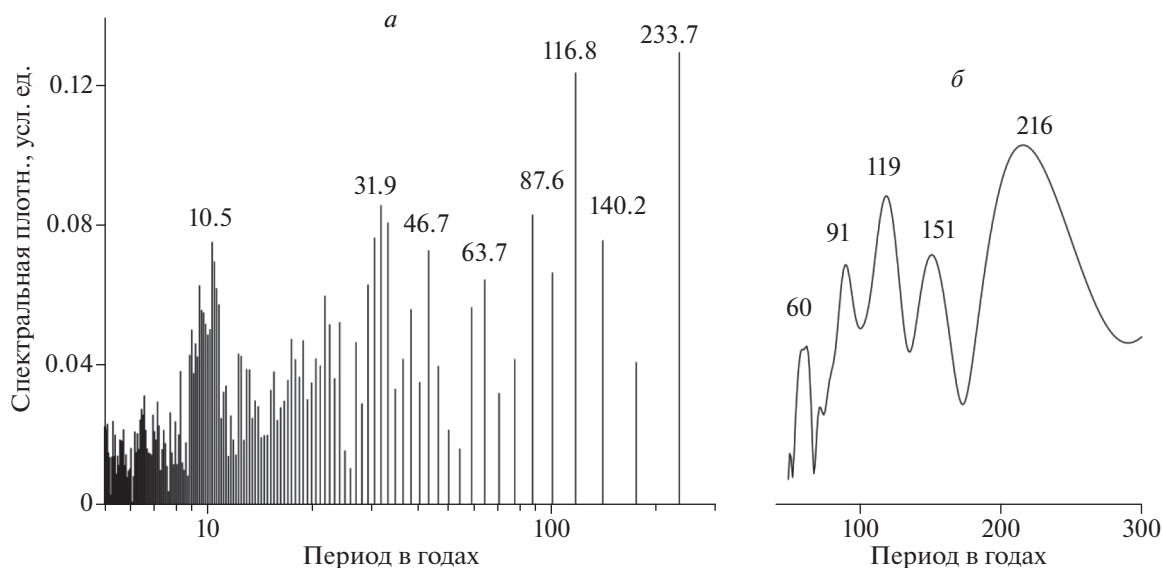


Рис. 1. Спектральные характеристики SN_1 . (а) — вычисленные с помощью дискретного преобразования Фурье; (б) — оцененные с помощью интегрального преобразования Фурье.

SN_2 — ряд, реконструированный на основе данных о концентрации радиоуглерода ^{14}C в кольцах деревьев за $\sim 11\,350$ лет [Solanki et al., 2004].

Для анализа этих рядов применялись как классический метод Фурье анализа, так и непрерывное вейвлет-преобразование. Вейвлет-анализ позволяет определить не только присутствие различных периодичностей в сигнале, но и найти плавающие периоды и изменения амплитуд отдельных составляющих во времени. В нашей работе использована порождающая функция Морле [Grossman and Morlet, 1984; Daubechies, 1992; Scargle, 1997]. Принцип вейвлет-анализа состоит в поиске порождающей функции заданной формы, но разного масштаба (масштабирование происходит по времени) в исходных временных рядах реконструированной солнечной активности SN . В результате получаем зависящий от времени набор коэффициентов разного масштаба. Для анализа состава и изменчивости спектров осуществлялась визуализация модуля вейвлет-коэффициентов в виде изолиний в плоскости масштаб — время, масштаб при этом пересчитывался в периоды. Шаг проведения изолиний и шкала раскраски выбирались так, чтобы можно было выделить локальные максимумы разного уровня и определить их координаты и значения.

3. АНАЛИЗ РЯДА SN_1 , РЕКОНСТРУИРОВАННОГО ИЗ ДАННЫХ О ПОЛЯРНЫХ СИЯНИЯХ

3.1. Фурье анализ

Для получения средних за 700 лет оценок спектральных составляющих временного ряда SN_1 бы-

ло вычислено дискретное преобразование Фурье. Полученная оценка спектральной плотности мощности показана на рис. 1а. Можно видеть, что в спектре SN_1 хорошо выражены спектральные составляющие с периодом ~ 11 лет, а также 30–40 лет. Получить достоверные оценки периодов более длинноволновых составляющих таким методом невозможно, поскольку дискретный спектр Фурье вычисляется в равноотстоящих по частоте точках, и таких точек в длинноволновой области нашего ряда фактически всего несколько. Однако можно отметить, что в спектре присутствуют также вариации с периодами, которые составляют семейство цикла Глейсберга: 63.7, 87.6 и 116.8 лет. Больше наглядности для оценки длинноволновых составляющих предоставляет использование интегрального преобразования Фурье, которое задает непрерывную огибающую дискретного спектра, но подвержено искажениям, связанным с оценкой и исключением тренда. Результат приведен на рис. 1б. Здесь циклы Глейсберга можно оценить как имеющие периоды 60, 91 и 119 лет. Кроме того, хорошо видно присутствие в спектре цикла Зюсса с периодом ~ 220 –230 лет.

Вычисление спектра с использованием преобразования Фурье позволяет получить средние за весь рассматриваемый временной интервал значения основных вариаций в исследуемом ряду. Для получения мгновенной структуры спектра и анализа его изменения во времени мы использовали вейвлет-анализ.

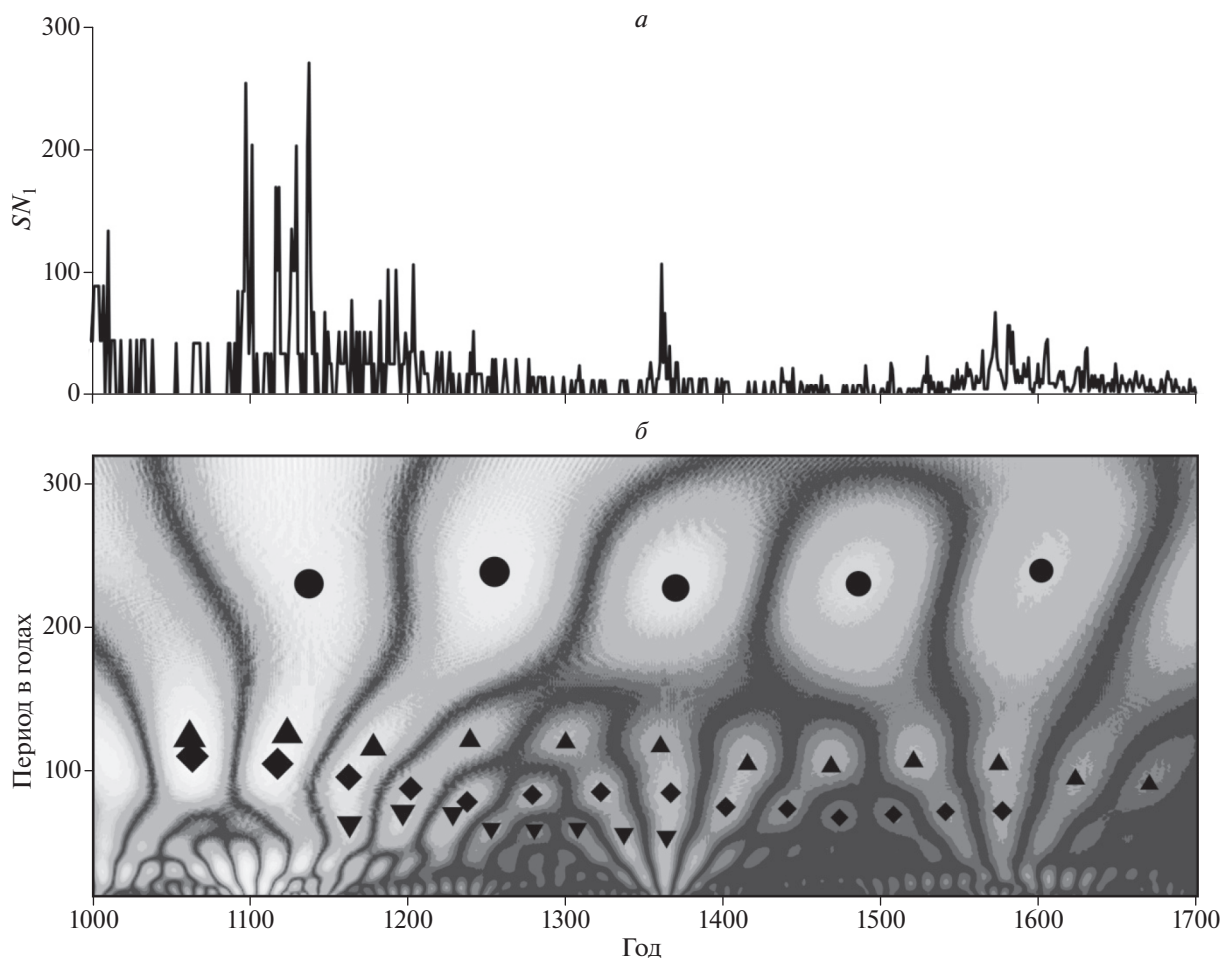


Рис. 2. Временной ряд SN_1 (а) и результат вейвлет-анализа ряда SN_1 (б). Круги – текущее значение периода 200-летней составляющей SN_1 , треугольники и ромбы – то же для мод цикла Глейсберга.

3.2. Вейвлет-анализ

На рисунке 2 приведен временной ряд реконструкции SN_1 (а) и модуль вейвлет-коэффициентов, полученных для этого ряда (б). Символами отмечены локальные максимумы. Размер символов пропорционален значению амплитуды в максимуме. На рассматриваемом промежутке времени можно видеть, что в спектре присутствуют три составляющие с периодами ~60, ~90 и ~120 лет, которые составляют семейство цикла Глейсберга. Этот результат находится в хорошем соответствии с результатом, полученным при Фурье-анализе. Все три ветви видны в 1175–1375 г., в остальное время уверенно прослеживаются две ветви. Отметим, что классический ~88-летний период наблюдается только до 1600 г., а амплитуда 60-летнего не позволяет оценить положение локальных максимумов. Кроме того, в спектре присутствует мощный и стабильный цикл Зюсса (~220–240 лет).

Для всех рассматриваемых цикличностей характерны изменения как амплитуды, так и самого периода. Мы рассмотрели изменение во времени амплитуд и периодов трех мод цикла Глейсберга. Результаты показаны на рис. 3. Амплитуды разных циклов отмечены теми же символами, что и периоды.

Рисунок 3а демонстрирует систематическое уменьшение амплитуд всех ветвей цикла Глейсберга, которое согласуется с общей картиной изменения числа солнечных пятен в рассматриваемый промежуток времени (рис. 2а). Это может быть интерпретировано как присутствие некоторого длинноволнового тренда, который можно охарактеризовать как модулирующую длинноволновую составляющую с периодом, превышающим 1000 лет. В работе [Птицына и Демина, 2021] при рассмотрении более длинного синтетического ряда SN_1 , состоящего из реконструированного ряда SN_1 и наблюдательных значений числа солнечных пятен до 2000 г., получена тен-

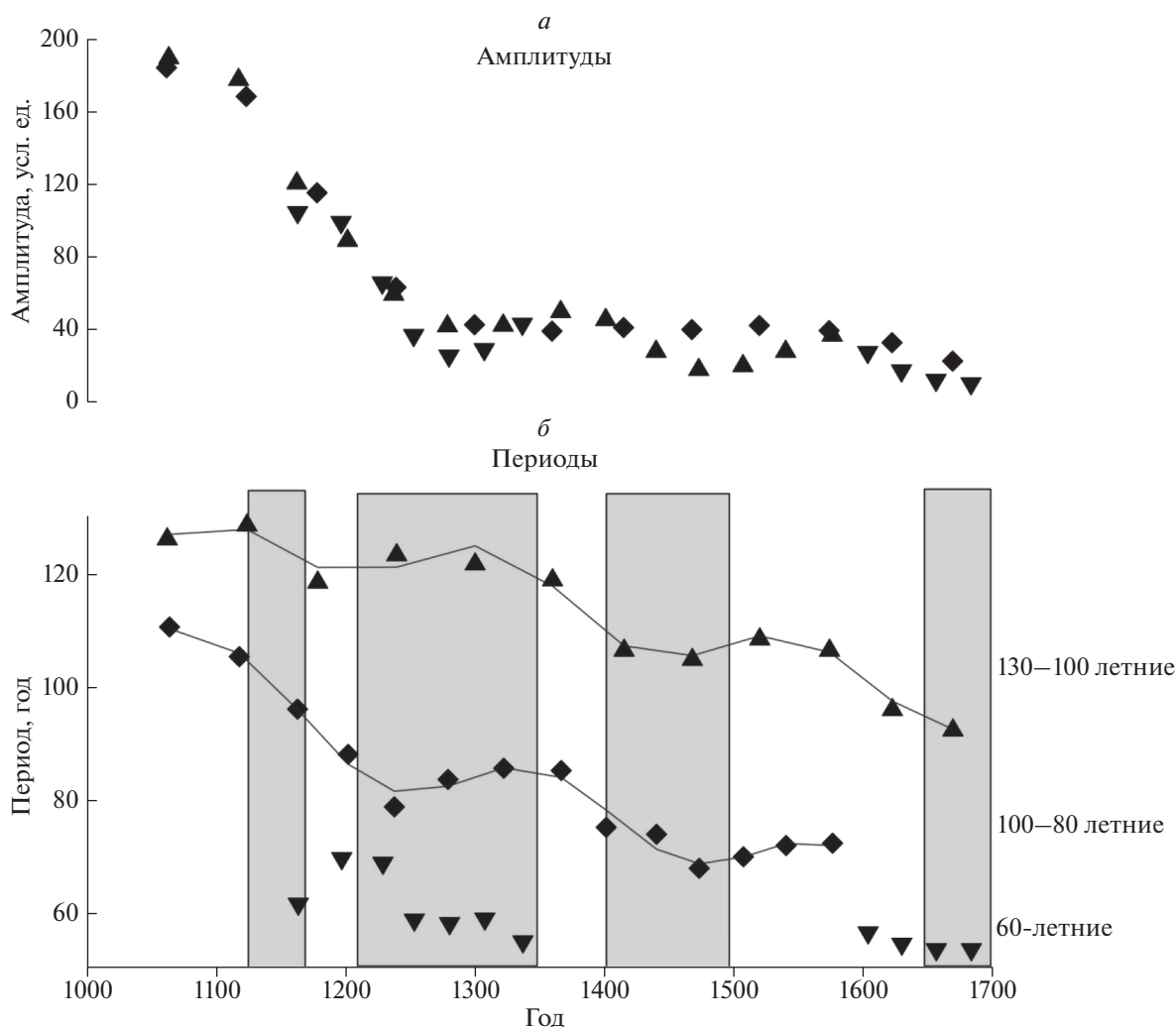


Рис. 3. Вариации амплитуд и периодов цикла Глейсберга в 1000–1700 гг. Символы – полученные значения, сплошная линия – аппроксимация суммой синусоид. Серым цветом отмечены минимумы Оорта, Вольфа, Шперера и Маундера.

денция модуляции амплитуды с периодом >1500 –1700 лет. Мы полагаем, что найденная амплитудная модуляция может быть вызвана каким-либо длинноволновым процессом. При таком количестве точек оценить его период затруднительно, поскольку еще надо иметь в виду наличие краевых эффектов, которые могут исказить периоды и амплитуды крайних точек. Для более точного анализа требуется рассмотрение длинных рядов, которое проведено в следующем параграфе.

Представляется важным тот факт, что изменения амплитуд всех мод цикла Глейсберга (рис. 3а) ложатся практически на одну кривую, указывая на то, что все три ветви являются проявлением одного и того же циклического процесса, а не самостоятельными независимыми вариациями.

На рисунке 3б видно, что периоды ветвей цикла Глейсберга также уменьшаются от наиболее длинных в 1000–1100 гг. до самых коротких в

1650–1700 гг. Это определяет диапазон изменения периодов как $T_{60} = 50$ –70 лет, $T_{88} = 70$ –110, $T_{120} = 95$ –130 лет. При этом периоды всех трех ветвей меняются в квазипериодическом режиме. На рисунке сплошной линией показана аппроксимация кривых изменения периодов суммой синусоид. Видно, что ветви цикла Глейсберга модулируются по частоте колебаниями с периодом ~ 200 лет. В работе [Птицына и Демина, 2021], рассматривая синтетический ряд SN за период 1000–2000 гг., мы оценили этот период как 216 ± 40 лет, что лежит в пределах значений периодов цикла Зюсса.

На рисунке 3б отмечены известные гранд-минимумы Оорта (1125–1175 гг.), Вольфа (1210–1350 гг.), Шперера (1400–1500) и Маундера (1645–1715). Видно, что периоды минимумов основной 88-летней ветви, четко совпадают с гранд-минимумами Вольфа и Шперера. Неоднократно отме-

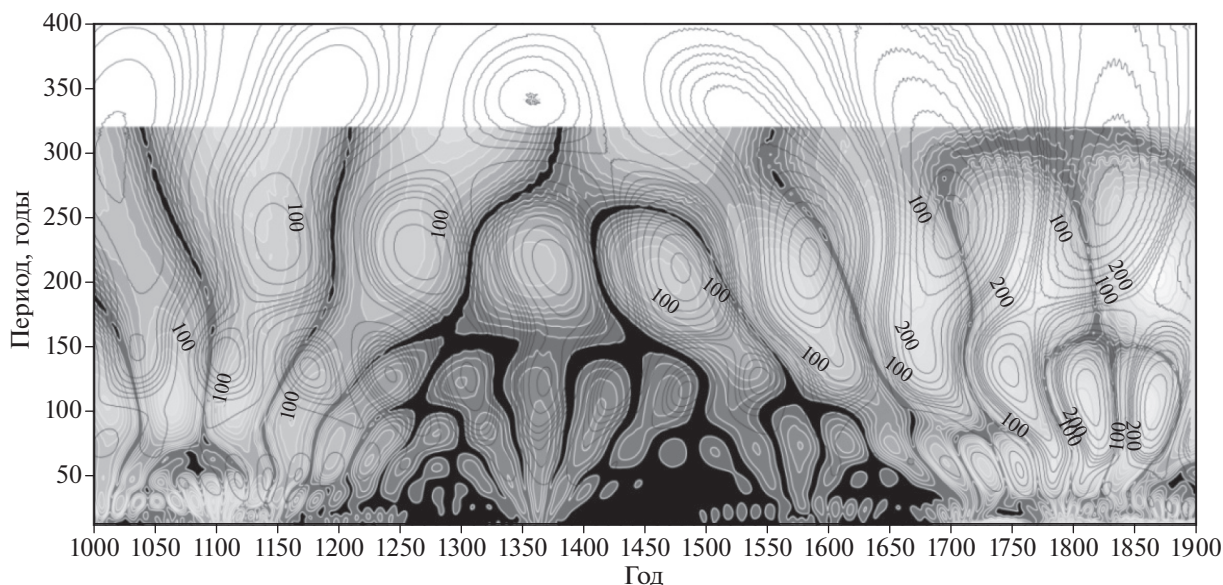


Рис. 4. Результат вейвлет-преобразования SN_1 и SN_2 . Окрашенный грид — реконструкция SN_1 , светлые области соответствуют максимумам, темные — минимумам, белым цветом показаны изолинии SN_1 , черным цветом — изолинии SN_2 .

чалось, что 200-летний цикл Зюсса определяет распределение гранд-минимумов в исторической СА [см., например, Usoskin et al., 2007]. По крайней мере, для интервала времени 1000–1700 гг. на рис. 3б это видно отчетливо. К сожалению, минимум Маундера не может явно проявиться в ряду 88-летней моды из-за краевых эффектов, однако в изменении этого цикла просматривается 200-летняя волна, что позволяет поместить следующий минимум 88-летнего колебания во время минимума Маундера. В работе [Usoskin et al., 2007] показано, что гранд-минимумы являются специальным режимом функционирования солнечного динамо. Совпадение минимумов 88-летнего цикла с гранд-минимумами в распределении СА может быть одним из аргументов в пользу того, что этот цикл действительно связан с оперированием солнечного динамо.

4. СРАВНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ В СПЕКТРАХ SN_1 И SN_2

Длина ряда N (700 лет), которая положена в основу реконструкции SN_1 , достаточна для исследования вариаций ~ 100 лет, но она не позволяет достоверно выяснить период модуляции отдельных мод более длинноволновыми процессами. Как уже упоминалось выше, для получения более точных оценок необходимо анализировать длинные ряды. Мы выбрали для дальнейшего анализа самый длинный известный нам ряд (11 350 лет) SN_2 , реконструированный по данным космогенных изотопов [Solanki et al., 2004]. Кроме того, согласно проведенному сравнению спектров различных

реконструкций при помощи Фурье анализа (не показано здесь) спектр ряда SN_2 дает наиболее близкое соответствие спектру ряда SN_1 .

Для периодов, меньших 400 лет, можно провести прямое сравнение результатов вейвлет-анализа реконструкций SN_1 и SN_2 . Результаты такого сравнения приведены на рис. 4, где представлены вейвлет-преобразования для этих рядов за 1000–1700 гг. На рисунке 4 оттенками серого показаны вейвлет-коэффициенты SN_1 , изолинии проведены для SN_2 . Видно, что в обоих спектрах наиболее четко прослеживается околodвухсот-летняя составляющая. Времена локальных максимумов SN_1 и SN_2 практически на всем промежутке времени очень близки друг к другу.

В вейвлет-спектрах обеих реконструкций присутствуют также составляющие цикла Глейсберга с периодами от 50 до 150 лет. Как мы видели на рис. 2, выделенные составляющие (60, 90, 120 лет) в спектре SN_1 доминируют поочередно. На рисунке 4 видна аналогичная картина для SN_2 . При этом локальные максимумы в спектрах SN_1 и SN_2 в отдельные промежутки времени практически совпадают, как например, в 1250–1350 гг. для 120-летней составляющей, и в ~ 1700 –1800 гг. для 50-летней составляющей. В иные эпохи такого четкого совпадения локальных максимумов не наблюдается. Это, по-видимому, связано с тем фактом, что в спектре SN_2 очевидным образом четче представлены более длинноволновые составляющие, а в спектре SN_1 коротковолновые моды хорошо видны даже для тех временных интервалах, где падает общая интенсивность в спектрах (1400–1600 гг.).

Надо еще учесть, что ряд SN_1 значительно короче, поэтому в его спектре присутствует значительный краевой эффект. Кроме того, за счет длины ряда SN_2 получено большее разрешение отдельных составляющих. Однако, несмотря на эти различия, очевидно, что в общих чертах как положение, так и изменение спектральных максимумов для SN_1 и SN_2 демонстрируют удивительное совпадение, хотя получены они были на основе принципиально разных данных, а именно в случае SN_1 из наблюдений полярных сияний, а в случае SN_2 — по содержанию космогенных изотопов. Так что в целом эти ряды можно считать очень схожими по спектральному составу. Этот результат очень важен, так как сходство спектральных структур в независимо полученных рядах данных повышает доверие к результатам нашего спектрального анализа, давая основания полагать, что полученные цикличности соответствуют реальным динамическим процессам в солнечной активности.

Дальнейший анализ мы проводили для SN_2 .

5. АНАЛИЗ РЯДА SN_2 , РЕКОНСТРУИРОВАННОГО ИЗ ДАННЫХ О КОСМОГЕННЫХ ИЗОТОПАХ

5.1. Вейвлет-анализ

Для ряда SN_2 были вычислены вейвлет-коэффициенты в диапазоне периодов от 20 до 800 лет. На рис. 5 представлены: временной ряд SN_2 (*a*), его вейвлет-коэффициенты (*b*) и в увеличенном масштабе фрагмент вейвлет-спектра в диапазоне периодов 20–300 лет, соответствующий циклам Глейсберга и Зюсса, (*в*). Условные обозначения те же, что для рис. 2.

На рисунке 5*б* хорошо видно, что спектр SN_2 имеет сложную структуру, причем изменениям во времени подвержены не только амплитуды, но и периоды спектральных составляющих. В рассматриваемом диапазоне проявляется длинноволновая составляющая, период которой колеблется в диапазоне 300–600 лет. В изменении амплитуды этой составляющей можно заметить квазипериодические изменения с периодом ~2500 лет. Нас в первую очередь интересует полоса в области 50–150 лет, соответствующая циклу Глейсберга и околорядсотлетней составляющей цикла Зюсса. Для лучшего разрешения соответствующий интервал периодов вынесен на отдельный рисунок (рис. 5*в*).

На рисунке 5*в* отчетливо проявляются три ветви цикла Глейсберга со средними периодами $T_{60} = 45–80$, $T_{90} = 80–110$ и $T_{140} = 120–160$ лет. Характерной особенностью полученных циклов является то, что периоды этих трех ветвей не остаются постоянными, а также как для ряда SN_1 ,

меняются во времени в некоторых пределах. Средние периоды этих цикличностей совпадают с периодами мод Глейсберга, которые выявлены в вейвлет-спектре короткого ряда SN_1 (параграф 2.1). Хорошо видно, что трехчастотная структура носит достаточно устойчивый характер и стабильно прослеживается на большей части временного интервала длиной >11000 лет. Особенно четко три ветви наблюдаются с 9400 до 8100 гг. до н. э., а также с 6100 до 3500 гг. до н. э. Однако можно отметить наличие более коротких промежутков, когда такая трехчастотная спектральная структура замещается на двухчастотную, в которой видна основная ветвь 88 лет и уверенно локализуется только одна из ветвей с периодом 60 или 140 лет. В этом случае либо соотношение амплитуд близких по периодам составляющих не позволяет разделить их вклады, либо амплитуда одной из них становится слишком мала, чтобы проявиться в локальном спектре. Так, начиная с 1000 г. н. э., преобладает двухчастотная структура, в которой практически отсутствует основная частота (88 лет), а доминируют две сопутствующие составляющие, 60 и 140 лет.

Кроме ветвей цикла Глейсберга, следует отметить наличие интенсивной составляющей цикла Зюсса с периодом ~220 лет. Период цикла Зюсса также изменяется со временем в пределах ~180–260 лет.

5.2. Три ветви цикла Глейсберга как результат частотной модуляции

Выше в параграфе 2.1 для ветвей цикла Глейсберга ряда SN_1 получена частотная модуляция с периодом ~216 лет методом аппроксимации изменения периодов во времени синусоидальным сигналом. В случае ряда SN_2 изменения носят сложный характер, и такой простой подход становится невозможным. Однако предполагая наличие в спектре SN_2 трех ветвей цикла Глейсберга частотной модуляции основного цикла (~88 лет) другим квазигармоническим процессом, можно оценить период последнего, воспользовавшись свойствами, присущими частотной модуляции.

Для двух гармонических сигналов с периодами ω_1 (основной) и ω_2 (модулирующий) результат модуляции представляется формулой

$$F(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + K_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \varphi_1), \quad (1)$$

где ω_1 и ω_2 частоты, а φ_1 и φ_2 — фазы сигналов, K_1 — коэффициент, определяющий степень влияния модулятора на основной сигнал. От значения K_1 зависит, каким образом частотная модуляция проявляется в спектре результирующего сигнала. В общем случае в спектре, наряду с ω_1 , могут присутствовать комбинации $\omega_1 + n\omega_2$ и $\omega_1 - n\omega_2$, где

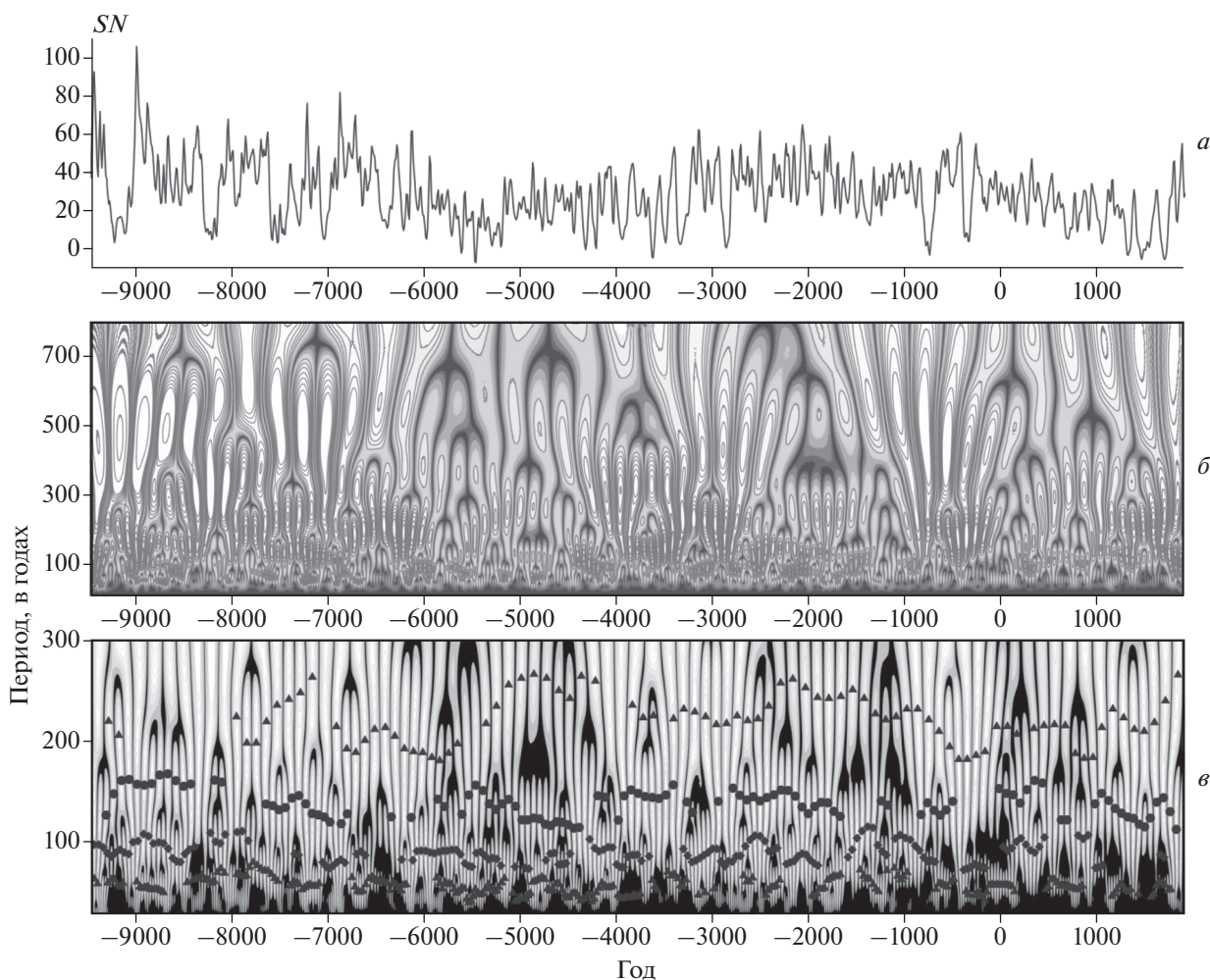


Рис. 5. Временной ряд SN_2 и его вейвлет-преобразование. (а) – ряд SN_2 ; (б) – вейвлет-спектр SN_2 в диапазоне периодов 20–800 лет; (в) – то же в диапазоне периодов 20–300 лет. Условные обозначения те же, что для рис. 2.

n – целое число. Какие из этих частот реально проявляются в спектре и с каким соотношением амплитуд, определяет как раз коэффициент K_1 .

На рисунке 6 представлено изменение частот ветвей циклов Глейсберга. Можно определить средние значения частот (приведены рядом с прямыми), и, предполагая $n = 1$, найти соответствующие разности частоты основного цикла 0.011 и дополнительных циклов, т.е. частоту модулятора. Вычислив среднее из полученных значений, найдем период модулирующего сигнала как 224 года.

Таким образом, наличие в спектре SN_2 трех ветвей Глейсберга может быть объяснено влиянием на основной период генерации некоторого внешнего модулятора с периодом 220–230 лет. Причем основной период, как часто предполагается, генерируется солнечным динамо. В основном работы по солнечному динамо концентрируются на объяснении 11-летнего цикла. Однако

есть теоретические работы, в которых предложены физические механизмы, оперирующие в конвективной зоне Солнца, характерные времена которых ~ 100 лет и которые поэтому могут быть источником около столетних вариаций СА [Tobias, 1996; Pipin, 1999; Pipin et al., 2012]. Две сопутствующие гармоники с периодом 62 и 140 лет получаются за счет 220–230-летнего модулятора. Поскольку для возникновения частотной модуляции необходимо оказать влияние на генератор основного колебания, т.е. за счет внешнего воздействия изменить условия генерации [Гоноровский, 1948], то этот внешний модулятор с периодом ~ 220 –230 лет, скорее всего, имеет внесолнечное происхождение.

Интерпретация спектров частотно-модулированных сигналов в случае, когда неизвестны параметры и основного сигнала, и модулятора, представляет собой непростую задачу. Поэтому мы первоначально провели исследование спек-

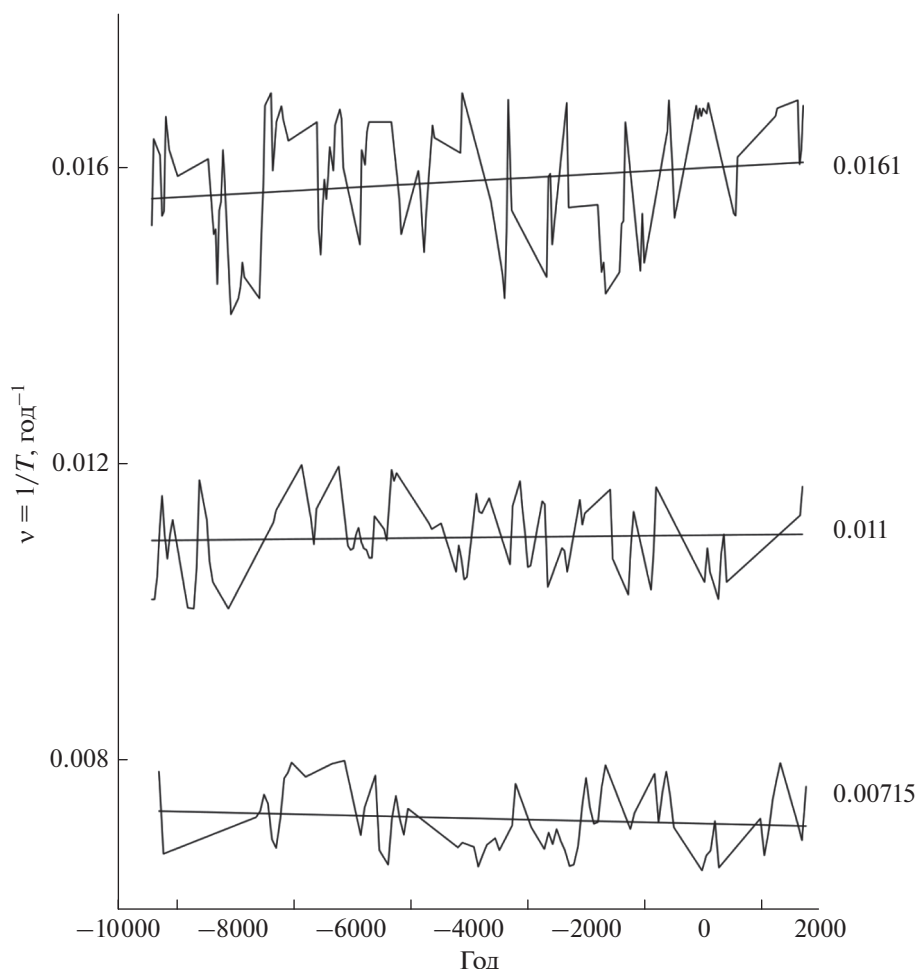


Рис. 6. Изменение частот ветвей Глейсберга. Цифры – средние значения.

тральных свойств частотно-модулированного сигнала на моделях. В качестве одной из таких моделей мы рассмотрели сигнал, представляющий собой комбинацию двух гармонических колебаний, где основное колебание с периодом 88 лет модулируется сигналом с периодом 224 года. Синтезированный частотно-модулированный сигнал строился по формуле (1) при нулевых сдвигах по фазе. Для сравнения параллельно анализировался сигнал, построенный как модулированный по амплитуде по формуле (2).

$$F_{am}(t) = A_1(1 + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)) \cos(\omega_1 t + \varphi_1). \quad (2)$$

Обозначения те же, что и в формуле (1), коэффициент $A_1 = 1$, коэффициент K_2 здесь отражает соотношение амплитуд основного и модулирующего сигнала. Для синтезированных сигналов вычислялись спектры Фурье при разных значениях K . Результаты представлены на рис. 7 при $K_2 = 0.5, 1$ для амплитудной модуляции и $K_1 = 1, 2, 3$ – для частотной. Видно, что в спектрах амплитудно-модулированного сигнала (рис. 7а) вместо

исходной 88-летней моды в диапазоне периодов цикла Глейсберга присутствует триплет: 88 лет и две гармоники с периодом 63.2 и 144 года. Причем доминирует основная мода, а от значения K_2 зависит только соотношение между спектральными составляющими. С ростом K_2 амплитуда боковых ветвей растет, и соотношение амплитуд основной и боковых ветвей изменяется в пользу последних.

Для частотно-модулированного сигнала (рис. 7б) в спектре присутствует тот же триплет, и с ростом K_1 также происходит рост боковых ветвей, но гораздо более быстрый, чем в случае амплитудной модуляции. Главное отличие состоит в том, что в случае частотной модуляции происходит изменение со временем не только амплитуд, но и частот выделенных сигналов. Кроме того, с ростом K_1 изменяется структура спектра, появляются дополнительно спектральные моды в диапазоне периодов 30–50 и 350–600 лет в соответствии с приведенными выше формулами размножения частот. Таким образом, при наличии всего одного

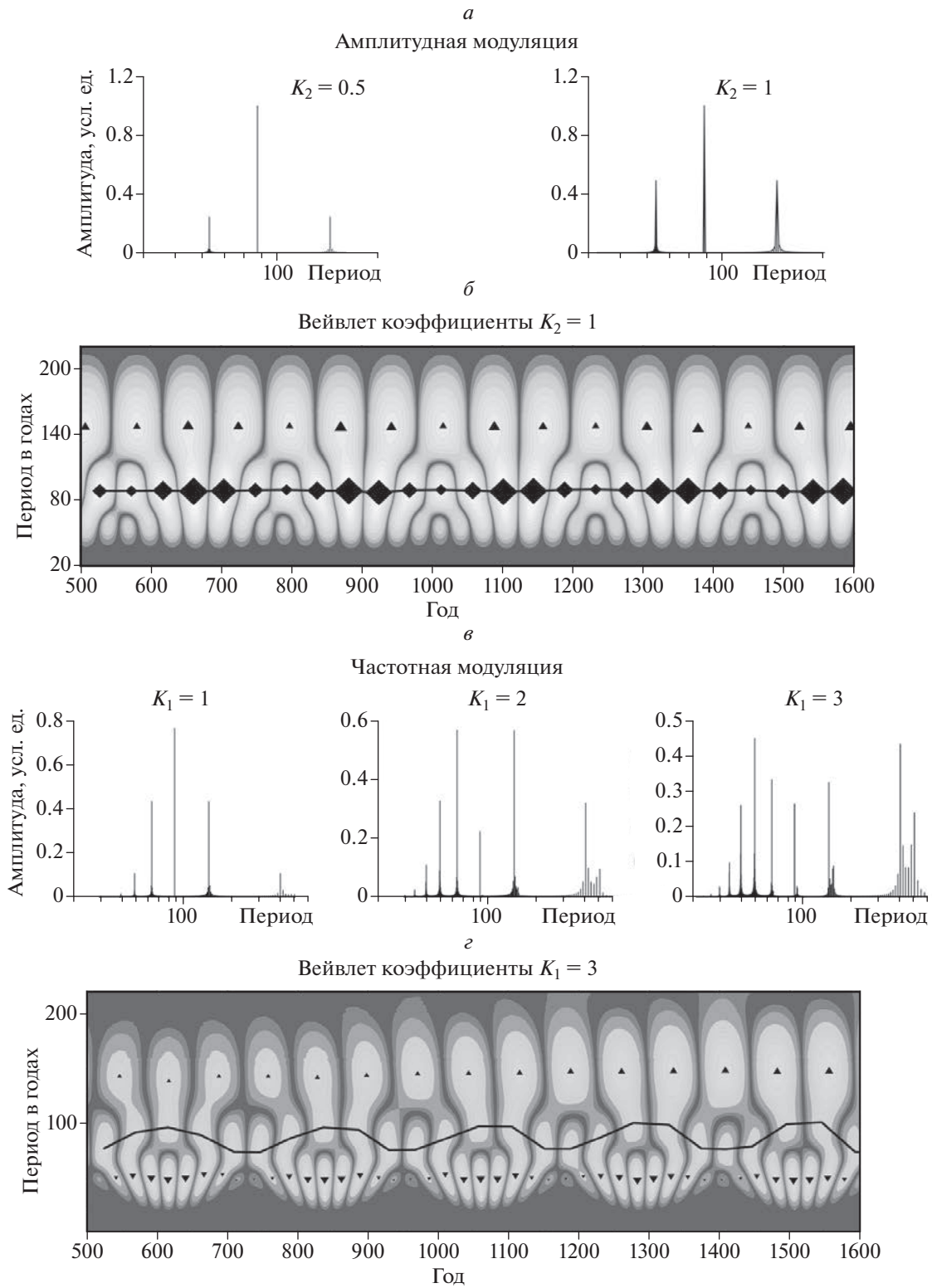


Рис. 7. Фурье-спектр и вейвлет-преобразование модели амплитудно- и частотно-модулированного гармонического колебания при разных параметрах модуляции. (*a* и *в*) – Фурье-спектр; (*б* и *г*) – вейвлет-преобразование. Символами помечены значения периодов в текущий момент времени; сплошная линия – изменение периода основного колебания от времени.

строго гармонического сигнала за счет амплитудной модуляции в спектре мы можем получить три составляющие, а за счет частотной — еще и дополнительные группы периодов. То, что в спектре появляются не просто дополнительные пики, а группы периодов, связано с вызванным частотной модуляцией изменением периодов отдельных составляющих во времени, что можно проследить, если рассматривать мгновенные вейвлет-спектры.

Упомянутую разницу между результатом амплитудной и частотной модуляции наглядно демонстрирует вейвлет-преобразование описанных выше модельных сигналов (рис. 7б и з). Условные обозначения те же, что и для рис. 2. Размер символов, отмечающих положение максимумов вейвлет-коэффициентов, пропорционален значению в максимуме.

Отчетливо видно, что изменение амплитуды основного колебания представляет собой практически синусоиду с периодом модулирующего сигнала (224 года). Тогда как его период не меняется от времени. Для наглядности на рис. 7б значения периодов основного колебания (88 лет), выделенные в отдельные моменты времени, соединены линией, которая с точностью до ошибок их локализации представляет собой прямую линию. Аналогичный результат получен и для дополнительной моды в 144 года. Для 63-летней составляющей в силу меньшей амплитуды получить полный ряд не представляется возможным, но соответствующая периодичность в изменении амплитуды также отчетливо видна.

В случае частотной модуляции хорошо видно практически синусоидальное изменение основного периода (88 лет). На рисунке 7з это изменение показано сплошной линией, соединяющей максимумы вейвлет-коэффициентов. Легко видеть, что период этого колебания ожидаемо составляет 224 года. Тот же результат получен и для изменения периода и амплитуды короткопериодной составляющей. В отличие от амплитудной модуляции, в вейвлет-спектре частотно-модулированного сигнала (рис. 7з) короткопериодная составляющая представляет собой не изменяющееся по амплитуде 63-летнее колебание, а группу периодов с центральным максимумом 50 лет, что находится в полном соответствии со структурой спектра Фурье (рис. 7а).

Таким образом, результаты модельных расчетов показывают, что только за счет присутствия частотной модуляции можно объяснить многие характерные черты спектров SN , полученные в предыдущих параграфах: вариабельность частот выделенных циклов и появление в спектре групп периодов 30–50 лет (рис. 1б) и 400–500 лет (рис. 5б).

Из модельных расчетов следует, что для частотно-модулируемого сигнала при значениях

коэффициента $K_1 > 1$ основной 88-летний период по амплитуде может быть значительно меньше боковых составляющих, а в отдельные моменты времени может быть практически незаметен в спектре на их фоне. Именно такая ситуация наблюдается в вейвлет-спектре SN_2 после 1000 г. н. э. (рис. 5). Таким образом, по-видимому, отмеченный во многих работах факт [Lin et al., 1975; Clilverd et al., 2006; McCracken et al., 2013; Svalgaard, 2018], что 88-летний цикл не всегда прослеживается в нашу эру, дополнительно может свидетельствовать о том, что именно частотная модуляция, скорее всего, вносит основной вклад в образование трех/двух ветвей цикла Глейсберга.

Влиянием внешнего процесса с периодом 224 года можно объяснить и наличие сопутствующих периодов для 11- и 22-летних составляющих. Действительно, в соответствии с формулами разложения частот можно получить значения этих дополнительных периодов, представленных в табл. 1. При наличии строго гармонических 11- и 22-летних колебаний и 224-летнего частотного модулятора в спектре наблюдаемого значения SN могут присутствовать все приведенные в таблице периоды. Поскольку период модулятора также может изменяться, то и набор этих периодов должен изменяться во времени, что приведет к расплыванию спектра Фурье. Вычисление мгновенных спектров позволяет получить более подробную картину, но связано с трудностями разделения отдельных составляющих и их интерпретацией.

Отметим, что приведенные в таблице 1 данные совпадают с наблюдательными сведениями о длине солнечного цикла. Известно, что в XVIII–XX вв. длина “одиннадцатилетнего цикла” менялась от 7 до 14 лет, а в XX в. она была в среднем близка к 10.5 лет.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты согласуются с основными известными сведениями о цикле Глейсберга, однако мы получили больше деталей и новых принципиальных особенностей. Наши результаты проясняют два основных вопроса, которые до сих пор не имели однозначного ответа, хотя они могут иметь первостепенное значение для объяснения природы этого цикла и функционирования солнечного динамо.

Во-первых, это вопрос о том, какова частотная структура цикла Глейсберга. Сложная структура векового цикла была установлена еще в пионерской работе [Schöve, 1955] на базе исторических записей о полярных сияниях за последние 2000 лет. Дополнительно к циклу Глейсберга длиной ~78 лет, автор нашел следы более длинного цикла (120–130 лет) и более короткого (55–60 лет).

Таблица 1. Сопутствующие периоды для 11- и 22-летних циклов

	$\omega_1 + n\omega_2$				$\omega_1 - n\omega_2$			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
11	10.5	10.0	9.6	9.2	11.6	12.2	12.9	13.67
22	20.04	18.4	17.01	14.78	24.38	27.35	31.13	36.13

Позднее полагалось, что периоды цикла Глейсберга имеют двухчастотную структуру (50–80 лет и 90–140 лет) [Наговицын, 2001; Ogurtsov et al., 2002]. Двухчастотная структура была найдена также в недавней работе [Vecchio et al., 2017]. В противоположность этому авторы работы [Kolláth and Oláh, 2009] отстаивают наличие одночастотной структуры цикла Глейсберга, когда одно единственное колебание меняет свой период в широких пределах. Однако в работе [Vecchio et al., 2017] такой подход критиковался на том основании, что в работе [Kolláth and Oláh, 2009] использовались не вполне адекватные методы и короткие ряды, в результате чего отдельные четкие колебания были смешаны. В работе [Komitov et al., 2016] на основе анализа наблюдательных данных за последние 400 лет найдено наличие трех циклов в диапазоне цикла Глейсберга, с упором на 60-летнюю составляющую, которая преобладает в спектре XVII–XIX вв.

Во-вторых, оставался неясным вопрос о том, являются ли ветви цикла Глейсберга самостоятельными отдельными колебаниями, или они каким-то образом связаны между собой. Дело в том, что в работе [Feunman and Gabriel, 1990] высказано утверждение, что 88-летний период не является самостоятельным циклом, а является третьей субгармоникой фундаментального 11-летнего цикла. Аналогично авторы работы [Attolini et al., 1990] полагают 88-летний цикл субгармоникой 22-летнего цикла Хейла. Позже авторы работы [Feunman and Ruzmaikin, 2014] в спектре данных за последние 400 лет идентифицировали с циклом Глейсберга только столетнюю волну; отмеченная в спектре 50–60-летняя квазипериодичность не получила отдельного внимания на том основании, что она существует только с 1725 по 1850 г., после чего сливается со столетней модой. При этом авторы полагают, что это – самостоятельный солнечный околостолетний цикл. Исследование, проведенное с помощью метода движущихся периодограмм в работе [Peristyxh and Damon, 2003], установило, что 88-летний цикл Глейсберга претерпевает амплитудную модуляцию циклами с периодами 207 лет и ~2000 лет, в результате чего появляются дополнительные спектральные составляющие 150, 61.2, 91.5 и 84.6 лет. В других работах различные моды цикла Глейсберга предполагались реальными квазипериодическими колебаниями с присущими каж-

дой моде своими источниками колебаний. Например, авторы недавней работы [Komitov et al., 2016] считают, что все ветви цикла Глейсберга являются отдельными самостоятельными колебаниями, каждое из которых генерируется определенным классом активных областей на Солнце. В частности, мощная 60-летняя составляющая, найденная в их исследовании, обусловлена наиболее сильными вспышками и самыми мощными корональными выбросами массы.

В нашей работе получено, что циклы Глейсберга представляют собой трехчастотную структуру (60, 88 и 140 лет), периоды мод которой изменяются со временем. При этом 88-летний цикл является основным, источником которого, вероятно, является солнечное динамо, а 60- и 140-летние циклы – это результат частотной модуляции основного цикла модулятором с периодом ~220–230 лет. То есть, все три ветви цикла Глейсберга являются частью одного квазипериодического колебательного процесса, что подтверждается характером амплитудной модуляции: изменения амплитуд всех трех ветвей во времени практически совпадают. То, что именно частотная модуляция вносит основной вклад в образование дополнительных ветвей цикла Глейсберга, видно на примере построенных моделей гармонического осциллятора с периодом 88 лет, на который воздействует либо частотный, либо амплитудный модуляторы. При этом получено, что проявление в спектре отдельных ветвей цикла зависит от соотношения параметров несущего и модулирующего сигнала. Если амплитуда последнего меняется со временем, то в результате в одни исторические эпохи могут наблюдаться все три ветви цикла Глейсберга, а в иные эпохи могут быть заметны только две ветви. Полученный результат естественным образом объясняет тот факт, что в разных работах обнаруживались либо две, либо три ветви в цикле Глейсберга, а также расхождение в длинах периодов. То, что в некоторые эпохи может осуществляться ситуация, когда основная ветвь не наблюдается на фоне более мощных боковых составляющих, объясняет отсутствие классического 88-летнего цикла в СА в современную эпоху, которое было отмечено в работах [Clilverd et al., 2006; McCracken et al., 2013; Svalgaard, 2018].

Полученные результаты могут быть связаны с выбором хаотической или квазипериодической гипотезы о работе солнечного динамо. Ранее бы-

ло найдено существование субгармоник фундаментального периода при переходе системы солнечного динамо от квазипериодичности к хаосу [Weiss et al., 1984; Feynman and Gabriel, 1990]. Для такого перехода характерно удвоение, когда наблюдаются субгармоники с периодами, кратными ($n = 2, 4, 8$ и т.д.) фундаментальному периоду. Удвоение периодов, бифуркационный каскад (11, 22, 88 лет), служит авторам работы [Feynman and Gabriel, 1990] основанием для вывода о том, что солнечное динамо, которое генерирует вариации СА, функционирует в режиме хаоса. В противоположность этому выводу, наши результаты о том, что периоды цикла Глейсберга претерпевают изменения по законам частотной модуляции, свидетельствуют о гораздо большей регулярности в вариациях СА и, тем самым, в функционировании солнечного динамо. То, что наблюдаемые вариации длины периодов 11- и 22-летних циклов также могут быть связаны с их частотной модуляцией 200-летним циклом, могут служить дополнительным аргументом, свидетельствующим о том, что солнечное динамо в основном функционирует в режиме квазипериодичности. Этот вывод согласуется с выводом авторов работы [Peristykh and Damon, 2003], по мнению которых найденное ими наличие стабильного 88-летнего цикла на временном интервале ~ 11000 лет, не поддерживает идею квазихаотического поведения солнечных процессов на шкалах длиннее, чем 11 лет. В исследовании [Usoskin et al., 2007] предполагается, что солнечное динамо функционирует в режиме квазипериодичности на всей протяженности реконструкций СА, кроме периодов гранд-минимумов/максимумов, где квазипериодический режим переходит в состояние хаоса.

Вопрос о происхождении 200-летнего цикла привлекал внимание исследователей. В частности, авторы работы [Damon and Jirikovich, 1992] считают, что 200-летняя вариация имеет источником процессы в солнечном динамо, которые отражаются также в вариациях солнечного диаметра [Ribes, 1989]. Однако наши результаты о том, что этот цикл является частотным модулятором, заставляют сомневаться в выводе авторов исследования [Damon and Jirikovich, 1992]. Частотная модуляция имеет особое значение, поскольку она отражает процесс, который приводит к изменению условий генерации основного колебания [Гоноровский, 1948; Wilson, 1996], и говорит о существовании внешнего источника, вынуждающего систему менять частоту собственного колебания в соответствии с частотой этого внешнего сигнала. Поэтому, скорее всего, модулирующий ~ 200 -летний цикл Зюсса имеет внесолнечное происхождение. Было обнаружено, что квазипериодические изменения с периодом ~ 200 лет являются характерной чертой геомагнитного поля [Начасова и Акимова, 2015]. Нами

при вейвлет-анализе модели магнитного момента *ARCH3k* также была получена составляющая с периодом 200–250 лет [Птицына и Демина, 2021]. Наличие близких цикличностей с периодом ~ 200 лет в СА и в магнитном поле Земли может свидетельствовать о том, что при извлечении значений *SN* из природных архивов было недостоверно учтено влияние магнитного момента. Например, авторы работы [Chol-jun and Jik-su, 2019] считают, что найденный ими пик в 207 лет в спектре исторических значений *SN* получается за счет геомагнитной или климатической коррекции при реконструкции СА. Однако, с другой стороны, наличие аналогичных цикличностей в СА и в магнитном поле Земли может говорить и о параллельном влиянии внешних по отношению к Солнцу сил, в частности, например, гравитационных, на солнечное и земное динамо.

Опираясь на главные свойства частотной модуляции, можно предположить, что цикл Зюсса с периодом ~ 200 лет представляет собой отражение периода внесолнечного квазипериодического процесса, управляющего условиями генерации основных солнечных циклов (11- и 22- и 88-летнего).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методами Фурье- и вейвлет-анализа была проведена оценка цикличности СА в диапазоне периодов цикла Глейсберга двух рядов СА, реконструированных из разных источников (из числа наблюдаемых полярных сияний и из содержания радиоуглерода ^{14}C в кольцах деревьев). Проведенное сравнение показало, что полученные спектры обоих рядов находятся в очень хорошем согласии между собой. Это свидетельствует о том, что найденная спектральная структура циклов Глейсберга отражает действительную динамику СА.

Анализ показал, что цикл Глейсберга характеризуется трехчастотной структурой с периодами ~ 60 , ~ 88 и ~ 140 лет, которые меняются со временем. Такая структура является результатом взаимодействия основной 88-летней моды цикла Глейсберга солнечного происхождения и модулятора с периодом 224 года внесолнечного происхождения. Проведены модельные расчеты для синтезированного сигнала, представляющего собой модулированный по частоте и по амплитуде гармонический осциллятор с такими параметрами. Анализ изменения спектров модельных сигналов подтверждает полученные для *SN* результаты.

Найдено, что на разных отрезках времени могут наблюдаться либо все три моды Глейсберга, либо только две. Причем, иногда реализовываются условия, при которых основная 88-летняя мода может быть не видна в спектре. Этим фактом объ-

ясняется разногласия в оценках периодов цикла Глейсберга между разными авторами, в частности преобладание в XVII–XIX вв. моды в 60 лет и практически отсутствие в современных наблюдательных данных 88-летнего цикла. Период модулятора 224 года, вероятно, представляет собой отражение периода внесолнечного квазипериодического процесса, оказывающего влияние на условия генерации основных солнечных циклов (11-, 22- и 88-летнего).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гоноровский И.С. Частотная модуляция и ее применения. М.: Связьиздат, 286 с. 1948.
- Наговицын Ю.А. Солнечная активность двух последних тысячелетий: “Служба Солнца” в древнем и средневековом Китае // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 41. № 5. С. 711–720. 2001.
- Начасова И.Е., Акимова С.В. Вариации напряженности геомагнитного поля на Пиренейском п-ове в последнее тысячелетие // Физика Земли. № 5. С. 100–106. 2015.
<https://doi.org/10.7868/S0002333715050087>
- Птицына Н.Г., Демина И.М. Реконструкция солнечной активности в 1000–1700 гг. по данным о полярных сияниях с учетом вклада главного магнитного поля Земли // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 60. № 3. С. 515–527. 2020.
<https://doi.org/10.31857/S0016794020030153>
- Птицына Н.Г., Демина И.М. Цикличность солнечной активности, реконструированной из статистики полярных сияний с учетом вклада главного магнитного поля Земли, 1000–2000 гг. // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 61. № 2. С. 295–308. 2021.
<https://doi.org/10.31857/S0016794021020127>
- Attolini M.R., Cecchini S., Galli M., Nanni T. On the persistence of the 22-year solar cycle // Solar Phys. V. 125. P. 389–398. 1990.
- Babcock H.W. The topology of the Sun’s magnetic field and the 22-year cycle // Astrophys. J. V. 133. P. 527–587. 1961.
- Chol-jun K., Jik-su K. About 200-Year Cycle of Solar Activity in the Mediaeval Korean Records and Reconstructions from Cosmogenic Radionuclides // arXiv:1912.11226. astro-ph. P. 1–8. 2019.
- Clilverd M.A., Clarke E., Ulich T., Rishbeth H., Martin J. Predicting solar cycle 24 and beyond // Space weather. V. 4. № 9. S09005. 2006.
<https://doi.org/10.1029/2005SW000207>
- Damon P.E., Jirikovic J.L. The sun as a low-frequency harmonic oscillator // Radiocarbon. V. 34. P. 199–205. 1992.
- Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia, Pennsylvania. USA: Society for industrial and applied mathematics. 369 p. 1992.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>
- Gleissberg W. Evidence for a long solar cycle // The Observatory. V. 65. № 282. P. 123–125. 1944.
- Gleissberg W. The eighty-year solar cycle in auroral frequency numbers // J. Br. Astron. Assoc. V. 75. P. 227–231. 1965.
- Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions of constant shape // SIAM J. Math. V. 15. № 4. P. 723–736. 1984.
<https://doi.org/10.1137/0515056.m>
- Feynman J., Fougere P.F. Eighty-eight year periodicity in solar–terrestrial phenomena confirmed // J. Geophys. Res. V. 89. P. 3023–3027. 1984.
- Feynman J., Gabriel S.B. Period and phase of the 88-year solar cycle and the Maunder minimum: evidence for a chaotic sun / Sun in Time Conference. Tucson, AZ, 6–10 March, 1989. Solar Phys. V. 127. P. 393–403. 1990.
- Feynman J., Ruzmaikin A. The Centennial Gleissberg Cycle and its association with extended minima // J. Geophys. Res. – Space. V. 119. P. 6027–6041. 2014.
<https://doi.org/10.1002/2013JA019478>
- Hathaway D. H. The Solar Cycle // Living Rev. Solar Phys. V. 12. lrsp-2015-4. <http://www.livingreviews.org/lrsp-2015-4>. arXiv:1502.07020. 2015.
<https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4>
- Kolláth Z., Oláh K. Multiple and changing cycles of active stars I. Methods of analysis and application to the solar cycles // Astron. Astrophys. Manuscript no. 11303 c. ESO 2009. arXiv:0904.1747 [astro-ph.SR]. 2009.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811304>
- Komitov B., Sello S., Duchlev P., Dechev M., Penev K., Koleva K. Sub- and Quasi-Centennial Cycles in Solar and Geomagnetic Activity Data Series // Bulgar. Astron. J. V. 25. P. 78–103. 2016.
- Kuklin G.V. Cyclical and secular variations of solar activity / Basic Mechanisms of Solar Activity. Ed. V. Bumba and J. Kleczek. Boston, Mass.: D. Reidel. P. 147–190. 1976.
- Lin Y.C., Fan C.Y., Damon P.E., Wallick E.I. Long term modulation of cosmic ray intensity and solar activity cycles / Proc. 14 th Int. Cosmic Ray Conf. Garching, Germany: Max Planck Institut für extraterrestrische Physik. V. 3. P. 995–999. 1975.
- Ma L.H. Gleissberg cycle of solar activity over the last 7000 years // New Astron. V. 14. P. 1–3. 2009.
<https://doi.org/10.1016/j.newast.2008.04.001>
- Ma L.H., Vaquero J.M. Is the Suess cycle present in historical naked-eye observations of sunspots? // New Astron. V. 14. P. 307–310. 2009.
<https://doi.org/10.1016/j.newast.2008.09.003>
- McCracken K.G., Beer J., Steinhilber F., Abreu J. A phenomenological study of the cosmic ray variations over the past 9400 years, and their implications regarding solar activity and the solar dynamo // Solar Phys. V. 286. № 2. P. 609–627. 2013.
- Ogurtsov M.G., Nagovitsyn Yu.A., Kocharov G.E., Jungner H. Long-period cycles of the sun’s activity recorded in direct solar data and proxies // Solar Phys. V. 211. P. 371–394. 2002.
<https://doi.org/10.1023/A:1022411209257>
- Peristykh A.N., Damon P.E. Persistence of the Gleissberg 88 year cycle over the last 12000 years: evidence from cosmogenic isotope // J. Geophys. Res. – Space. V. 108. № A1.

- P. SSH 1-1-SSH 1-15. 2003.
<https://doi.org/10.1029/2002JA009390>
- *Pipin V.V.* The Gleissberg cycle by a nonlinear a dynamo // *Astron. Astrophys.* V. 346. P. 295–302. 1999.
- *Pipin V.V., Sokoloff D.D., Usoskin I.G.* Variations of the solar cycle profile in a solar dynamo with fluctuating dynamo governing parameters // *Astron. Astrophys.* A26. P. 1–11. 2012.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118733>
- *Ribes E., Merlin P., Ribes J. C., Barthalo R.* Absolute periodicities of the solar diameter, derived from historical and modern time-series // *Ann. Geofisica.* V. 1. P. 321–329. 1989.
- *Solanki S.K., Usoskin I.G., Kromer B., Schüssler M., Beer J.* Unusual activity of the Sun during recent decades compared to the previous 11.000 years // *Nature.* V. 431. P. 1084–1087. 2004.
<https://doi.org/10.1038/nature02995>
- *Scargle J.D.* Wavelet and other multi-resolution methods for time series analysis / *Statistical challenges in modern astronomy II.* Ed. *G.J. Babu and E.D. Feigelson.* N.Y., USA: Springer-Verlag. P. 333–347. 1997.
- *Schove D.J.* The sunspot cycle, 649-BC to AD-2000 // *J. Geophys. Res.* V. 60. P. 127–146. 1955.
- *Silverman S.M.* Secular variation of the aurora for the past 500 years // *Rev. Geophys.* V. 30. № 4. P. 333–351. 1992.
- *Siscoe G.L.* Evidence in the auroral record for secular solar variability // *Rev. Geophys.* V. 1. № 8. P. 647–658. 1980.
- *Sonett C.P.* Sunspot time series: Spectrum from square law modulation of the Hale cycle // *Geophys. Res. Lett.* V. 9. P. 1313–1316. 1982.
- *Svalgaard L.* Up to nine millennia of multimessenger solar activity // <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1810/1810.11952.pdf>. 2018.
- *Tobias S.M.* Grand minima in nonlinear dynamos // *Astron. Astrophys.* V. 307. L21–L24. 1996.
- *Usoskin I.G.* A history of solar activity over millennia // *Living Rev. Sol. Phys.* V. 14. № 3. P. 1–94. 2017.
<https://doi.org/10.1007/s41116-017-0006-9>
- *Usoskin I.G., Solanki S.K., Kovaltsov G.A.* Grand minima and maxima of solar activity: new observational constraints // *Astron. Astrophys.* V. 471. P. 301–309. 2007.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077704>
- *Vecchio A., Lepreti F., Laurenza M., Alberti T., Carbone V.* Connection between solar activity cycles and grand minima generation // *Astron. Astrophys.* V. 599. P. 292–304. A58. 2017.
<https://doi.org/10.1051/0004-361/201629758>
- *Weiss N.O., Cattaneo F. Jones C.A.* Periodic and aperiodic dynamo waves // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* V. 30. № 4. P. 305–341. 1984.
<https://doi.org/10.1080/03091928408219262>
- *Wilson S.G.* Digital modulation and coding. Charlottesville, Virginia, USA: Prentice-Hall, 667 p. ISBN: 1258629917. 1996.