ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, 2019, том 59, № 6, с. 801–809

УДК 537.67;515.164.17;05-422;01-105

КЛАССИФИКАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВО ВНЕШНОСТИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА. ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

© 2019 г. П. М. Ахметьев[1, *], А. В. Петров[2, **]

[1]Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (ИЗМИРАН), г. Москва, г. Троицк, Россия

[2]Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова (МИЭМ НИУ ВШЭ), г. Москва, Россия

*e-mail: pmakhmet@mail.ru

**e-mail: alexandr.petrov.357@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.
После доработки 26.04.2019 г.
Принята к публикации 23.05.2019 г.

Предметом исследования являются магнитные поля внутреннего источника в недрах Земли, наблюдаемые на поверхности планеты или с орбиты спутника. Мы исследуем пространство всех гармонических функций g во внешней шаровой области, которые задаются в виде рядов в стандартном базисе. Функции убывают на бесконечности, и на граничной сфере их градиенты ортогональны заданному полю направлений, причем поле направлений само задается градиентом той или иной базисной функции f. Результаты могут быть использованы при решении общей задачи, когда не предполагается, что функции f и g на граничной сфере зависят от двух сферических координат. Конкретные вычисления получены лишь в предположении, что ни g, ни f не зависят от координаты долготы. Уточняются известные результаты, когда функции f является дипольной или квадрупольной гармоникой, и получен новый результат, если f – октупольная гармоника.

DOI: 10.1134/S0016794019060026

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитное поле, которое было измерено на поверхности Земли или на орбите спутника, является суперпозицией вкладов различных источников. В данной работе мы рассматриваем случай полей внутреннего источника.

В 1832 г. Гаусс открыл метод измерения магнитного поля, однако на практике часто удается измерять исключительно наклонение (угол отклонения вектора поля локальной горизонтали), а также склонение (направление горизонтальной составляющей). В других случаях удается измерить только модуль вектора магнитного поля, но не удается проводить полное измерение. Ряд современных работ посвящены проблеме восстановления поля по известным данным его направления на поверхности [Kaiser, 2010, 2012; Kaiser and Neudert, 2010; Khokhlov et al., 2006; Khokhlov, 2013; Akhmetev, 2013] (Задача А). Проблема восстановления поля по направлениям возникает при интерпретации палеомагнитных записей данных: информация о направлениях более надежна, чем информация об интенсивности. Другая часть посвящена проблеме восстановления поля во внешней области по значению его модуля на сферической граничной поверхности [Backus, 1970; Khokhlov et al., 1997, 1999] (Задача Б). Для современных измерений проблема связана с простотой измерения модуля и со сложностью измерения направлений поля.

В перечисленных работах достигнут значительный успех в решении проблемы. Тем не менее, математический аппарат в 3D Задаче А сложен (уравнения в бесконечномерном пространстве неопределенных коэффициентов), и общие условия существования и единственности решений не ясны. В Задаче Б был получен красивый и прозрачный результат, он формулируется в терминах дополнительных данных о магнитном экваторе (о кривой точек с нулевой вертикальной компонентой поля на сферической поверхности внешней шаровой области). Тем не менее, даже при наличии полных сведений о магнитном экваторе проблема не решена, так как необходимо сформулировать дополнительные условия на потенциал во внешней области, что показано в работах [Khokhlov et al., 1997, 1999; Khokhlov, 2013]. Эти условия формулируются так, что часть внешних потенциальных магнитных полей с конечной магнитной энергией им не удовлетворяют.

Теперь представим математическую формулировку задачи классификации, как в работах [Backus, 1970; Ахметьев и Хохлов, 2004]. Положение точки M в сферической системе координат задается тройкой чисел (r, θ, φ), где r – расстояние от начала координат до точки M; φ – угол, изменяющийся в пределах $[0, 2\pi)$, образованный проекцией радиус-вектора точки M на плоскость $(0xy)$ с положительным направлением оси $(0x)$, между положительным направлением оси $(0z)$ и радиус-вектором точки.

Пусть в этой системе координат заданы гармонические функции $f(r, \theta, \varphi)$, $g(r, \theta, \varphi)$ с областями определения во внешней шаровой области $r \geq 1$. Функции f, g ограничены на своей области определения и продолжаются внутрь в некоторую большую внешнюю шаровую окрестность шара меньшего радиуса. Следующее определение продиктовано результатами [Backus, 1970], которые служат основой работы. Две такие функции (f, g) образуют пару Бакуса, если в каждой точке сферы $r = 1$ выполнено условие

$$(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)) = 0. \tag{1}$$

Задача классификации всех функций g при заданной f, удовлетворяющих условию (1) значительно проще Задач А, Б. Мы считаем, что 3D Задача (1) допускает полное решение, это сформулировано в заключении в виде гипотезы. С другой стороны, считается понятным и известным, что задача напрямую связана с Задачами А, Б. Поэтому полное решение задачи (1) может привести к прогрессу, если речь идет высокоточных моделях магнитного поля. В Задаче А, в частности, возможна переформулировка результатов для конфигурационных пространств магнитных измерений (с учетом парных и тройных пространственных корреляций наблюдаемого магнитного поля). В Задаче Б возможно уточнение погрешности в измерениях магнитного экватора для потенциальных полей сложной структуры.

Подход к задаче в данной работе может быть использован для решения задач восстановления магнитного поля Солнца. По постановке задача восстановления магнитного поля Солнца отличается, поскольку речь в ней идет не о потенциальных магнитных полях, а о бессиловых магнитных полях. К тому же весьма желательно в условиях магнитостатического равновесия, по меньшей мере, учитывать, что плазма разрежается с увеличением радиуса.

Рассмотрим специальный случай 3D задачи (1), при упрощающем предположении

$$f = f(\theta). \tag{2}$$

В общем случае должно быть

$$f = f(\theta, \varphi) = P_n^m \cos(\theta) \sin(m\varphi). \tag{3}$$

В задаче (1), (2) также предположим, что $g = g(\theta)$ не зависит от долготы.

Главная трудность в задаче (1), (3) связана с двойной рекурсией по n и m при нахождении коэффициентов базиса для функции g. Аналог этой задачи рассмотрен в 2D-задаче, где рекурсии по n нет. В работе взята гармоника, добавлено возмущение и показано, что при рекурсии по m не возникает бесконечных рядов. Это означает, что и для 3D-задачи в главном слагаемом рекурсии нет зависимости рядов от m. Результаты решения 2D-задачи значительно помогут при решении 3D-задачи (1).

2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДИПОЛЯ, КВАДРУПОЛЯ И ОКТУПОЛЯ

Прежде чем рассмотреть новый результат, когда f является октупольной гармоникой, объясним случай дипольной и квадрупольной гармоник. Методы решения задачи для дипольной и квадрупольной гармоник идентичные, однако результаты существенно различны. Зная, что скалярное произведение градиентов двух гармонических функций равно 0, ряда. В итоге вычислим неизвестную функцию g в виде ряда коэффициентов, причем количество свободных коэффициентов зависит от порядка выбранной гармоники f.

2.1. Диполь

Предположим, что мы рассматриваем пары Бакуса, для которых функция f имеет простой вид и задана по формуле:

$$f = r^{-2} P_2^0(\theta), \tag{4}$$

где $P_1^0(\theta) = \cos(\theta)$ полином Лежандра порядка $n = 1$ с модой $m = 0$.

Предположим, что вторая функция g задана в виде ряда, коэффициенты a_n которого следует искать:

$$g(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-n-1} P_n^0(\theta). \tag{5}$$

Пусть для простоты $a_0 = 1$, первое слагаемое $r^{-1} P_0^0(\theta)$ имеет порядок $n = 0$ с модой $m = 0$. Такой случай, правда, не соответствует потенциалу магнитного поля, но он вычислительно самый простой и требуется для цели классификации решений. Из результатов [Ахметьев и Хохлов, 2004] вытекает следующая формула.

Грубая формула для линейной рекурсии дипольной гармоники.

Справедливо равенство: $a_{2n+1} = 0$; $a_{2n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + O(n^{-1})$,

где O — символ эквивалентности для бесконечно малых последовательностей.

Уточним этот результат, докажем следующую формулу.

Точная формула для линейной рекурсии дипольной гармоники.

Значения коэффициентов с четными номерами $n = 2k$, $n \geq 0$ *связаны соотношением:*

$$a_n = -3\frac{4n^2 + 13n + 3}{4n^2 + 11n + 6}a_{n+2}.$$

Замечание 1. *Важно заметить, что при* $n = 0$ *добавочное слагаемое к* a_2 *не является малым, но не приводит к резонансу в рекурсивной последовательности коэффициентов. С другой стороны, решения, построенные по главному приближению из грубой формулы для диполя и точное решение, построенное в точной формуле для диполя, на порядок различаются. Ниже в грубой формуле для квадруполя, которая имеет физический смысл, мы также проанализировали это различие.*

Доказательство грубой формулы для диполя.

Для произвольных функций f, g на пересечении областей их определения справедливо соотношение:

$$\Delta(f, g) = 2(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)) + \Delta(f) + \Delta(g).$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, который определен по формуле:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2}.$$

Если функции f, g гармонические, то равенство упрощается:

$$\Delta(f, g) = 2(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)),$$

поскольку $\Delta(f) = 0$, $\Delta(g) = 0$. Поэтому условие (1) переписывается, с учетом равенства (5) в следующей форме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta(r^{-n-3}\cos(\theta)P_n^0(\theta)). \tag{6}$$

Мы будем вычислять значение оператора Лапласа в сферической системе координат. Известно, что

$$\Delta(\rho(r)h(\theta,\varphi)) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\varphi}(h(\theta,\varphi))\right], \tag{7}$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — некоторый оператор второго порядка по переменным θ и φ, явная формула которого нам не понадобится.

Известно, что

$$\cos(\theta)P_n^0(\theta) = \frac{1}{2}P_{n-1}^0(\theta) + \frac{1}{2}P_{n+1}^0(\theta) + O(n^{-1}), \tag{8}$$

если $n \geq 2$.

Для $n = 1$

$$\cos(\theta)P_1^0(\theta) = \frac{1}{2}P_2^0(\theta). \tag{9}$$

Для $n = 0$

$$\cos(\theta)P_0^0(\theta) = P_1^0(\theta). \tag{10}$$

Подставим (8) в (6). Получится уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Delta(r^{-n-3}(P_{n-1}^0(\theta) + P_{n+1}^0(\theta))) = 0, \tag{11}$$

причем считаем, что слагаемыми порядка $O(n^{-1})$ пренебрегаем и, кроме того, если $n = 0$ или $n = 1$, пользуемся уравнениями (9), (10).

Сгруппируем слагаемые, содержащие гармоники $P_{2i}^0(\theta)$ одинакового порядка $2i = n + 1$. Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\sin(\varphi)[a_n r^{-n-3}P_{n+1}^0(\theta) + a_{n+2}r^{-n-5}P_{n+1}^0(\theta)] = 0.$$

Значения оператора Лапласа, примененного ко всему ряду, очевидно, эквивалентно равенству нулю каждого слагаемого этого ряда. Поэтому получим бесконечную цепочку уравнений:

$$a_n\Delta r^{-n-3}P_{n+1}^0(\theta)\sin(\varphi) + a_{n+2}\Delta r^{-n-5}P_{n+1}^0(\theta) = 0,$$

которая должна выполняться при всех четных значениях $n = 0, 1....$ При нечетных такая ненулевая цепочка не существует, иначе первое уравнение (9) не выполняется. Вычислим значение оператора Лапласа при помощи (7). Соотношение будет использовано лишь при $r = 1$, поэтому получим:

$$\begin{gathered}(a_n(-n-3)(-n-2) + a_{n+2}(-n-5)(-n-4))P_{n+1}^0(\theta) + \\ + (a_n + a_{n+2})\Delta_{\theta,\varphi}(P_{n+1}^0(\theta)) = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Воспользуемся равенством:

$$\begin{gathered}(a_n(-n-2)(-n-1) + a_{n+2}(-n-2)(-n-1))P_{n+1}^0(\theta) + \\ + (a_n + a_{n+2})\Delta_{\theta,\varphi}(P_{n+1}^0(\theta)) = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

которое получается применением оператора Лапласа к гармонической функции

$$(a_n r^{-n-2}P_{n+1}^0(\theta) + a_{n+2}r^{-n-2}P_{n+1}^0(\theta)).$$

Вычтем (13) из (12). При этом вновь пренебрегаем слагаемыми порядка $O(n^{-1})$, получим равенство:

$$2na_n + 6na_{n+2} = 0.$$

Это равенство запишем в более удобной форме:

$$a_n = (-3)a_{n+2}.$$

Грубая формула для диполя доказана.

Доказательство точной формулы для диполя

Для того, чтобы найти остаточное слагаемое, сравним уравнения (10) и (11) из работы [Ахметьев и Хохлов, 2004] при $m = 0$:

$$\cos(\theta)P_n^0(\cos(\theta)) =$$
$$= \frac{n}{2n+1}P_{n-1}^0(\cos(\theta)) + \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}^0(\cos(\theta)),$$
$$\cos(\theta)P_n^0(\cos(\theta)) =$$
$$= \frac{1}{2}(P_{n-1}^0(\cos(\theta)) + P_{n+1}^0(\cos(\theta))) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Разница между этими уравнениями даст значение $O\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}(P_{n-1}^0(\cos(\theta)) + P_{n+1}^0(\cos(\theta))).$$

Подставив остаточный коэффициент в уравнения (12), (13), получим:

$$\left(a_n(-n-3)(-n-2)\left(1+\frac{1}{4n+2}\right) + a_{n+2}(-n-5)\times\right.$$
$$\left.\times(-n-4)\left(1-\frac{1}{4n+2}\right)\right)P_{n+1}^0(\theta) +$$
$$+\left(\left(1+\frac{1}{4n+2}\right)a_n + \left(1-\frac{1}{4n+2}\right)a_{n+2}\right)\times$$
$$\times(-(n+2)(n+1))P_{n+1}^0(\theta) = 0,$$
$$(a_n(n^2+5n+6)\left(1+\frac{1}{4n+2}\right) +$$
$$+ a_{n+2}(n^2+9n+20)\left(1-\frac{1}{4n+2}\right) +$$
$$+ a_n\left(1+\frac{1}{4n+2}\right)(-n^2-3n-2) + a_{n+2}\left(1-\frac{1}{4n+2}\right)\times$$
$$\times(-n^2-3n-2))P_{n+1}^0(\theta) = 0,$$
$$(a_n(n^2+3n+2) + a_{n+2}(-n^2-3n-2) +$$
$$+ a_n(-n^2-3n-2) +$$
$$+ a_{n+2}(-n^2-3n-2))P_{n+1}^0(\theta) = 0.$$

Вычтем (12) из (13):

$$a_n\left(-2n-4-\frac{n^2+5n+6}{4n+2}+\frac{n^2+3n+2}{4n+2}\right) +$$
$$+ a_{n+2}\left(-6n-18+\frac{n^2+9n+20}{4n+2}+\frac{-n^2-3n-2}{4n+2}\right) = 0,$$
$$2a_n\frac{4n^2+11n+6}{4n+2} + 6a_{n+2}\frac{4n^2+13n+3}{4n+2} = 0,$$
$$a_n = -3\frac{4n^2+13n+3}{4n^2+11n+6}a_{n+2}.$$

Таким образом, ответ существенно изменился, по меньшей мере, для небольших n. Точная формула для диполя доказана.

2.2. Квадруполь

Целью этого раздела является обобщение формул для диполя на случай, когда функция f определена главной квадрупольной гармоникой

$$f = r^{-3}P_2^0(\theta). \qquad (14)$$

Этот случай исследован в работе [Ахметьев и Хохлов, 2004]. Ищем вторую функцию пары в виде ряда (5). В этом ряду коэффициенты $a_{2n} = 0$. Первый коэффициент $a_1 = 1$ выбирается ненулевым нормированным. Случай $a_0 = 1$, конечно, возможен и этот случай доставляет решение с четными номерами коэффициентов. Этот случай интересен для классификации, но не соответствует никакому физическому решению, поскольку здесь, как и в аналогичном примере для диполя, который был рассмотрен выше, нарушается равенство нулю магнитного потока через сферическую поверхность.

Грубая формула линейной рекурсии для квадруполя

Пусть f определена формулой (14).

1. *Последовательность коэффициентов решения a_1, a_3, a_5, a_7, ... при любом первом коэффициенте a_1 оценивается по абсолютному значению геометрической прогрессией со знаменателем* $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. *Последовательность коэффициентов a_1, a_3, a_5, a_7, ... главного приближения определяет гармоническую функцию g по формуле* (5)*, причем на сфере радиуса $r = 1$ выполнено асимптотическое уравнение* (1)*. Более того, a_{2n+1} вычисляется по формуле $a_{2n+1} = (\lambda_1^n + \lambda_2^n)a_1$, где λ_1, λ_2 суть корни уравнения* (20).

Нахождение остаточного коэффициента для квадруполя

$$\left(\frac{3}{2}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)P_n^0 =$$
$$= \frac{1}{8}(3P_{n-2}^0 + 2P_n^0 + 3P_{n+2}^0) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{4(3-12n)}{2(16n^2-4)}P_{n-2}^0 + \frac{12}{2(8n^2+8n-6)}P_n^0 +$$
$$+ \frac{12(4n+5)}{8(4n^2+8n+3)}P_{n+2}^0.$$

Доказательство грубой формулы для квадруполя

Пользуясь формулой, аналогичной формуле (11), для квадруполя имеем

Таблица 1. Сравнение коэффициентов a_{n+2} для точного решения (строка 2) и его главного приближения (строка 1)

n	1	3	5	7	9	11	13
Без $O\left(\frac{1}{n}\right)$	–0.400	–0.0390	0.0960	–0.0300	–0.0070	0.0090	–0.0020
С $O\left(\frac{1}{n}\right)$	–1.183	0.2768	0.1899	–0.1517	0.0151	0.0324	–0.0174

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Delta\left(r^{-n-4}\left(\frac{3}{8}P_{n-2}^0(\theta)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{8}P_n^0(\theta)\frac{3}{8}P_{n+2}^0(\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=0. \quad (15)$$

Отсюда собираем коэффициенты при a_n, a_{n+2}, a_{n+4} (индексы в $O\left(\frac{1}{n}\right)$ меняются аналогичным образом):

$$a_n\Delta\left(r^{-n-4}\left(\frac{3}{8}P_{n-2}^0(\theta)+\frac{2}{8}P_n^0(\theta)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{8}P_{n+2}^0(\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right), \quad (16)$$

$$a_{n+2}\Delta\left(r^{-n-6}\left(\frac{3}{8}P_n^0(\theta)+\frac{2}{8}P_{n+2}^0(\theta)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{8}P_{n+4}^0(\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right), \quad (17)$$

$$a_{n+4}\Delta\left(r^{-n-8}\left(\frac{3}{8}P_{n+2}^0(\theta)+\frac{2}{8}P_{n+4}^0(\theta)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{8}P_{n+6}^0(\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right). \quad (18)$$

Применим Δ к (16), (17), (18) и соберем коэффициенты при P_{n+2}^0 и умножим уравнение на 8. Получим

$$\left(3+\frac{3(4n+5)}{2(4n^2+8n+3)}\right)a_{n-2}(-n-4)(-n-3)-$$
$$-3a_n(-n-3)(-n-2)+$$
$$+\left(2+\frac{3}{4n^2+4n-3}\right)a_n(-n-6)(-n-5)-$$
$$-2a_{n+2}(-n-3)(-n-2)+$$
$$+\left(3+\frac{3-12n}{8n^2-2}\right)a_{n+2}(-n-8)(-n-7)-$$
$$-3a_{n+4}(-n-3)(-n-2)=0.$$

Используя найденные выше выражения (без учета $O\left(\frac{1}{n}\right)$), соберем коэффициенты при a_n, a_{n+2}, a_{n+4}, приравняем сумму к 0, используя равенство (11):

$$6a_n+12a_{n+2}+30a_{n+4}=0. \quad (19)$$

Пусть $a_{n+4}=\lambda^2$, $a_{n+2}=\lambda$, $a_n=1$, тогда получим:

$$5\lambda^2+2\lambda+1=0. \quad (20)$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm 2i}{5}.$$

Грубая формула для квадруполя доказана.

Сравним коэффициенты a_{n+2} для точного решения и для решения без $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Начнем с $n=-3$. Тогда $a_{-1}=0$, $a_1=1$. По индукции найдем следующие коэффициенты (см. табл. 1). Видим, что второй ряд не имеет резонансов, но сходится на порядок медленнее первого.

Замечание. Скорость сходимости решения в грубой формуле для диполя выше, чем скорость сходимости решения в грубой формуле для квадруполя.

2.3. Октуполь

Целью раздела является обобщение грубых формул для диполя и квадруполя на случай, когда функция f определена главной октупольной гармоникой

$$f=r^{-4}P_3^0(\theta). \quad (21)$$

Ищем вторую функцию пары в виде ряда (5), предположим, что $a_{2k}=0$, $a_1\neq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-n-5}\left[\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos(\theta)\right]P_n^0(\theta)=$$
$$=f(\theta,r)g(\theta,r).$$

Рассмотрим и распишем только левую часть, т.к. левая часть останется неизменной. Вынесем $\cos(\theta)$ за скобки и умножим $P_n^1(\theta)$ на выражение в скобках

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-n-5}\cos(\theta)\left(\frac{1}{2}\cos(\theta)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{5}{2}P_{n-1}^0(\theta)+\frac{3}{2}P_{n+1}^0 0(\theta)\right]-\frac{3}{2}P_n^0\right).$$

После применения $\cos(\theta)$ к выражению под квадратными скобками и сокращений подобных членов получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-n-5} \cos(\theta)\left(\frac{5}{2}P_{n-2}^0(\theta) - \frac{2}{8}P_n^0(\theta) + \frac{5}{8}P_{n+2}^0(\theta)\right).$$

Далее применим аналогичный прием умножения $\cos(\theta)$ и умножим на 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-n-5}[5P_{n-3}^0(\theta) + 3P_{n-1}^0(\theta) + \\ + 3P_{n+1}^0(\theta) + 5P_{n+3}^0(\theta)]. \tag{22}$$

Далее применяем Δ при $r = 1$ и приравняем к 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta(r^{-n-5}[5P_{n-3}^0(\theta) + 3P_{n-1}^0(\theta) + \\ + 3P_{n+1}^0(\theta) + 5P_{n+3}^0(\theta)]) = 0.$$

Распишем ряд подробнее, собрав слагаемые при $P_{n+3}^0(\theta)$:

$$\Delta\begin{pmatrix} 5a_{n-3}P_{n+3}^0 r^{-n-4} + \\ + 3a_{n-1}P_{n+3}^0 r^{-n-6} + \\ + 3a_{n+1}P_{n+3}^0 r^{-n-8} + \\ + 5a_{n+3}P_{n+3}^0 r^{-n-10} \end{pmatrix} = 0.$$

Применение оператора Лапласа дает нам следующее уравнение:

$$5a_{n-3}(-n-4)(-n-3) - 5a_{n-3}(-n-3)(-n-2) + \\ + 3a_{n-1}(-n-6)(-n-5) - 3a_{n-1}(-n-3)(-n-2) + \\ + 3a_{n+1}(-n-8)(-n-7) - 3a_{n+1}(-n-3)(-n-2) + \\ + 5a_{n+3}(-n-10)(-n-9) - 5a_{n+3}(-n-3)(-n-2) = 0.$$

Приведем уравнение к следующему виду:

$$a_{n+3} + \frac{3}{7}a_{n+1} + \frac{9}{35}a_{n-1} + \frac{1}{7}a_{n-3} = 0, \\ a_{n+3} = -\frac{3}{7}a_{n+1} - \frac{9}{35}a_{n-1} - \frac{1}{7}a_{n-3}. \tag{23}$$

Ниже выпишем коэффициенты в отдельную матрицу (26).

Пусть $a_{n+3} = \lambda^3$, $a_{n+1} = \lambda^2$, $a_{n-1} = \lambda^1$, $a_{n+3} = \lambda^0 = 1$. Тогда запишем уравнение в виде:

$$\lambda^3 + \frac{3}{7}\lambda^2 + \frac{9}{35}\lambda + \frac{1}{7} = 0. \tag{24}$$

Найдем корни и получим собственные значения

$$\lambda_1 = -0.494,\ \ \lambda_{2,3} = 0.033 \pm i(-0.537). \tag{25}$$

В ряду (23) коэффициенты $a_{2n} = 0$. Первые два коэффициента a_1, a_3 выбираются произвольными. Запишем эти коэффициенты в виде вектор-столбца:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Коэффициент $a_{-1} = 0$, потому что отрицательный индекс запрещен.

Чтобы вычислить остальные коэффициенты, строим матрицу, назовем ее A. Она строится следующим образом: все строки, кроме последней заполняются единицами и нулями по принципу единичной матрицы, смещенной на один столбец вправо. Последняя строка заполняется коэффициентами при a_{n-3}, a_{n-1}, a_{n+1} из уравнения (23):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{9}{35} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Строим вектор-столбец, $n \geq 1$, n – нечетное: $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+4} \\ a_{n+6} \end{pmatrix}$ при помощи умножения вектора-столбца $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+2} \\ a_{n+4} \end{pmatrix}$ на матрицу (26) слева. Последовательность коэффициентов a_1, a_3, a_5, a_7, ... определена.

Интересным фактом является то, что ряды с четными номерами коэффициентов образуют решение, но это решение не определяет магнитный потенциал.

Данное уравнение (23) является разностным линейным уравнением, которое можно записать с помощью матрицы (26). Этот случай является простейшим в теории разностных уравнений.

Сформулируем результат.

Грубая формула линейной рекурсии для октуполя

Пусть f определена формулой (21). *Последовательность коэффициентов a_1, a_3, a_5, a_7, ... решения при любом первом коэффициенте a_1 оценивается по абсолютному значению геометрической прогрессией со знаменателем λ, причем $\lambda = -0.538$.*

Последовательность коэффициентов a_1, a_3, a_5, a_7, ... определяет гармоническую функцию g, которая служит главным приближением точного, по формуле (5). *При этом на сфере радиуса $r = 1$ выполнено уравнение* (1) в *асимптотическом смысле.*

3. 2D-ЗАДАЧА

Главная трудность в задаче (1) связана с двойной рекурсией по n и m при нахождении коэффициентов базиса для функции g. Проанализируем это в аналогичной 2D-задаче, где рекурсии по n нет. Для f, заданной одной гармоникой, наш результат был ранее получен в [Kaiser and Neudert, 2004] другим способом.

Далее к гармонике f добавлено дополнительное возмущение и показано, как изменится решение g. Результатом является то, что при рекурсии не возникает бесконечных рядов. Это означает, что и для 3D задачи в главном слагаемом рекурсии нет зависимости рядов от m. Результаты решения 2D-задачи значительно помогут при решении 3D-задачи (1).

3.1 . Коэффициенты функции пары Бакуса

Имеется Гармоника $f = \cos(n\varphi)r^{-n}$, ищем функцию g с ортогональным градиентом, которая задается уравнением на коэффициенты A, B:

$$g(A,B) = A\cos((n-k)\varphi)r^{-(n-k)} + B\cos((n+k)\varphi)r^{-(n+k)}. \tag{27}$$

Функции f, g составляют пару Бакуса и являются гармоническими во внешнешнем единичном круге. Значит, $\Delta(fg) = 0$ на окружности единичного радиуса. Оператор Лапласа для полярных координат имеет вид:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Формула произведения fg имеет вид:

$$fg = A\cos((n-k)\varphi)r^{-2n+k}\cos(n\varphi) + B\cos((n+k)\varphi)r^{-2n-k}\cos(n\varphi).$$

Рассмотрим подробнее умножение косинусов:

$$\cos((n\pm k)\varphi)\cos(n\varphi) = \frac{1}{2}\cos((2n\pm k)\varphi) + \cos(k\varphi)).$$

Далее применяется оператор Лапласа:

$$\frac{\delta^2(fg)}{\delta r^2} = (-2n+k)^2\frac{A}{2}(\cos(2n\varphi - k\varphi) + \cos(-k\varphi))r^{-2n+k} + (-2n-k)^2\frac{B}{2}(\cos(2n\varphi + k\varphi) + \cos(k\varphi))r^{-2n-k},$$

$$\frac{\delta^2(fg)}{\delta\varphi^2} = -\frac{A}{2}(2n-k)^2\cos((2n-k)\varphi)r^{-2n+k-2} - \frac{A}{2}\cos(-k\varphi)r^{-2n+k-2}k^2 - \frac{B}{2}(2n+k)^2\cos((2n+k)\varphi)r^{-2n-k-2} - \frac{B}{2}\cos(k\varphi)r^{-2n-k-2}k^2.$$

Правые части следует прировнять к 0. По условию $r = 1$, поэтому

$$(-2n+k)^2\frac{A}{2}\cos(2n\varphi - k\varphi) + (-2n+k)^2\frac{A}{2}\cos(-k\varphi) - \frac{A}{2}(2n-k)^2(\cos(2n-k)\varphi) - \frac{A}{2}\cos(-k\varphi)r^{-2n+k-2}k^2 + (-2n-k)^2\frac{B}{2}\cos(2n\varphi + k\varphi) + (-2n-k)^2\frac{B}{2}\cos(k\varphi)) - \frac{B}{2}(2n+k)^2\cos((2n+k)\varphi) - \frac{B}{2}\cos(k\varphi)k^2 = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, получаем

$$\frac{\cos(k\varphi)}{2}(A(4n^2 - 4nk) + B(4n^2 + 4nk)) = 0.$$

Это выражение равно 0 тогда и только тогда, когда выражение в скобках равно 0. Разделим его на $4n$.

$$An - Ak + Bn + Bk = 0,$$

$$A(n-k) + B(n+k) = 0,$$

$$A = -(n+k), \quad B = n-k.$$

Найдены коэффициенты для g. Размерность пространства решений равна $2N - 1$. Результат совпадает с результатом в работе [Kaiser and Neudert, 2004] Теорема 3.1. Коэффициенты A, B определено с точностью до общего множителя σ:

$$A = -(n+k)\sigma, \quad B = (n-k)\sigma. \tag{28}$$

В следующем разделе будет найден множитель σ в более общей задаче.

3.2. Возникновение возмущения

В этом разделе будет построено g, если к f добавлена еще одна гармоника:

$$g = g_0 + g_1 a + g_2 a^2,$$

$$f = f_0 + f_1 a.$$

В этой формуле g, найденная в предыдущем разделе переобозначена через g_0, сама функция f переобозначена через f_0; предполагается, что

$$m > n, \quad a \ll 1.$$

Для нахождения целого ряда для g, необходимо найти g_1, g_2. Для этого достаточно использовать равенство $a\Delta(f_1 g_0) + a\Delta(f_0 g_1) = 0$. Для нахождения g_2 достаточно использовать равенство $a^2\Delta(g_1 f_1) + a^2\Delta(g_2 f_0) = 0$, где g_1 найдена на предыдущем шаге, как в разделе 2.

Найдем g_1. Известно, что

$$f_0 = \cos(n\varphi)r^{-n},$$

$$f_1 = \cos(m\varphi)r^{-m},$$

$$g_0 = A\cos((n-k)\varphi)r^{-n+k} + B\cos((n+k)\varphi)r^{-n-k}.$$

Тогда по аналогии с предыдущим вычислением предположим, что

$$g_1 = \tilde{A}\cos((m-k)\varphi)r^{-m+k} + \tilde{B}\cos((m+k)\varphi)r^{-m-k}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$.

Найдем далее произведения f_1g_0

$$f_1g_0 = Ar^{-n+k-m}\frac{1}{2}(\cos((n-k-m)\varphi) + \\ + \cos((n-k+m)\varphi) + \\ + Br^{-n-k+-m}\frac{1}{2}(\cos((n+k-m)\varphi) + \\ + \cos((n+k+m)\varphi) = \\ = \frac{1}{2}Ar^{-n+k-m}\cos((n-k-m)\varphi) + \\ + \frac{1}{2}r^{-n-k-m}B\cos((n+k-m)\varphi).$$

Так как $r = 1$, после применения оператора Лапласа получим:

$$\Delta(f_1g_0) = \frac{1}{2}A\cos((n-k-m)\varphi)(4mn-4km) + \\ + \frac{1}{2}B\cos((n+k-m)\varphi)(4km+4mn). \quad (29)$$

По аналогии находим произведение f_0g_1:

$$f_0g_1 = \frac{1}{2}\tilde{A}r^{-m+k-n}\cos((n-m+k)\varphi) + \\ + \frac{1}{2}\tilde{B}r^{-n-m-k}\cos((n-m-k)\varphi).$$

Так как снова $r = 1$, после применения оператора Лапласа получим:

$$\Delta(f_0g_1) = \frac{1}{2}\tilde{A}\cos((n-m+k)\varphi)(4mn-4kn) + \\ + \frac{1}{2}\tilde{B}\cos((n-m-k)\varphi)(4kn+4mn). \quad (30)$$

Найдем сумму результатов из (29), (30) и приравняем к нулю

$$A\cos((n-k-m)\varphi)(mn-km) + \\ + \tilde{B}\cos((n-m-k)\varphi)(kn+mn) + \\ + B\cos((n+k-m)\varphi)(km+mn) + \\ + \tilde{A}\cos((n-m+k)\varphi)(mn-kn) = 0.$$

Сгруппируем слагаемые, исходя из одинаковых показателей косинусов, и приравняем к нулю. Получим 2 равенства, из которых сможем найти коэффициенты для g_1:

$$A(mn-km) + \tilde{B}(kn+mn) = 0,$$

откуда выразим $\tilde{B}$, подставив A, которое мы подсчитали выше.

$$\tilde{B} = \frac{(n^2-k^2)m}{(m+k)n}.$$

$$B(km+mn) + \tilde{A}(mn-kn) = 0,$$

откуда выразим $\tilde{A}$, подставив B, которое мы подсчитали выше.

$$\tilde{A} = \frac{(n^2-k^2)m}{(m-k)n}.$$

Отсюда получаем формулу для g_1:

$$g_1 = \frac{(n^2-k^2)m}{(m-k)n}\cos((m-k)\varphi)r^{-m+k} + \\ + \frac{(n^2-k^2)m}{(m+k)n}\cos((m+k)\varphi)r^{-m-k},$$

$$\sigma = \frac{(n^2-k^2)m}{(m^2-k^2)n}.$$

Имеется $g_1f_1 + g_2f_0 = 0$. Для того, чтобы найти g_2, докажем сначала, что $\Delta(g_1f_1) = 0$. Перепишем g_1 через σ:

$$g_1 = \sigma(m+k)\cos((m-k)\varphi)r^{-m+k} + \\ + \sigma(m-k)\cos((m+k)\varphi)r^{-m-k},$$

$$f_1 = \cos(n\varphi)r^{-n}.$$

Тогда при g_1 получим следующие коэффициенты:

$$A^* = -(m+k)\sigma, \quad B^* = (m-k)\sigma.$$

Но эти коэффициенты отличаются от (28) только заменой n на m. Значит, что $\Delta(g_1f_1) = 0$. А так как $f_0 \neq 0$, значит, что $g_2 = 0$.

Таким образом, получаем, что ряды f, g содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых:

$$f = \cos(n\varphi)r^{-n} + a\cos(m\varphi)r^{-m},$$

$$g = g_0 + ag_1.$$

4. ВЫВОДЫ

При решении задачи (1), (2) показано, что с ростом порядка гармоники f сходимость ряда коэффициентов главного приближения произвольного решения g увеличивается, число параметров, определяющих решение, тоже увеличивается. Этот результат нам представляется новым, он открывает новые перспективы при построении высокоточных моделей внешнего магнитного поля Земли.

По сравнению с результатами работы [Ахметьев и Хохлов, 2004] рассмотрен случай, когда f октуполь. Октупольная гармоника имеет вид: $f = r^{-4}P_3^0(\theta)$. Вычисляется асимптотически точное приближение для функций g (это приближение мы назвали главным), в виде коэффициентов ряда. Само вычисление ряда главного приближения мы назвали грубой формулой рекурсии (например, как при переходе от точной формулы для диполя к грубой формуле для диполя). При вычислении была составлена матрица A, полученная из уравнения (23). В ряде, который вытекает из формулы (23), главного приближения первые коэффициента произвольные, остальные рекурсивно вычисляются.

Коэффициенты ряда главного приближения оцениваются геометрической прогрессией со знаменателем $\lambda_1 = 0.538$. В аналогичной оценке для квадруполя, которая была известна ранее, главное приближение оценивается геометрической прогрессией с меньшим знаменателем (от квадруполя до октуполя знаменатель прогрессии уменьшился на 0.205).

Итак, при упрощающем предположении (2), что данные и решение зависят лишь от радиуса r и широты θ, нами предложен способ восстановления потенциала магнитного поля во внешней шаровой области по известным значениям поля направлений на сфере единичного радиуса, которому ортогонален искомый потенциал grad(g).

Полученные результаты носят пока незавершенный характер и предполагают явное построение примера, решающего 3D-задачу (1), (3) без упрощающего предположения (2). В рамках предлагаемого подхода возможно, на наш взгляд, явное построение примера в направлении поиска общего решения проанализирована 2D-задача с зависимостью данных и решения от радиуса r и долготы φ. Это позволило сформулировать новую гипотезу, которая может быть сформулирована следующим образом.

Пространство решений в 3D-задаче (1), (3) вычисляется переходом от точных решений к главным приближениям Зависимость решений g по угловой координате φ задается конечным анзацем и требует лишь линейной рекурсии по n, как в грубых формулах для диполя, квадруполя и октуполя, и не требует рекурсии по m (см. 2D-задачу из Раздела 4. При переходе от главных приближений к точным решениям добавляются быстро сходящиеся асимптотические ряды по присоединенным полиномам Лежандра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

– *Ахметьев П.М., Хохлов А.В.* О классификации гармонических функций во внешности единичного шара с известным модулем градиента на границе области, различающая которых зависит от широты // Математические заметки. С. 182–191. 2004.

– *Ахметьев П.М.* Приложение сингулярной теории в статистике палеомагнитных данных // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 53. № 6. С. 804–808. 2013.

– *Петров А.В.* Классификация гармонических потенциалов во внешности единичного шара. Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики // Тр. VIII приокской науч. конф. Коломна-Константиново, 10–11 июня 2016 г. Отв. ред. О.Н. Бирюков. Коломна: изд-во ГСГУ. С. 114–118. 2016.

– *Backus G.* Non-uniqueness of the external geomagnetic field determined by surface intensity measurements // J. Geophys. Res. V. 75. P. 6339–6341. 1970.

– *Kaiser R.* Uniqueness and nonuniqueness in the non-axisymmetric direction problem // Q.J. Mech. Appl. Math., August 2012. P. 55–71. 2012.

– *Kaiser R.* The geomagnetic direction problem: The two-dimensional and the three-dimensional axisymmetric cases // SIAM J. Math. Anal. V. 42. P. 701–728. 2010.

– *Kaiser R., Neudert M.* A non-standard boundary value problem related to geomagnetism // Q. Appl. Math. V. 62. P. 423–457. 2004

– *Khokhlov A.* How can one find Earth's magnetic field from incomplete measurements of it? https://www.researchgate.net/publication/293091759. 2013.

– *Khokhlov A., Hulot G., Bouligand C.* Testing statistical paleomagnetic field models against directional data affected by measurement errors // Geophys. J. Int. V. 167. P. 635–648. 2006.

– *Khokhlov A., Hulot G., Le Mouel J.-L.* On the Backus Effect – I // Geophys. J. Int. V. 130. P. 701–703. 1997.

– *Khokhlov A., Hulot G., Le Mouel J.-L.* On the Backus Effect – II // Geophys. J. Int. V. 137. P. 816–820. 1999.

– *Khokhlov A., Hulot G., Le Mouel J.-L.* Uniqueness of mainly dipolar magnetic fields recovered from directional data // Geophys. J. Int. V. 129. P. 347–354. 1997.