

УДК 530.1

## ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ NLS В НЕОДНОРОДНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ: ЭВОЛЮЦИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

© 2021 г. В. Ю. Белашов<sup>1,\*</sup>, О. А. Харшиладзе<sup>2</sup>, Е. С. Белашова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

<sup>2</sup>Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, г. Тбилиси, Грузия

<sup>3</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия

\*e-mail: vybelashov@yahoo.com

Поступила в редакцию 22.06.2020 г.

После доработки 27.07.2020 г.

Принята к публикации 24.09.2020 г.

Изучена устойчивость и динамика взаимодействия солитоноподобных решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера, описывающего динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (в том числе явления волнового коллапса и самофокусировки волновых пучков) в плазме (включая космическую), а также в нелинейных оптических системах с учетом неоднородности и нестационарности среды распространения. Уравнение используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур, гравитационные волны малой амплитуды на поверхности глубокой невязкой жидкости и др. Следует отметить, что исследуемое уравнение не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, используя ранее развитые нами подходы для других уравнений (обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили и 3-мерное нелинейное уравнение Шредингера с производной нелинейного члена) системы Белашова–Карпмана, можно аналитически исследовать устойчивость возможных решений данного уравнения, а динамику взаимодействия солитонов изучить численно. Именно такой подход реализован в работе. Аналитически получены достаточные условия устойчивости 2- и 3-мерных солитоноподобных решений и численно изучены случаи устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, а также взаимодействие 2- и 3-импульсных структур, приводящее к формированию устойчивых и неустойчивых решений. Полученные результаты могут быть полезны в многочисленных приложениях в физике ионосферной и магнитосферной плазмы и многих других областях физики.

DOI: 10.31857/S0016794021020036

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если в системе ВК (Belashov-Karpman system) [Belashov and Vladimirov, 2005; Belashov et al., 2018a]

$$\partial_t u + \hat{A}(t, u)u = f, \quad f = \sigma \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx + f', \quad (1)$$

$$\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2$$

оператор имеет вид  $\hat{A}(t, u) = i[\gamma|u|^2 - \beta\partial_x^2] + \alpha/2$ , она представляет собой 3-мерное (3D) обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (3-GNLS) [Belashov et al., 2018b]:

$$\partial_t u + i\gamma|u|^2 u - i\beta\partial_x^2 u + (\alpha/2)u = \sigma \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx + f', \quad (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(t, x, y, z)$ ,  $f' = f'(t, x, y, z)$  и  $(\alpha/2)u$  описывает диссипативные эффекты, а  $u$  есть огибающая волнового пакета (импульса). Уравнение 3-GNLS (2) описывает динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (волновых пакетов) в средах с дисперсией и имеет многочисленные важные приложения в физике плазмы (например, описывает распространение ленгмюровских волн в горячей плазме), нелинейной оптике (распространение световых импульсов в кристаллах, оптоволокне и плоских оптических волноводах), оно описывает, в частности, такие явления, как турбулентность, волновой коллапс и оптическая самофокусировка. Уравнение (2) используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур (в частности, обыч-

ное уравнение NLS есть упрощенная 1D форма уравнения Гинзбурга–Ландау [Гинзбург и Ландау, 1950], впервые введенного ими в 1950 г. при описании сверхпроводимости), гравитационные волны малой амплитуды на поверхности глубокой невязкой жидкости и др. Отметим, что 3D-уравнение (2) не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, с использованием подходов, развитых в работах [Белашов, 1991, 1999] для других уравнений системы ВК (обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили – уравнение ГКР, когда в системе (1)  $\hat{A}(t, u) = \alpha u \partial_x - \partial_x^2(v - \beta \partial_x - \gamma \partial_x^3)$ , и 3-мерное нелинейное уравнение Шредингера с производной нелинейного члена – 3-DNLS, если оператор в (1)  $\hat{A}(t, u) = 3s|p|^2 u^2 \partial_x - \partial_x^2(i\lambda + v)$ ), мы можем исследовать устойчивость возможных решений уравнения 3-GNLS. При этом динамике взаимодействия солитоноподобных структур уравнения GNLS можно изучить численно с использованием методов, развитых Belashov and Vladimirov [2005]. Решение такой задачи является целью настоящей работы.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Запишем уравнение (2) с  $\alpha = 0$  (уравнение 3-NLS) в гамильтоновой форме:

$$\partial_t u = \partial_x (\delta H / \delta u), \quad (3)$$

где гамильтониан, имеющий смысл энергии системы,  $H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\gamma}{2} |u|^4 + \beta u u^* \partial_x \varphi + \frac{1}{2} \sigma (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 \right] dr$ ,  $\partial_x^2 w = u$ ,  $\varphi = \arg(u)$ .

Используя метод анализа трансформационных свойств гамильтониана, подробно изложенный для уравнений системы ВК в работах [Белашов, 1991, 1999; Belashov and Vladimirov, 2005] и впервые примененный для существенно более простых случаев “классического” уравнения Кадомцева–Петвиашвили в работе [Кузнецов и Муссер, 1986] и уравнения NLS в работе [Захаров и Кузнецов, 2012], исследуем устойчивость 2D- и 3D-решений уравнения (2). При этом задача для уравнения (3) формулируется в виде вариационного уравнения  $\delta(H + v P_x) = 0$ ,  $P_x = \frac{1}{2} \int u^2 dr$ , смысл которого состоит в том, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана  $H$  при фиксированном значении проекции импульса  $P_x$ . В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости, в динамической системе точки, которые соответствуют минимуму или максимуму гамильтониана  $H$ , являются абсо-

лютно устойчивыми. Если же экстремум локальный, ему будут соответствовать локально устойчивые решения.

Рассмотрим деформации  $H$ , сохраняющие проекцию импульса  $P_x$ :

$$u(x, r_{\perp}) \rightarrow \zeta^{-1/2} \eta^{-1} u(x/\zeta, r_{\perp}/\eta), \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}.$$

Гамильтониан примет вид  $H(\zeta, \eta) = a \zeta^{-1} \eta^{-2} + b \zeta^{-1} - c \zeta^2 \eta^{-2}$  с коэффициентами

$$a = (\gamma/2) \int |u|^4 dr, \quad b = \beta \int u u^* \partial_x \varphi dr, \quad (4)$$

$$c = (\sigma/2) \int (\nabla_{\perp} \partial_x w)^2 dr.$$

Из необходимых условий экстремума  $\partial_{\zeta} H = 0$ ,  $\partial_{\eta} H = 0$  сразу же найдем его координаты:

$$\zeta_0 = -ac^{-1}, \quad \eta_0 = [-ab^{-1}(1 + a^2 c^{-2})]^{1/2},$$

где  $b < 0$ , если  $\eta \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , поскольку  $a > 0$ ,  $c > 0$  по определению, и  $b > 0$ , если  $\eta \in \mathbb{C}$ . Достаточные условия минимума в точке  $(\zeta_i, \eta_j)$ :

$$\left| \begin{array}{cc} \partial_{\zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\zeta \eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) \\ \partial_{\eta \zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\eta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) \end{array} \right| > 0,$$

$$\partial_{\zeta}^2 H(\zeta_i, \eta_j) > 0.$$

Решая данную систему неравенств, получим, что для волн в случае  $b < 0$  (положительная нелинейность)  $a/c < d = (2\sqrt{2})^{-1} \sqrt{13 + \sqrt{185}}$ , откуда следует, что  $H > -3bd/(1 + 2d^2)$ , то есть гамильтониан ограничен снизу. При  $b > 0$  (отрицательная нелинейность): замена  $b \rightarrow -b$  эквивалентна замене  $y \rightarrow -iy$ ,  $z \rightarrow -iz$  и  $H < -3bd/(1 + 2d^2)$ , то есть гамильтониан снизу не ограничен (ограничен сверху).

Итак, мы доказали возможность существования устойчивых 3D-решений в модели 3-NLS и получили условия их устойчивости, то есть определили области значений коэффициентов уравнения (переменных во времени и пространстве характеристик среды), когда 3D-солитоны будут устойчивыми.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ И ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОЛИТОНОВ GNLS

Численное исследование эволюции и динамики взаимодействия солитоноподобных структур уравнения 3-GNLS проводилось нами с использованием методов, разработанных и детально описанных в работе [Belashov and Vladimirov, 2005]. Результаты моделирования для общего случая неоднородной и нестационарной среды подтверждают сделанные на основе аналитического рассмотрения проблемы заключения. В качестве

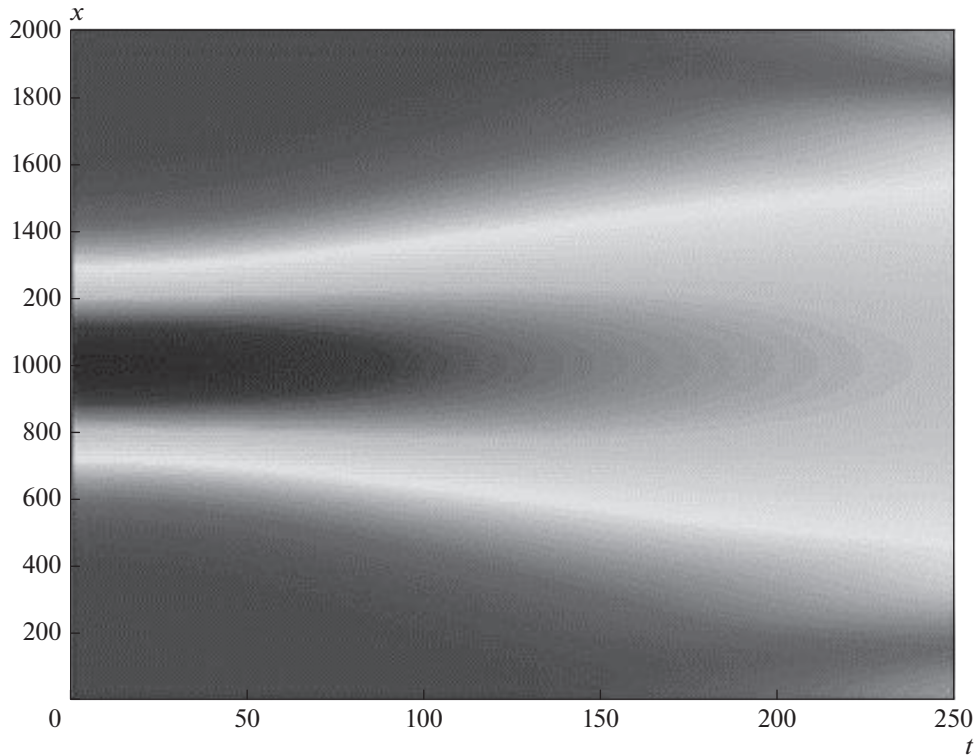


Рис. 1. Эволюция гауссова импульса огибающей при  $A = 2$ ,  $l = 2$ ;  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0$ .

иллюстрации на рисунках 1 и 2 представлены результаты, полученные при  $\sigma = 0$  (1D-случай) для начальных условий в виде солитоноподобного импульса огибающей:

$$u(x, 0) = A \exp(-x^2/l),$$

$$u(x, 0) = A \exp[-(x - 5)^2/l] + A \exp[-(x + 5)^2/l],$$

соответственно, в простейшем случае уравнения NLS с  $\beta$ ,  $\gamma = \text{const}$  (стационарная среда);  $\alpha, f' = 0$  при отрицательной нелинейности,  $\beta > 0$ . При этом  $b > 0$  и гамильтониан  $H > 3bd/(1 + 2d^2)$ , а значит условие устойчивости для отрицательной нелинейности,  $H < 3bd/(1 + 2d^2)$ , не выполняется, и, как видно из рисунков, мы наблюдаем рассеяние импульсов огибающей со временем.

Примеры, когда коэффициент  $\gamma \neq 0$  и условие устойчивости для положительной нелинейности  $H > 3bd/(1 + 2d^2) > 0$  не выполняется и когда условие для отрицательной нелинейности  $H < 0 < -3bd/(1 + 2d^2)$  удовлетворено, показаны соответственно на рисунках 3 и 4.

В первом случае мы наблюдаем рассеяние импульса огибающей со временем, а во втором имеет место стабилизация решения и формирование солитона из начального импульса.

На рисунке 5 показан результат для того же, как и на рис. 4, случая отрицательной нелинейности [ $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$  и  $a, b < 0$  в формулах (4)], однако

здесь имеет место случай сильной отрицательной нелинейности, когда  $\gamma = -1$  и наблюдается появление квазиустойчивых мощных солитоноподобных пульсаций типа бризеров.

В численных экспериментах для уравнения GNLS (2) с  $\sigma = 0$  при  $\beta, \gamma = \varphi(t)$ ;  $\alpha, f' = 0$  нами было установлено, что квазиустойчивая эволюция начального гауссова импульса может наблюдаться, когда в нестационарной среде с отрицательной нелинейностью условие устойчивости  $H < -3bd/(1 + 2d^2)$  удовлетворено. В этом случае можно наблюдать пульсации со сдвигом импульса в процессе его эволюции в  $x$ -направлении (рис. 6).

На рисунке 7 представлены два примера результатов эволюции гауссова импульса в нестационарной среде при отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости  $H < -3bd/(1 + 2d^2)$  выполняется. В результате эволюции при этом наблюдается возникновение из начального уединенного импульса мощных устойчивых пульсаций типа бризеров.

Пример взаимодействия солитоноподобных начальных импульсов вида

$$u(x, 0) = A[\text{sch}(x) + \text{sch}(x - s/2) + \text{sch}(x + s/2)], \quad (5)$$

$$u(x, 0) = A[\text{sch}(x - s/2) + \text{sch}(x + s/2)]$$

при отрицательной нелинейности в рамках модели GNLS приведен на рис. 8, 9, соответственно.

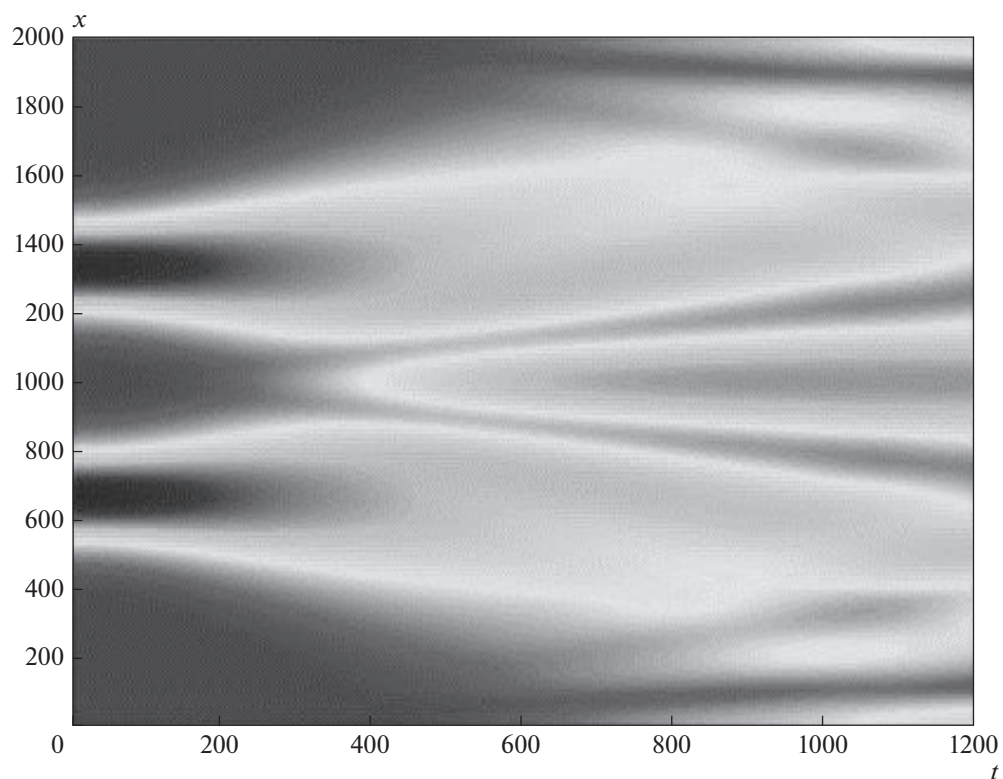


Рис. 2. Эволюция гауссова 2-импульсного возмущения огибающей при  $A = 1$ ,  $l = 4$ ;  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0$ .

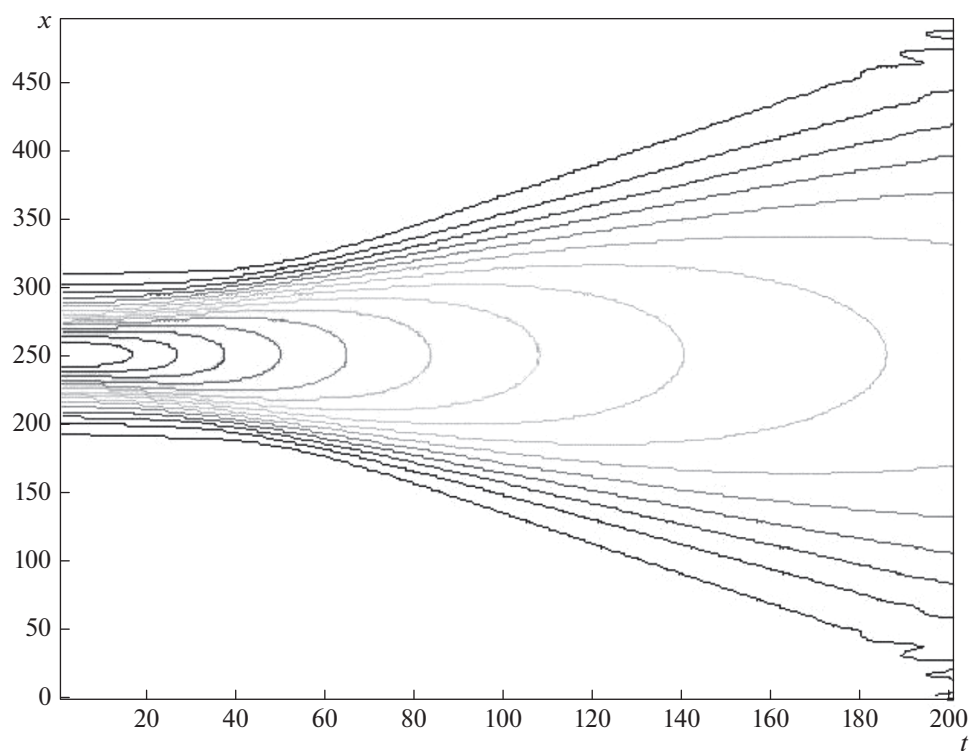


Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей при  $A = 1$ ,  $l = 4$ ;  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$  (положительная нелинейность).

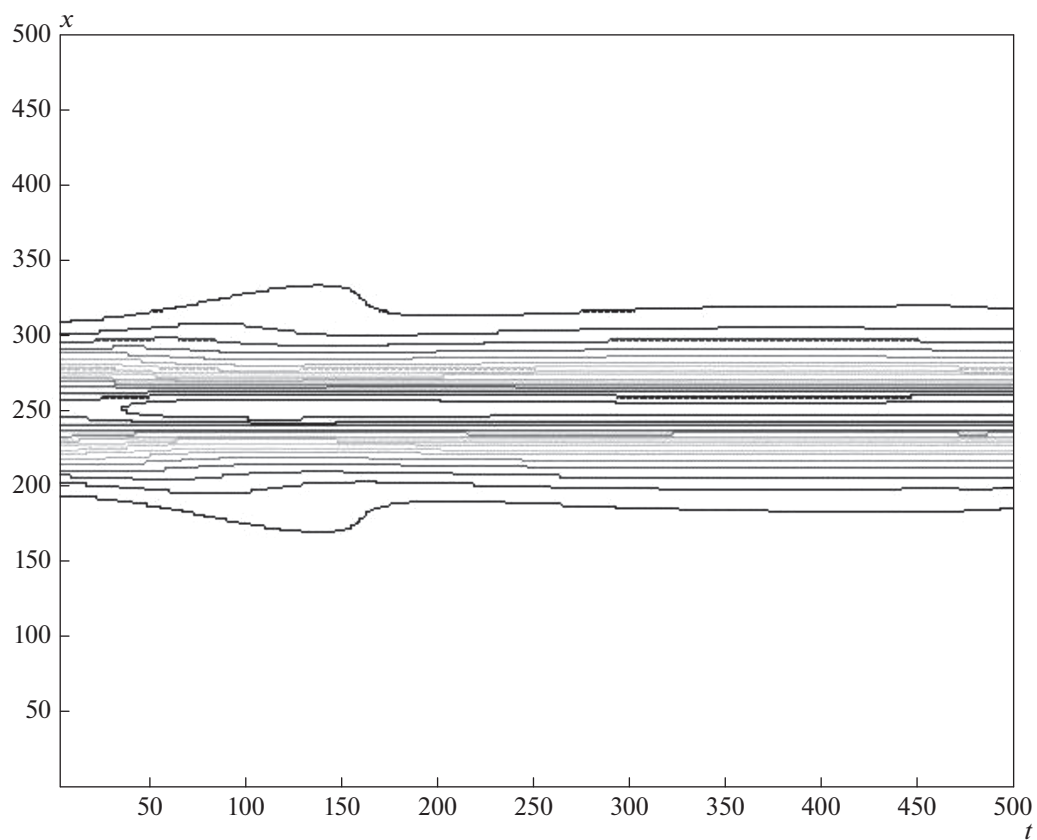


Рис. 4. Эволюция гауссова импульса огибающей при  $A = 1$ ,  $l = 4$ ;  $\beta < 0$ ,  $\gamma = -0.5 < 0$  (отрицательная нелинейность).

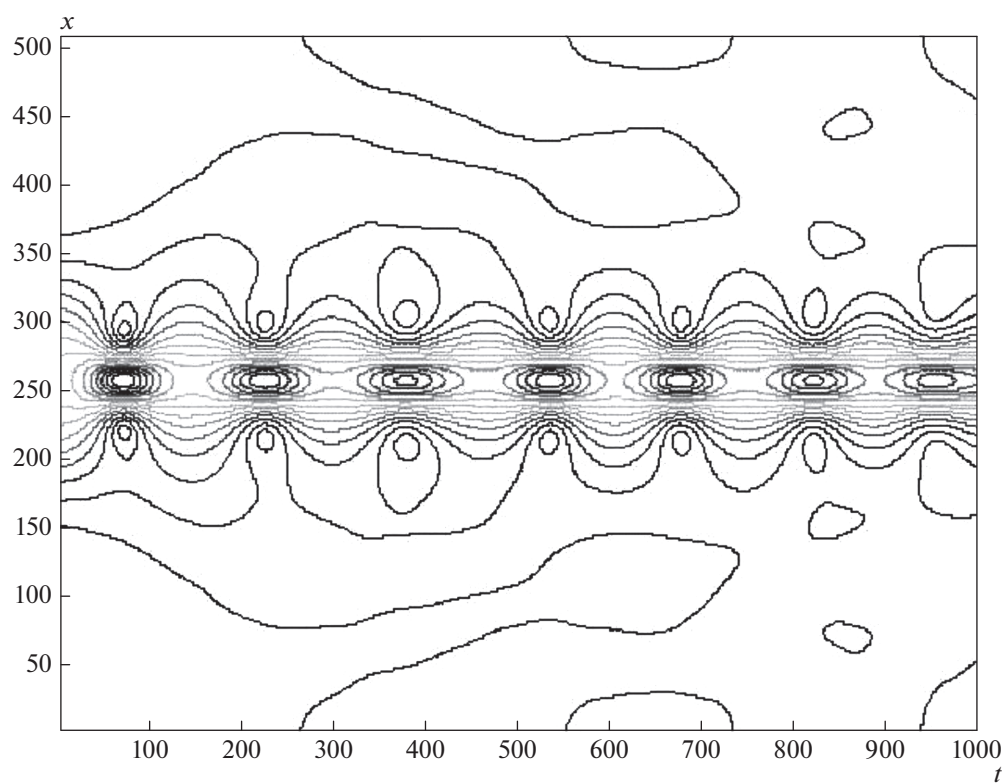


Рис. 5. Эволюция гауссова импульса огибающей при  $A = 1$ ,  $l = 4$ ;  $\beta < 0$ ,  $\gamma = -1$ .



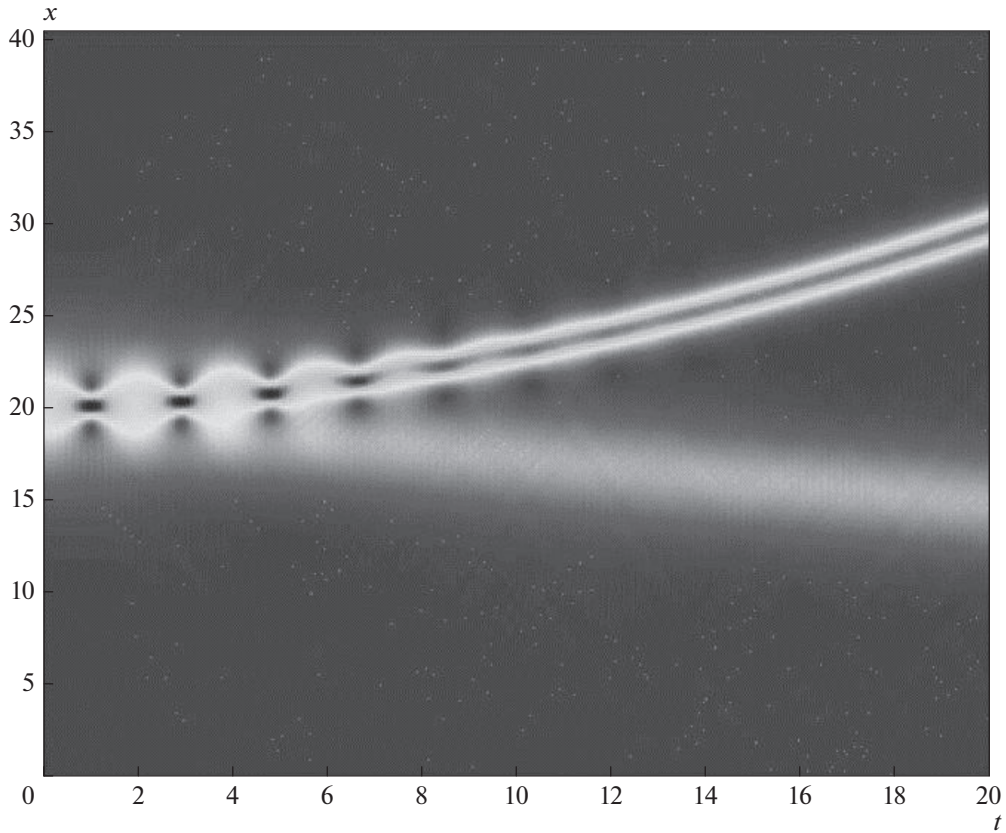


Рис. 6. Эволюция гауссова импульса огибающей при  $A = 1$ ,  $l = 4$ ;  $\beta(t) = -0.5(1 + \sin 0.1\pi t)$ ,  $\gamma = -1$ .

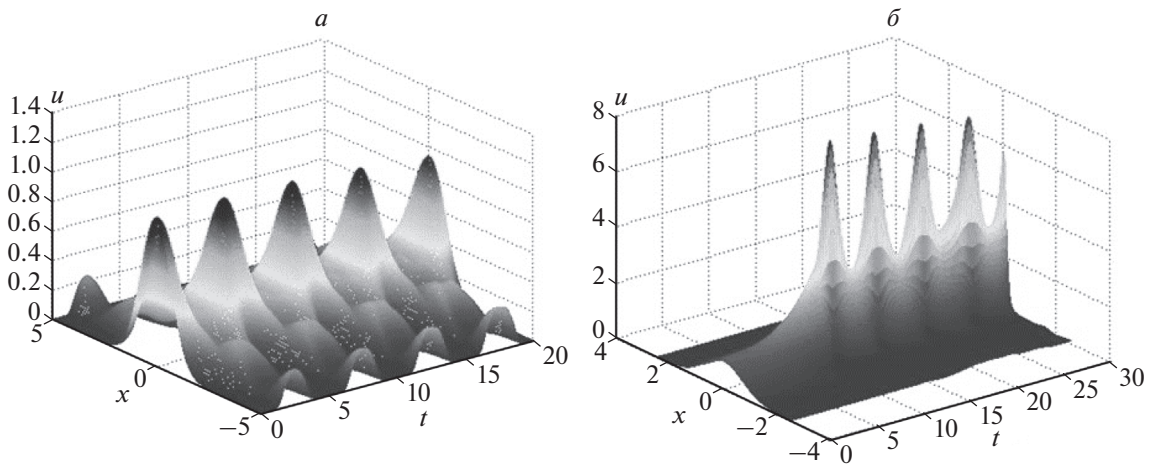
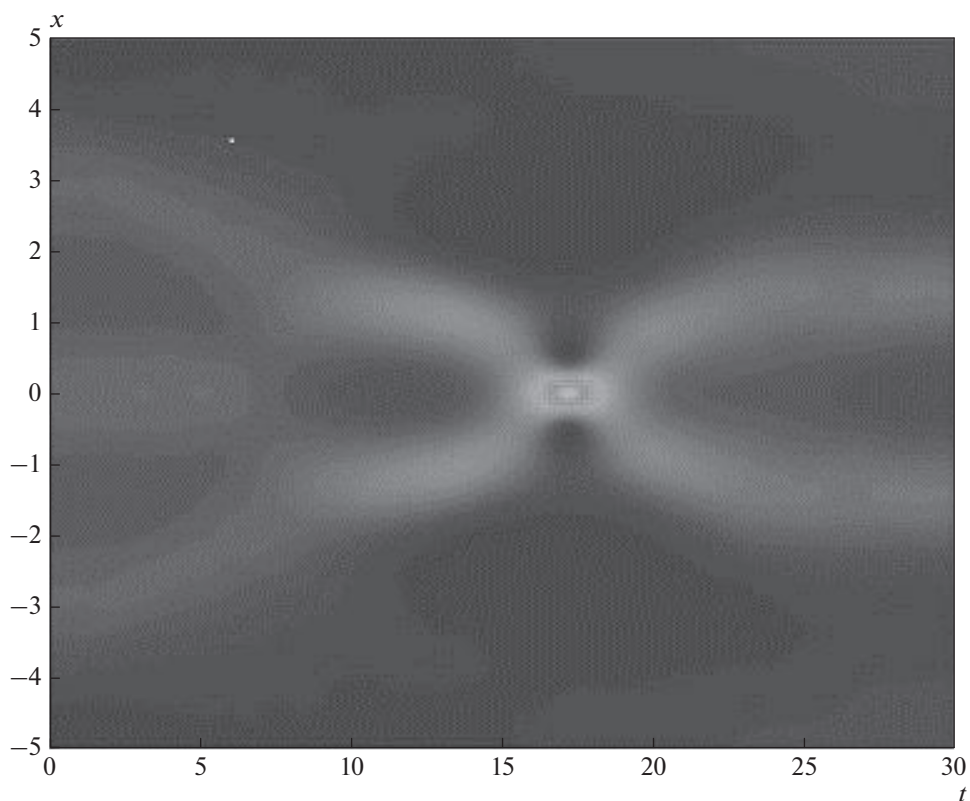


Рис. 7. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при  $\alpha, f = 0$ : (а)  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = -1 + 0.01 \sin 2\pi t$ ; (б)  $\gamma = -1$ ,  $\beta(t) = -0.5$  при  $t \leq 5$  и  $\beta(t) = 0.5(1 + 0.2 \sin 2\pi t)$  при  $t > 5$ ; случаи отрицательной нелинейности.

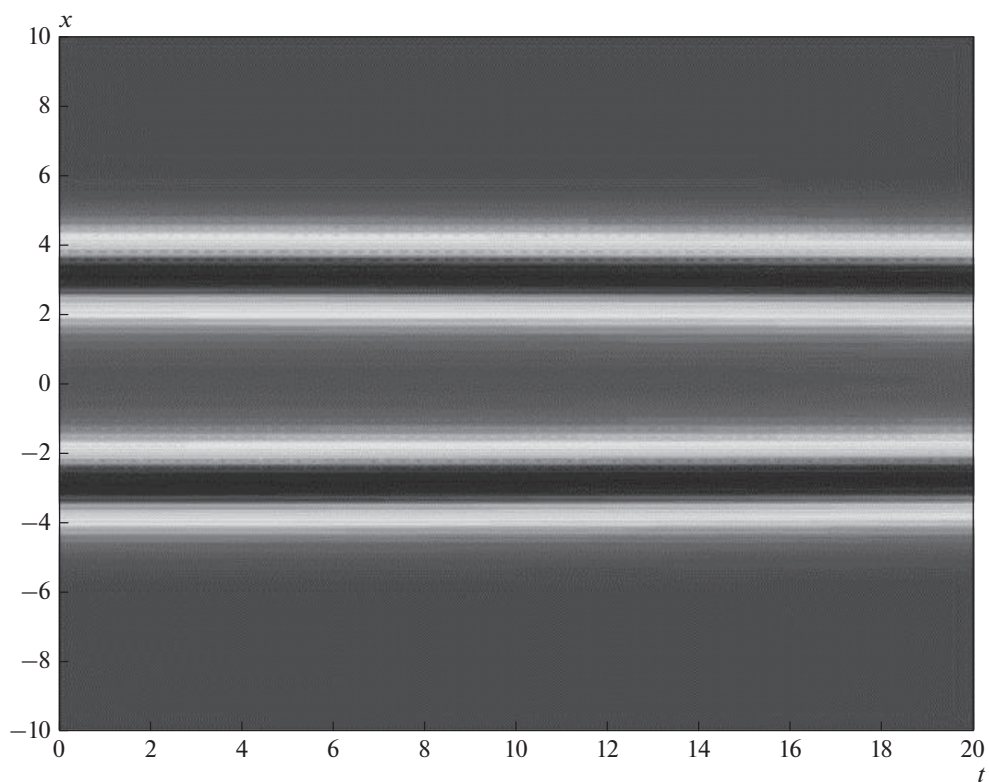
В первом случае условие устойчивости не выполняется, и мы наблюдаем на первом этапе возникновение одного мощного импульса из 3-импульсного начального возмущения и далее, со временем, его распад на два импульса малой амплитуды. Во втором случае, условие устойчивости выпол-

нено, и имеет место устойчивая эволюция 2-импульсного возмущения.

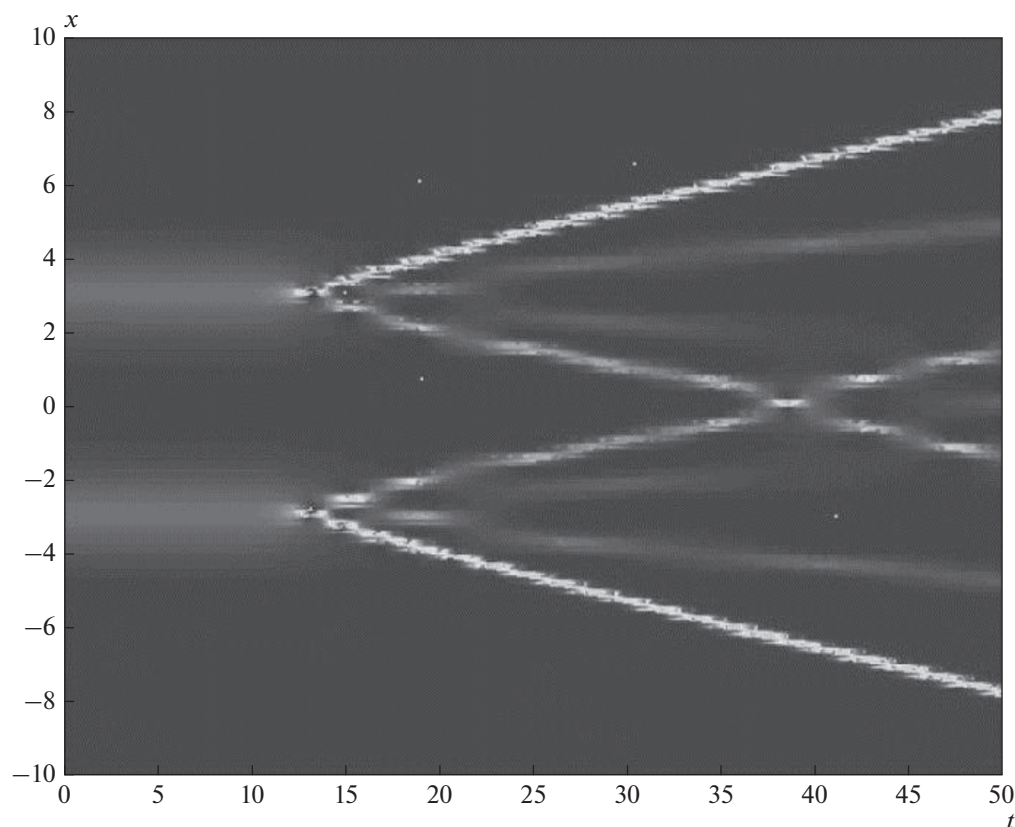
Интересно отметить, что, когда в некоторый момент времени поле становится нестационарным, устойчивость многоимпульсного возмущения может нарушаться и процесс эволюции пере-



**Рис. 8.** Взаимодействие трех импульсов GNLS (стационарная среда) при  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0.25$ ; случай слабой отрицательной нелинейности.



**Рис. 9.** Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS (стационарная среда) при  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0.05$ ; случай отрицательной нелинейности.



**Рис. 10.** Эволюция 2-импульсного возмущения в нестационарной среде при  $\gamma = -1$ ,  $\beta(t) = 0.5$  для  $t \leq 15$  и  $\beta(t) = 0.5[1 + 0.2\sin(2\pi t/15)]$  для  $t > 15$ ; отрицательная нелинейность.

ходит в неустойчивый с малыми пульсациями. Такой случай можно видеть на рисунке 10 (ср. со случаем, представленным на рис. 9).

В численных экспериментах было также установлено, что при слабой отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости выполняется, переход от устойчивой эволюции к режиму устойчивых пульсаций (бризеров) происходит при уменьшении начального расстояния  $s$  в начальных условиях (5) между импульсами [Belashov et al., 2019a; Белашов и др., 2019].

Детальному численному исследованию задач эволюции и взаимодействия 2D- и 3D-импульсов в модели 3-GNLS посвящены работы [Belashov et al., 2018b, 2019a, b; Belashov and Kharshiladze, 2019; Белашов и др., 2019, 2020].

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты, отметим следующее.

1. Мы обсудили проблему эволюции и динамики неоднородных решений обобщенного уравнения NLS (уравнения GNLS), как частного случая системы ВК, а именно: устойчивость 3D-решений уравнения 3-GNLS и динамику устойчивых и

неустойчивых решений уравнения NLS в стационарных и нестационарных средах.

2. В работе аналитически получены условия, разделяющие классы устойчивых и неустойчивых солитоноподобных решений уравнения GNLS, и найдены достаточные условия устойчивости одномерных решений.

3. Показано, что даже в простейшем 1D-случае уравнение GNLS имеет широкий класс устойчивых или квазиустойчивых решений типа солитонов и бризеров, а также неустойчивые пульсирующие решения, рассеивающиеся со временем.

4. Полученные аналитические результаты подтверждены численным исследованием случаев устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, а также взаимодействия 2- и 3-импульсных структур, приводящего к формированию устойчивых и неустойчивых решений.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых



научно-образовательных центров. Работа была поддержана Национальным научным фондом Грузии им. Шота Руставели (SRNF) (грант № FR17 252).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Белашов В.Ю.* Об устойчивости двумерных и трехмерных солитонов в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. Т. 320. № 1. С. 85–89. 1991.
- *Белашов В.Ю.* Проблема устойчивости трехмерных альфвеновских волн, распространяющихся в замагниченной плазме // Докл. АН. Т. 366. № 4. С. 465–467. 1999.
- *Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А., Рогавя Дж.Л.* Взаимодействие многомерных NLS-солитонов в неоднородной и нестационарной среде // Тр. XXVI Всеросс. откр. науч. конф. “Распространение радиоволн”, Казань, 1–6 июля 2019 г.: в 2 т. Казань: Изд-во Казан. ун-та. Т. 2. С. 491–494. 2019.
- *Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А., Белашова Е.С.* Динамика солитонов обобщенного уравнения NLS в неоднородной и нестационарной среде: эволюция и взаимодействие // Пятнадцатая ежегодн. конф. “Физика плазмы в солнечной системе”, 10–14 февраля 2020 г. ИКИ РАН. М.: ИКИ РАН. С. 253. 2020.
- *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. Т. 20. С. 1064–1967. 1950.
- *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // УФН. Т. 182. С. 569–592. 2012.
- *Кузнецов Е.А., Мушер С.Л.* Влияние коллапса звуковых волн на структуру бесстолкновительных ударных волн в замагниченной плазме // ЖЭТФ. Т. 91. Вып. 5(11). С. 1605–1619. 1986.
- *Belashov V.Yu., Vladimirov S.V.* Solitary waves in dispersive complex media. Theory, simulation, applications. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag GmbH & Co. KG, 303 p. 2005.
- *Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A.* Problem of stability of the multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma // Adv. Space Res. V. 62. P. 65–70. 2018a.
- *Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L.* Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem // J. Astrophys. Aerospace Tech. V. 6. P. 38. 2018b.
- *Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L.* Interaction of multidimensional NLS solitons in nonuniform and nonstationary medium // 2019 Russian Open Conference on Radio Wave Propagation (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University. Proc. IEEE Xplore Digital Library. P. 535–538. 2019a.
- *Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A.* The BK system: stability and interaction dynamics of the GKP and GNLS solitons // J. Lasers, Optics & Photonics. V. 6. P. 20–21. 2019b.
- *Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A.* Numerical study of evolution and collisional interaction of the GNLS solitons in nonstationary and non-uniform media // J. Lasers, Optics & Photonics. V. 6. P. 33–34. 2019.