

УДК 550.385.37

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ХОЛЛОВСКИХ ТОКОВ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПУЛЬСАЦИЙ ДИАПАЗОНА $Pc4$

© 2019 г. А. В. Петленко*

Санкт-Петербургский филиал института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (СПбФ ИЗМИРАН), г. Санкт-Петербург, Россия

**e-mail: petlenko.58@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.11.2018 г.

После доработки 08.02.2019 г.

Принята к публикации 23.05.2019 г.

Распределения интенсивностей и направлений холловских токов в ионосфере определены по заданным значениям координат и интенсивностей продольных токов. На примере распределений, вычисленных для трех продольных токов, показано, что совпадение вблизи точек их проекций особенностей поля холловских токов и магнитного поля на поверхности Земли объясняется индукционным характером формирования холловских токов. Это позволяет оценивать число, положение и интенсивности продольных токов по экспериментально построенным распределениям поля магнитных пульсаций при условии, что расстояния между источниками больше высоты ионосферы. Приведенное решение уравнений силовых линий и изолиний интенсивности холловских токов показывает, что локально дуги этих кривых порождаются парой эквивалентных продольных токов.

DOI: 10.1134/S0016794019050080

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что высокоширотные магнитные пульсации на поверхности Земли возникают в результате возбуждения ионосферных холловских токов магнитосферными продольными токами, которые образуются при высыпаниях заряженных частиц. Представления о возбуждении холловских токов в тонкой однородно проводящей ионосфере изложены в работе [Kato and Tamao, 1956]. На основе этих представлений, по распределению продольных токов можно восстановить конфигурацию ионосферных холловских, и, пользуясь законом Био—Савара—Лапласа, найти мгновенное распределение компонент поля геомагнитных пульсаций.

Практический интерес, как правило, вызывает решение обратной задачи, когда по измеренной последовательности распределений магнитного поля, требуется найти изменения интенсивностей и положений продольных токов. Так, согласно [Копытенко и Распопов, 1968] положение продольных токов геомагнитных пульсаций позволяет оценить границы области значительного градиента концентрации частиц внутренней магнитосферы — плазмопаузы. В рамках представлений о модуляции инкрементов нарастания ионно-циклотронных волн геомагнитными пульсациями $Pc4$ [Ляцкий и Плясова-Бакунина, 1986] выясне-

ние причин интенсификации пульсаций $Pc1$ связано с определением положения и режима колебаний продольных токов $Pc4$. Однако не ясно, как влияют неоднородности намагниченности земной коры на распределение областей высыпания магнитосферных заряженных частиц [Петленко и др., 2011a]. В данной работе основное внимание уделяется аспектам решения прямой задачи в постановке, близкой представлениям [Roldugin and Roldugin, 2008].

В модели поля геомагнитных пульсаций [Ролдугин и др., 1971] эквивалентный источник рассматривается в виде скрещенных диполей, помещенных на высоте ионосферы. В поздней модификации [Roldugin and Roldugin, 2008] модель была представлена асимметричными диполями. Если отвлечься от процесса становления холловских токов со скоростями распространения БМЗ-волн в ионосфере и рассматривать токовую конфигурацию в каждый момент времени как квазистатическую (какой она выглядит в диапазоне измерений поля магнитных пульсаций), то асимметрию диполей можно объяснить различиями интенсивности и взаимной удаленности продольных токов. Следуя [Kato and Tamao, 1956], положим, что интенсивность холловского тока определяется величиной магнитного давления, или модулем магнитного поля, созданного продольными токами. Задавая их распределение,

представим в аналитической форме распределения интенсивностей и направлений холловских токов, что позволяет рассчитать индуцированное магнитное поле на поверхности Земли.

При условии, что расстояние между точками проекций продольных токов превышает высоту E -слоя ионосферы, выполненном для пульсаций $Pc4$ и $Pi2$ в диапазоне периодов >100 с, сопоставим распределения поля холловских токов и магнитного поля пульсаций, вычисленные при фиксированных параметрах продольных токов. Цель работы состоит в том, чтобы показать, что положения некоторых особенностей этих распределений совпадают с положениями точек проекций продольных токов, что объясняется индуктивным типом ионосферных источников пульсаций в окрестности этих точек и позволяет оценивать положения и интенсивности продольных токов по экспериментально построенным распределениям магнитного поля пульсаций.

Актуальность определяется аналитическим представлением областей локализации особенностей поля холловских токов, обеспечивающим их визуализацию и способствующим интерпретации поля магнитных пульсаций. На примере поля, инициированного тремя продольными токами, будет получено решение уравнений силовых линий и изолиний интенсивности холловских токов. Приведенная в приложении методика решения показывает, что локально дуги этих кривых порождаются парой эквивалентных продольных токов – в рассматриваемом примере положения этих токов согласованы с центрами кривизны этих дуг.

2. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ГЕОМАГНИТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Поле высокоширотных геомагнитных пульсаций формируется в тонкой однородно проводящей ионосфере системой холловских токов $\mathbf{j}_H$, инициируемых магнитосферными продольными токами $j_{\parallel}$. Пусть заданы число продольных токов K , их интенсивности i_k и координаты проекций на ионосферу $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$. Магнитное поле в точке $\mathbf{r}_{m,n} = (x_m, y_n)$ на поверхности Земли рассчитывается как $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n}) = \iint_{\{\mathbf{r}\}} d\mathbf{r} [\mathbf{j}_H(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n})] R^{-3}$, $R = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m,n})^2 + h^2}$, h – высота ионосферы. Компоненты холловских токов, инициируемых током $j_{\parallel,k}$, в точке $\mathbf{r} = (x, y)$ считаем пропорциональными компонентам его магнитного поля $j_{x,k} \propto -(y - y_k)\rho_k^{-2}$, $j_{y,k} \propto (x - x_k)\rho_k^{-2}$, $\rho_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$, и его интенсивности. В силу принципа суперпозиции $\mathbf{j}_H(\mathbf{r}) = \sum_k^K \mathbf{j}_{H,k}(\mathbf{r})$,

$\mathbf{j}_{H,k} = (j_{x,k}, j_{y,k})$, для произвольно заданного числа продольных токов конфигурация холловских токов $\mathbf{j}_H$, следовательно, и распределение $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ имеет алгебраическое представление. Действительно, записывая компоненты $\mathbf{j}_H$ как $j_x \propto -\sum_k^K i_k (y - y_k) \times \prod_k^K \rho_k^{-2} / \prod_k^K \rho_k^{-2}$ и $j_y \propto \sum_k^K i_k (x - x_k) \times \prod_k^K \rho_k^{-2} / \prod_k^K \rho_k^{-2}$, где символ $\hat{k}$ указывает на пропуск множителя с индексом k , находим, что линии постоянного уровня интенсивности $i_L = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \beta^{-1}$ определяются как решение алгебраического уравнения степени $2K$ в переменных x, y , коэффициенты которого определяются параметрами $\mathbf{r}_k, i_k$ и β .

Возможность решения этого уравнения при произвольных значениях β позволяет определить особенности функции распределения $i_L(\mathbf{r})$ и проиллюстрировать их сопоставление с особенностями распределения магнитного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$, вычисленного при известных значениях параметров $\mathbf{r}_k$ и i_k . Этим обеспечивается возможность решения обратной задачи, в которой по особенностям экспериментально построенного $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ требуется найти координаты, интенсивности и число продольных токов, инициирующих наблюдаемое в конкретный момент времени распределение поля магнитных пульсаций.

Точность построения $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ определяется условиями эксперимента – пороговой чувствительностью магнитометров и расстоянием между ними. Поэтому, вычисляя магнитное поле $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ в пределах некоторой ограниченной области Ω , можно ограничить размеры области интегрирования $\{\mathbf{r}\} \supset \Omega$, используя в качестве ограничителя линию уровня $i_L = \tilde{j}_H$, где $\tilde{j}_H$ – минимальное значение тока, различимое магнитометром на расстоянии h . Использование линий уровня i_L позволяет устранить возможные сингулярности $\mathbf{j}_H(\mathbf{r}_{m,n})$ в узлах координатной сети $\mathbf{r}_{m,n}$ при случайном расположении точек $\mathbf{r}_k$. Чтобы избежать их проявления в компонентах $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n})$, распределение $\mathbf{j}_H$ регуляризуем, вводя ограничения на уровень $\hat{j}_{H,k}$ допустимых значений холловских токов и сохраняя ориентацию $\hat{\mathbf{j}}_H$ и $\mathbf{j}_H$ там, где $|\hat{j}_{H,k}| \ll |j_H|$. Таким образом, верхние $\hat{j}_{H,k}$ и нижний $\tilde{j}_H$ уровни интенсивности холловских токов фактически определяют внутренние и внешнюю границы области $\{\mathbf{r}\}$.

Так как магнитное поле холловских токов быстро затухает с расстоянием, а порог чувстви-

тельности регистрирующих магнитометров ограничен, то на измерения поля оказывают влияние лишь конечное число продольных токов. Ограничимся случаем $K = 3$ для иллюстрации решения прямой задачи вычисления $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ по заданным значениям $\mathbf{l}_k$ и $\mathbf{r}_k$. Будем полагать, что проекции токов $j_{\parallel,k}$ расположены в пределах области Ω . Покажем, что изолинии $\mathbf{l}_L$ замкнуты. При специальном выборе (центрировании) координат $\sum_k^K \mathbf{r}_k = 0$ уравнение ординаты линии уровня $\mathbf{l}_L = \beta^{-1}$ имеет вид

$$y^6 + c_2 y^4 + c_3 y^3 + c_4 y^2 + c_5 y + c_6 = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты c_j представляют собой полиномиальные функции x , параметризованные $\mathbf{l}_k$, $\mathbf{r}_k$ и β . Некоторые аспекты решения (1) приведены в приложении А. Каждому значению x может соответствовать только четное число вещественных корней $y_i(x, \beta)$: 0, 2, 4, или 6. Поэтому при разных значениях параметров линии $\mathbf{l}_L$ составляют набор изолированных, или вложенных друг в друга замкнутых контуров.

Так как можно построить контуры произвольного уровня $\mathbf{l}_L$ в диапазоне $[\hat{j}_H, \check{j}_H]$, где $\hat{j}_H = \max_{k \in 1..3} (\hat{j}_{H,k})$, то $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n})$ представляется интегралом Лебега по совокупности контуров в виде:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n}) = \int_{\hat{j}_H}^{\check{j}_H} d\mathbf{l}_L \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{m,n}) \times \times [\mathbf{j}_L(\mathbf{r}(\varphi)) \times (\mathbf{r}(\varphi) - \mathbf{r}_{m,n})] R(\mathbf{r}(\varphi), \mathbf{r}_{m,n})^{-3}. \quad (2)$$

В каждой точке линии уровня $\mathbf{l}_L$ известны не только интенсивность, но и направление тока $\mathbf{j}_L(\mathbf{r}(\varphi))$. Для тока в проводящей среде это направление определяется дифференциальным уравнением (ДУ) силовых линий тока как в работе [Kato and Tamao, 1956]. Уравнение силовой линии [Тамм, 2003] имеет вид $d_x y = j_y(x, y) / j_x(x, y) = \sum_k^K \mathbf{l}_k (x - x_k) \prod_k^K \rho_k^{-2} / \sum_k^K \mathbf{l}_k (y - y_k) \prod_k^K \rho_k^{-2}$ дифференциального уравнения 1-го порядка, правая часть которого представлена рациональной функцией с числителем и знаменателем, полиномиально зависящими от x , y координат.

В случае $K = 3$ запишем $j_y(x, y)$ в виде многочлена, упорядоченного по степеням x , коэффициенты которого имеют вид полинома от y , в котором $p_{\mu,v}$ зависят от x_k , y_k и $\mathbf{l}_k$. Так в выражении

$$j_y(x, y) = p_0 x^5 + p_1 x^4 + (p_{2,0} y^2 + p_{2,1} y + p_{2,2}) x^3 + \dots (p_{5,0} y^4 + p_{5,1} y^3 + p_{5,2} y^2 + p_{5,3} y + p_{5,4}), \quad (3a)$$

коэффициент при x^2 представлен многочленом 2-й степени от y , коэффициент при x — многочленом 4-й степени. Представим явную параметрическую зависимость первых четырех коэффициентов $p_{\mu,v}$:

$$p_0 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k, \quad p_1 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k x_k - 2 \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k \sum_{k=1}^3 x_k, \quad (3b)$$

$$p_{2,0} = 2p_0, \quad p_{2,1} = -2 \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k (y_{\widehat{k+1}} + y_{\widehat{k+2}}),$$

где символ $\widehat{k}$ указывает на циклическую перестановку индекса $k = \widehat{k} \pmod{3}$. В выражении p_1 второе слагаемое исчезает при центрировании координат, но первое (после нормировки на p_0) совпадает с абсциссой центра тяжести треугольника, в вершинах с координатами $\mathbf{r}_k$ которого сосредоточены “массы” $\mathbf{l}_k$. То есть центр силовых линий $\mathbf{l}_F$ смещен относительно центра линий уровня $\mathbf{l}_L$.

Дифференциальное уравнение (ДУ) силовой линии операторными методами [Айнс, 1939] приводится к виду алгебраического уравнения. В случае $K = 3$ получаем уравнение 6-й степени, решение которого представляет силовую линию как функцию $y(x)$. Постоянная интегрирования определяется координатами точки (на контуре $\mathbf{l}_L$), через которую проходит $\mathbf{l}_F$. Через каждую точку проходит одна силовая линия, при этом вещественными являются кратное двум число ветвей решения алгебраического уравнения — то есть силовые линии $\mathbf{l}_F$, так же как и линии постоянного уровня $\mathbf{l}_L$, образуют систему замкнутых контуров. Число точек пересечения $\mathbf{l}_F$ с изолинией $\mathbf{l}_L$ также кратно 2. Если контуры $\mathbf{l}_F$ и $\mathbf{l}_L$ имеют только две общие точки, то в этих точках они соприкасаются. В таких точках касательная $\mathbf{j}_t$ контура $\mathbf{l}_L$ равна $\mathbf{j}_H$, а нормальная составляющая $\mathbf{j}_n = 0$. Критерием определения точек касания $\mathbf{l}_F$ и $\mathbf{l}_L$ является коллинеарность $\mathbf{j}_t$ и $\mathbf{j}_H$, или $\mathbf{j}_t \times \mathbf{j}_H = 0$, то есть эти точки тоже находятся из решения соответствующего алгебраического уравнения.

Параметр β является критическим для условия касания $\mathbf{l}_F$ и $\mathbf{l}_L$ — при малом изменении β фиксированная силовая линия либо не имеет общих точек с $\mathbf{l}_L = \beta^{-1}$, либо пересекается дважды с $\mathbf{l}_L$ в ма-

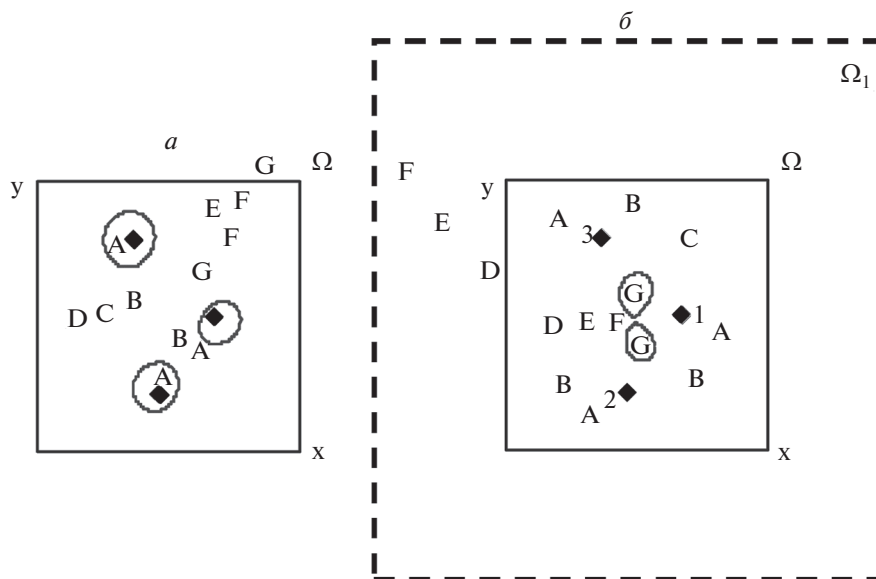


Рис. 1. Покрывание области Ω изолиниями ι_L : (а) $\iota_2 = -1.1$, $\iota_3 = 1.4$; (б) $\iota_2 = 1.1$, $\iota_3 = 1.4$. Цифрами нумерованы проекции продольных токов (ромбики). Буквами индексируются значения параметров уровня β . Внешний контур линии $\iota_L = \beta_G^{-1}$ на (б) расположен за пределами области Ω_1 вдвое больших, чем Ω линейных размеров.

лой окрестности точки касания. Поэтому общее число точек касания ι_F и ι_L является множеством меры 0 [Арнольд, 1978] на множестве их всевозможных пересечений и представляется конечным числом кривых на плоскости. Следовательно, ι_F и ι_L образуют сеть почти всюду трансверсальных замкнутых кривых, причем, если ι_F касается к линии фиксированного уровня, то пересечения этой ι_F с другими изолиниями задают узлы $\mathbf{r}_{L,F}$ сети, по которым можно производить интегрирование (2). В узлах, принадлежащих линии уровня β , модуль вектора $\mathbf{j}_L(\mathbf{r}_{L,F})$ равен ι_L , направление определяется уравнением силовой линии, а вклад в магнитное поле токов на элементе дуги $d\iota_L$ тем больше, чем выше плотность пересекающихся с ним линий ι_F [Тамм, 2003], то есть, чем выше плотность узлов.

Построим изолинии ι_L , проследим за тем, как меняется конфигурация ι_F и ι_L при изменении интенсивностей ι_k и выделим основные особенности распределения холловских токов. Рассчитаем магнитное поле $\tilde{\mathbf{B}}$ этих токов в ограниченной области Ω , в пределах которой локализуются основные особенности распределения поля $\mathbf{j}_H$. Сопоставим положение особенностей распределений $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{j}_H$ в случае, когда число продольных токов K в Ω равно 3.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХОЛЛОВСКИХ ТОКОВ В ПЛОСКОЙ ИОНОСФЕРЕ

Пусть в области Ω заданы проекции продольных токов $\mathbf{r}_k$, обозначенные закрашенными ромбиками и пронумерованные цифрами 1, 2, 3 на рис. 1б. Центр треугольника с вершинами в точках $\mathbf{r}_k$ совмещен с началом координат в центре Ω . Не придавая определенных значений ни размерам Ω , ни интенсивностям ι_k , будем полагать $\iota_1 = 1$, так что ι_2 и ι_3 представлены как отношения $\iota_2 : \iota_3 : \iota_1 \cdot \iota_3 = 1.4$ и $\iota_2 = +1.1$ на рис. 1б будут соответствовать однонаправленным с ι_1 токам. $\iota_2 = -1.1$ на рис. 1а соответствует току, имеющему противоположную направленность. Очевидно, что при $K = 3$ случай однонаправленных $j_{\parallel,k}$ и случай, когда только два тока протекают в одинаковом направлении, исчерпывают всевозможные варианты выбора знаков ι_k .

Для обоих случаев нанесем линии постоянных уровней интенсивности $\iota_L = \beta^{-1}$, найденные как решения уравнения (1) при разных значениях β , индексированных на рис. 1 заглавными латинскими буквами. Так, на рис. 1а $\beta_A = 0.07$, $\beta_B = 0.10$, $\beta_C = 0.12$, $\beta_D = 0.17$, $\beta_E = 0.22$, $\beta_F = 0.27$, $\beta_G = 0.32$. На рис. 1б $\beta_A = 0.07$, $\beta_B = 0.12$, $\beta_C = 0.15$, $\beta_D = 0.17$, $\beta_E = 0.22$, $\beta_F = 0.27$, $\beta_G = 0.42$. При малых значениях β решение (1) образует три несвязных замкнутых контура, каждый из которых охватывает одну и только одну точку $\mathbf{r}_k$, формируя внут-

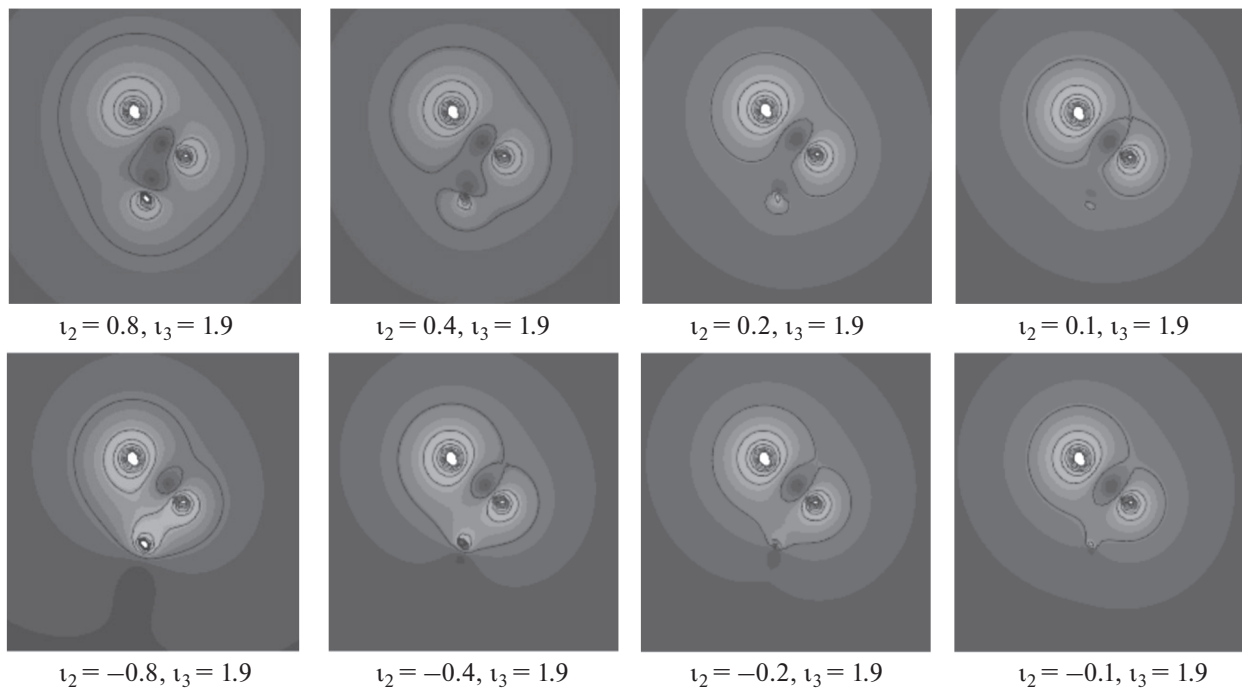


Рис. 2. Функция распределения интенсивности холловских токов $I_L(x, y)$ при различных значениях продольного тока I_2 .

ренные границы области $\{r\}$. При возрастании β размеры областей, ограниченных линиями I_L , возрастают так, что уже при $\beta_B = 0.10$ (рис. 1а) эти области сливаются. Число контуров, удовлетворяющих решению (1), сокращается до одного при $\beta = \beta_C$, а при дальнейшем увеличении $\beta = \beta_F$ (рис. 1а), $\beta = \beta_D$ (рис. 1б) вновь начинает увеличиваться. Формируется внешний и вложенный в него контуры, при этом область, ограниченная внутренним контуром $\beta = \beta_G$, принадлежит области, ограниченной внутренним контуром $\beta = \beta_F$, тогда как для областей, ограниченных внешними контурами β_G и β_F , отношение вложенности строго противоположное (рис. 1а). На рис. 1б видны два изолированных внутренних контура $\beta = \beta_G$, их внешний контур (не показан) находится за пределами области Ω_1 , вдвое превышающей линейные размеры области Ω . Этот контур мало отличается от контура I_L , формируемого одиночным продольным током интенсивности $\sum_k^3 I_k$, помещенным в начало координат. А большим значениям β соответствуют внешние границы области $\{r\}$.

На рисунке 2 показаны изменения 2D функции распределения $I_L(x, y)$ при изменениях величины и направления тока I_2 и фиксированных значениях $I_1 = 1$ и $I_3 = 1.9$. Представленные рас-

пределения позволяют понять, что отношения вложенности областей, ограниченных линиями уровней $I_L = \beta^{-1}$, формируют структуру токов j_H , покрывающую как область Ω , так и вмещающую ее область $\{r\}$. Изменения отношения вложенности при различных значениях β проявляют наличие двух типов особенностей функции $I_L(x, y)$, первый из которых включает локальные максимумы интенсивности j_H , второй — минимумы. Наличие локального минимума интенсивности I_L можно наблюдать в случае пары продольных токов (когда $I_2 = \pm 0.1 \ll I_1, I_3$). С другой стороны, соответствующие распределения (рис. 2) показывают, что даже если значение одного из токов $j_{\parallel, k}$ на порядок меньше интенсивности двух других, изолинии I_L в его ближайшей окрестности реагируют на него заметным изменением кривизны.

Распределение направлений j_H представлено на рис. 3 силовыми линиями поля холловских токов (нарисованы стрелками), построенными по вычисленным распределениям $j_x(x, y)$ и $j_y(x, y)$. Конфигурация на рис. 3а соответствует распределению продольных токов разной, на рис. 3б — одинаковой направленности. Серым цветом на рис. 3а показан контур, найденный как решение ДУ силовой линии. В качестве начального условия использованы координаты точки на контуре I_L , построенном как линия криволинейной сетки (тонкие сплошные линии для обеих configura-

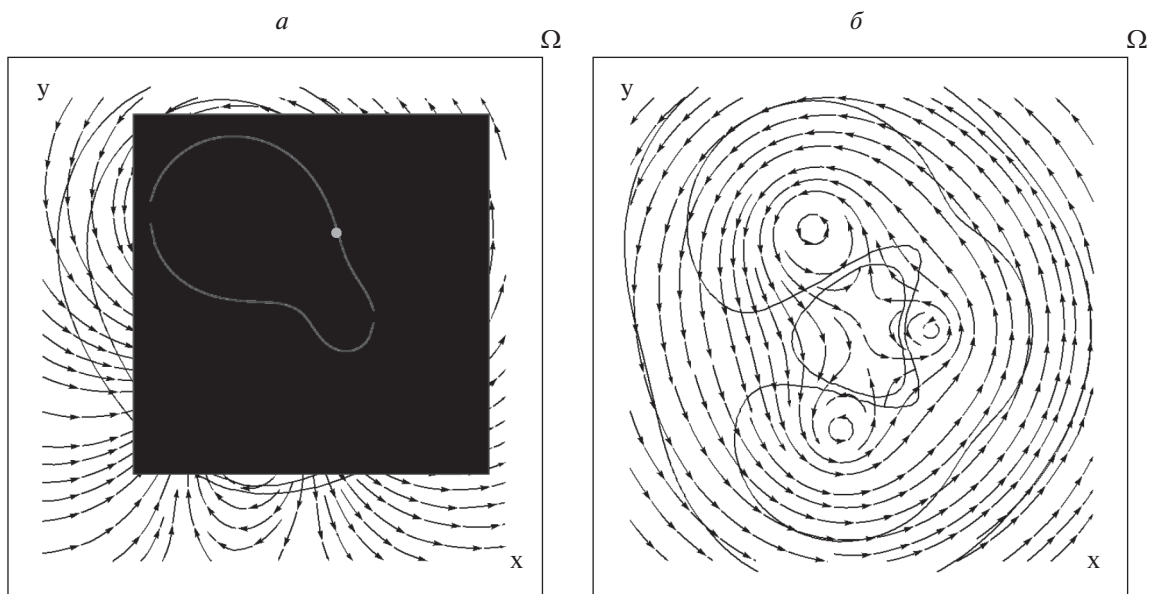


Рис. 3. Силовые линии (стрелки) и линии уровня (сплошные) для продольных токов $j_{\parallel,k}$ разных (а), (б) — одинакового направлений. Серым цветом выделен контур ι_F , построенный как решение ДУ силовой линии. Серая точка на контуре ι_L выбрана начальным условием ДУ.

ций силовых линий). Ориентированные по и против часовой стрелки векторы $\mathbf{j}_H$ в окрестности точек проекций $j_{\parallel,k}$ позволяют отслеживать направление продольного тока. Вблизи как внутренних, так и внешних границ областей $\{\mathbf{r}\}$ направления $\mathbf{j}_H$ не слишком сильно уклоняются от направлений касательных к линиям ι_L векторов $\mathbf{j}_\tau$.

Возможность объединения линий ι_F и ι_L в криволинейную координатную сеть, покрывающую области Ω и $\{\mathbf{r}\}$, позволяет представить магнитное поле холловских токов (2) в виде

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n}) = \int_{j_H}^{\tilde{j}_H} dj_L \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{r}_{L,F}) \times \quad (4)$$

$$\times [j_L(\mathbf{r}_{L,F}) \times (\mathbf{r}_{L,F} - \mathbf{r}_{m,n})] R(\mathbf{r}_{L,F}, \mathbf{r}_{m,n})^{-3},$$

удобном для численного интегрирования, где $j_L(\mathbf{r}_{L,F})$ определяет изменение интенсивности $\mathbf{j}_H$ при переходе между линиями ι_L уровней β_i и $\beta_{i'}$, а $\varphi(\mathbf{r}_{L,F})$ представляет собой распределение $\mathbf{r}_{L,F}$ вдоль каждого контура ι_L . Поведение $j_L(\mathbf{r}_{L,F})$ установим, выразив элемент дуги $dj_L = \sqrt{1 + y'(x)^2}$ в терминах производной найденного решения уравнения (1). Вычислив длину каждого контура уровня β , найдем общую длину s_L линии уровня. Зависимость $s_L(\beta)$ определяет изменение интенсивности холловских токов по разным линиям ι_L .

На рисунке 4а воспроизведена функция $s_L(\beta)$. Маркерами отмечены значения $s_L(\beta_A), \dots, s_L(\beta_G)$, соответствующие линиям ι_L рис. 1б. Заметим, что функция $s_L(\beta)$ практически линейна как при малых, так и при больших значениях β . Вблизи внешних границ области $\{\mathbf{r}\}$ такую же зависимость будут иметь контуры ι_L , инициируемые одиночным продольным током, помещенным в начало координат. Холловские токи при этом будут ориентированы строго по направлениям касательных $\mathbf{j}_\tau$, и формируемое ими магнитное поле можно рассматривать как поле индукционного источника. Интенсивность $\mathbf{j}_H$ на линии ι_L обратно пропорциональна ее общей длине. На внутренних и внешних контурах линии она одинакова. Из непрерывности тока следует возможность представления интенсивностей ι_L , или $j_L(\mathbf{r}_{L,F})$ в терминах ι_k и отношения холловской и педерсеновской проводимостей ионосферы.

Неравномерность распределения узлов $\mathbf{r}_{L,F}$ вдоль линий ι_L видна на рис. 3, на котором также хорошо просматриваются ячейки криволинейной сети, образованные линиями ι_F и ι_L . Можно заметить, что чем выше кривизна силовых линий ι_F , пересекающих линию уровня ι_L , тем плотнее на ι_L располагаются узлы $\mathbf{r}_{L,F}$. На практике такой способ определения плотности узлов более удобен, чем способ, указанный в разделе 2. Зная поведение $j_L(\mathbf{r}_{L,F})$ и $\varphi(\mathbf{r}_{L,F})$, можно рассчитать рас-

пределение магнитного поля холловских токов $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_{m,n})$ в области Ω , выполняя интегрирование как по узлам сети $\mathbf{r}_{m,n}$ области больших (в 1.5 раза линейных) размеров, так и по узлам $\mathbf{r}_{L,F}$ криволинейной координатной сети ι_F и ι_L . Высоту ионосферы примем равной 0.12–0.15 линейных размеров Ω .

На рисунке 5а показано векторное поле холловских токов, инициируемых распределением двух вытекающих ($\iota_1 = 1$, $\iota_3 = 1.9$) и втекающего ($\iota_2 = -1.4$) токов $j_{\parallel}$, проекции которых обозначены закрашенными и незакрашенным ромбиками. Векторное поле горизонтальной составляющей магнитного поля $\tilde{\mathbf{H}}$ на поверхности Земли представлено на рис. 5б. Рисунок 5в отображает распределение вертикальной $\tilde{Z}$, рис. 5г – распределение модуля горизонтальной составляющей $|\tilde{\mathbf{H}}| = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}$ магнитного поля. При увеличении линейных размеров области интегрирования в два раза точность представления $\tilde{Z}$ и $|\tilde{\mathbf{H}}|$ возрастает на 3% и соответствует точности интегрирования в криволинейной системе координат с верхним пределом $\beta \sim 0.5$ и числом узлов $\mathbf{r}_{L,F}$, составляющим $\sim 60\%$ от числа $\mathbf{r}_{m,n}$.

Распределение $|\tilde{\mathbf{H}}| \equiv \tilde{H}(x, y)$ на рис. 5г и распределение направлений векторов $\tilde{\mathbf{H}}$ на рис. 5б в целом неплохо согласуется с результатами моделирования магнитного поля пульсаций полем асимметричных диполей, помещенных на высоте ионосферы [Roldugin and Roldugin, 2008]. Однако, представленная нами модель учитывает заметные возмущения $\tilde{\mathbf{H}}$, связанные с наличием особенностей типа 2 в распределениях поля холловских токов. На рисунке 5г область локализации этих возмущений обведена овалом, нарисованным жирной штриховой линией. Распределение $\tilde{Z}(x, y)$ на рис. 5в вполне согласуется с наблюдением [Петленко и др., 2011б] о совпадении локальных экстремумов вертикальной компоненты магнитного поля с положениями локальных ионосферных источников иррегулярных магнитных пульсаций типа *Pi2*.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Совпадение локальных экстремумов распределения $\tilde{Z}(x, y)$ и областей локализации особенностей типа 1 в распределениях $\iota_L(x, y)$ свидетельствуют о почти индукционном возмущении магнитного поля токами $\mathbf{j}_H$ в окрестности точек проекций $j_{\parallel,k}$ на ионосферу, что подтверждается как линейностью $s_L(\beta)$ при малых значениях β

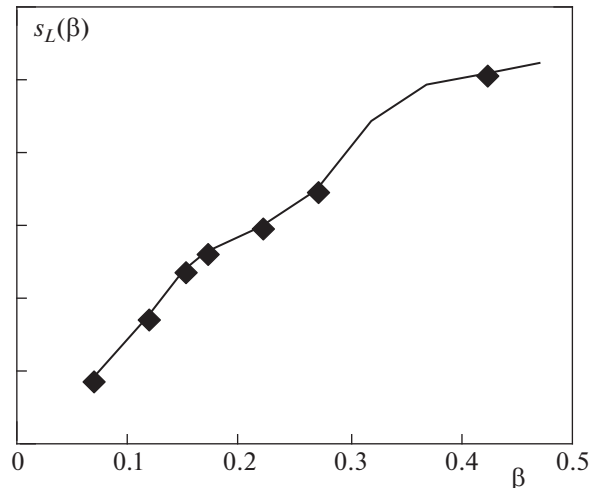


Рис. 4. Зависимость длины s_L от параметра β для линий уровня ι_L на рис. 1б. Значения $s_L(\beta_A), \dots, s_L(\beta_G)$ отмечены ромбиками. При $\beta \lesssim 0.1$ и $\beta \gtrsim 0.4$ функция $s_L(\beta)$ практически линейна.

(рис. 4), так и почти совпадающими направлениями векторов $\mathbf{j}_H$ с касательными j_{τ} к линиям ι_L (рис. 3) вблизи внутренних границ области $\{\mathbf{r}\}$. Асимметричная форма контуров ι_L , соответствующих малым значениям β , видна на рис. 1 и меняется при разных соотношениях интенсивностей продольных токов (рис. 2). Эта асимметрия присуща и распределению $\tilde{H}(x, y)$ на рис. 5г. Два локальных максимума и минимума $\tilde{Z}(x, y)$ на рис. 5в соответствуют двум вытекающим и втекающему токам $j_{\parallel,k}$. Отношения экстремальных значений $\tilde{Z}$, равные ~ 1.8 и -1.3 , примерно совпадают с заданными отношениями интенсивностей ι_k . То есть построенное по экспериментальным данным распределение вертикальной компоненты магнитного поля Z позволяет оценить положения, интенсивности и направления продольных токов.

Алгебраические уравнения линий ι_F и ι_L решаются аналитически при $K = 4, 5$ [Тюрин, 1989а]. Также как и в рассмотренном случае $K = 3$ окрестности внутренних границ области $\{\mathbf{r}\}$ можно рассматривать как локальные ионосферные источники магнитных пульсаций индукционного типа. При этом распределение вертикальной компоненты магнитного поля $\tilde{Z}$ имеет локальные экстремумы вблизи точек проекций $j_{\parallel,k}$, а, следовательно, число локальных особенностей Z -компоненты измеренного поля равно количеству продольных токов, влияющих на измерения. Для последовательности измеренных распределений поля магнитных пульсаций в диапазоне периодов *Pc4*, *Pi2* наблюдаются пульсирующие квазипери-

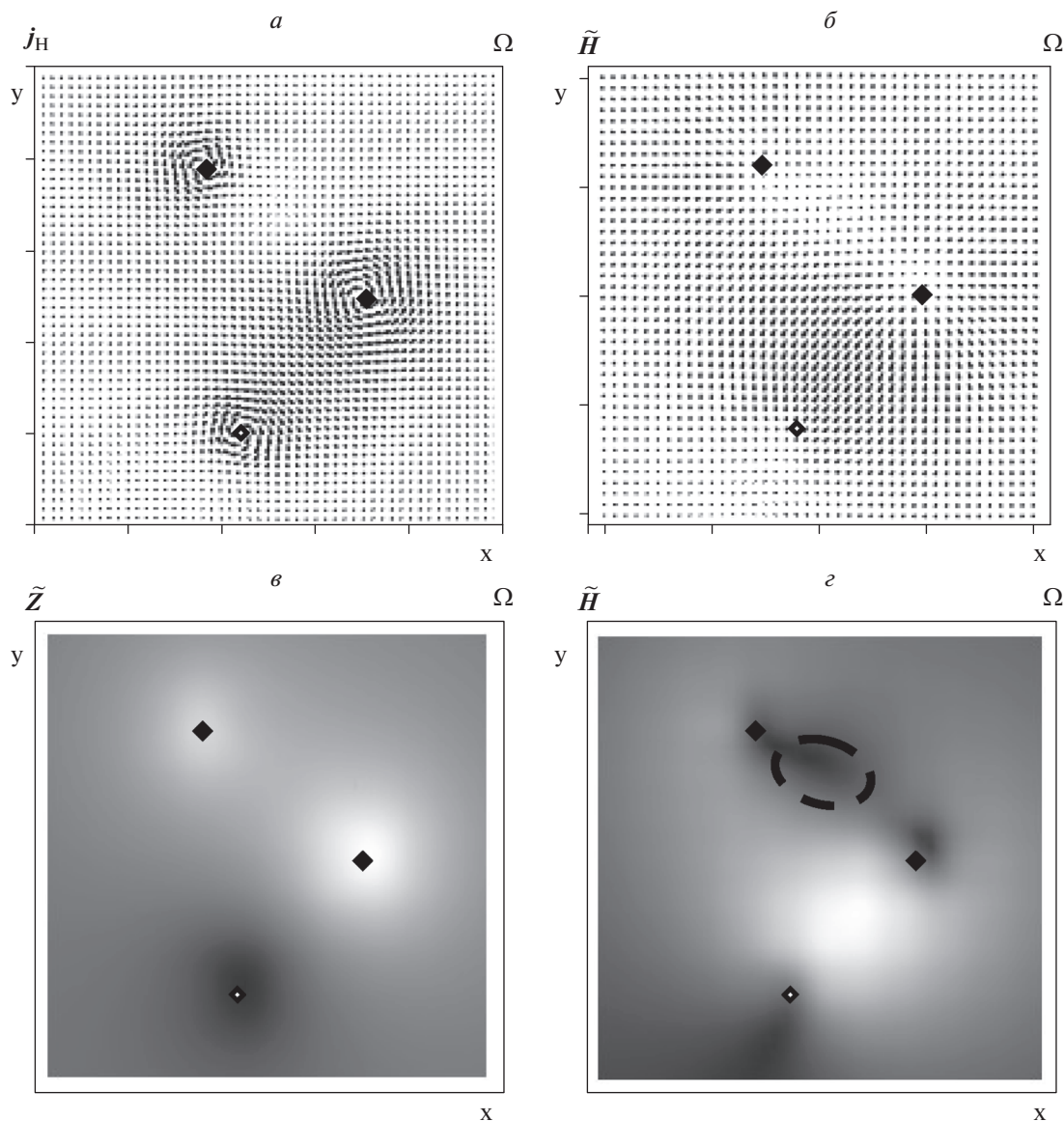


Рис. 5. Распределение (а) поля холловских токов $\mathbf{j}_H$; (б) полной горизонтальной составляющей вычисленного магнитного поля $\tilde{\mathbf{H}}$; (в) вертикальной и (г) модуля полной горизонтальной компонент поля $\tilde{\mathbf{B}}$. Закрашенными ромбиками показаны проекции вытекающих токов $j_{\parallel,k}$, незакрашенным — втекающего. Штриховым овалом отмечена область влияния второго типа особенностей распределения интенсивности холловских токов $\iota_L(x, y)$.

одические изменения интенсивности локальных ионосферных источников, практически не меняющих положения в течение нескольких полупериодов колебаний [Петленко и др., 2011б].

Такая стабильность хорошо согласуется с представлением о сбалансированном магнитном давлении установившихся холловских токов вдоль каждого $j_{\parallel,k}$. Изменение равновесия при смещении $j_{\parallel,k}$ в (x, y) плоскости обеспечивает устойчивость 3D токовой системы и центра тяжести линий ι_L при произвольных отношениях ин-

тенсивностей продольных токов ι_k . Центр тяжести силовых линий меняет положение при относительных изменениях ι_k , что приводит к изменениям в распределениях как направлений, так и интенсивностей векторов $\mathbf{j}_H$. В частности, меняются форма, размеры и положение областей локализации особенностей $\iota_L(x, y)$ типа 2. Идентификация этих особенностей по принадлежности к модели с тем, или иным числом K позволяет визуализировать внешнюю границу области влияния $\{\mathbf{r}\}$ наблюдаемой совокупности ионосферных

источников пульсаций и отследить относительные изменения i_k за ее пределами.

Если расстояния между точками проекций $j_{||,k}$ примерно совпадают с высотой ионосферы, то радиусы кривизны линий i_L и i_F могут оказаться меньше h . Тогда в вычисленном по формулам (2), или (4) распределении $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ могут появиться мелкомасштабные особенности, смещенные относительно особенностей $i_L(\mathbf{r})$. При измерениях на не слишком плотной сети магнитометров такие особенности не всегда проявляются в распределениях $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, что может приводить к значительным ошибкам определения положений и интенсивностей ионосферных источников пульсаций в отдельные моменты времени и существенно затрудняет интерпретацию последовательности распределений $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

5. ВЫВОДЫ

На примере трех продольных токов, координаты точек проекций и интенсивности которых предполагаются известными, показан способ построения распределений интенсивности, направления холловских токов и магнитного поля, индуцированного ими на поверхности Земли. Показано, что особенности распределений интенсивности холловских токов подразделяются на два типа так, что в области локализации особенностей первого типа попадают точки проекций продольных токов и локальные экстремумы вертикальной компоненты магнитного поля. Вытекающим токам соответствуют максимумы, втекающим — минимумы вертикальной компоненты, экстремальные значения магнитного поля пропорциональны их интенсивностям, что объясняется тем, что холловские токи вблизи точек проекций продольных формируют в ионосфере источник индукционного типа.

Установленное соответствие положений особенностей позволяет оценивать количество, положения, интенсивности и направления продольных токов, инициирующих наблюдаемые распределения поля магнитных пульсаций. Наиболее достоверные оценки получаются для магнитных пульсаций типа $Pi2$, $Pc4$ (и более длиннопериодных пульсаций), расстояния между ионосферными источниками которых превышают высоту ионосферы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По определению: резольвентой алгебраического уравнения $f(y) = 0$ степени n является алгебраическое уравнение $g(y) = 0$ с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициен-

тов $f(y)$ такое, что по известным корням этого уравнения корни исходного определяются из решения уравнения степени $< n$.

В терминах (замкнутых относительно композиции и включающих тождественную) групповых перестановок корней многочлена с рациональными коэффициентами устанавливается их симметрия [Чеботарев, 1948, 2009], что позволяет произвести редукцию уравнения к уравнению меньшей степени, и, решив последнее, соотнести найденные корни с корнями исходного. В 1884 г. Клейн [1989] вывел резольвенты уравнений до пятой (включительно) степени, используя формы, инвариантные относительно перестановок корней, и показал, что группы таких перестановок изоморфны группам правильных многогранников.

Согласно [Тюрин, 1989a] аналогом группы икосаэдра для уравнения пятой степени является группа Валентинера G_V (или группа усеченного икосаэдра) для уравнения шестой степени. В однородных координатах проективной плоскости (z_1, z_2, z_3) группа G_V порождается элементами

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/4 & \rho/2 & \rho^2(-1+\sqrt{5})/4 \\ -\rho^2/2 & (-1+\sqrt{5})/4 & \rho(1+\sqrt{5})/4 \\ (-1+\sqrt{5})/4 & \rho^2(-1-\sqrt{5})/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

так что $U^3 = E$, $V^2 = E$, $\rho^3 = 1$, и центр группы — матрицы вида $\rho^m E$. У этой группы есть только одна инвариантная форма шестой степени

$$F = z_1^6 + z_2^6 + z_3^6 + \frac{3}{2}(\eta - 3) \times \\ \times (z_1^4 z_2^2 + z_1^4 z_3^2 + z_2^4 z_1^2 + z_2^4 z_3^2 + z_3^4 z_1^2 + z_3^4 z_2^2) + \\ + 6(\eta + 2) z_1^2 z_2^2 z_3^2,$$

$\eta = \frac{1-i\sqrt{15}}{2}$. На гладкой кривой C_V рода 10, заданной уравнением $F = 0$, действует 360-листное накрытие $C_V \rightarrow \mathbb{P}_1$, разветвленное в точках 0, 1 и ∞ , четырехкратно в 0, двукратно в 1 и пятикратно в ∞ . Базис инвариантов тернарных форм группы G_V состоит из F , $\Phi \propto |\partial^2 F_{z_j, z_k}|$, $\Psi \propto |\partial^2 F_{z_j, z_k}| |\partial \Phi_{z_j}|$ и $X = |\partial \{F, \Phi, \Psi\}_{z_1, z_2, z_3}|$, где форма Ψ , как окаймляющий определитель Φ , пропорциональна кривизне F . Формы F , Φ , Ψ и X связаны уравнением:

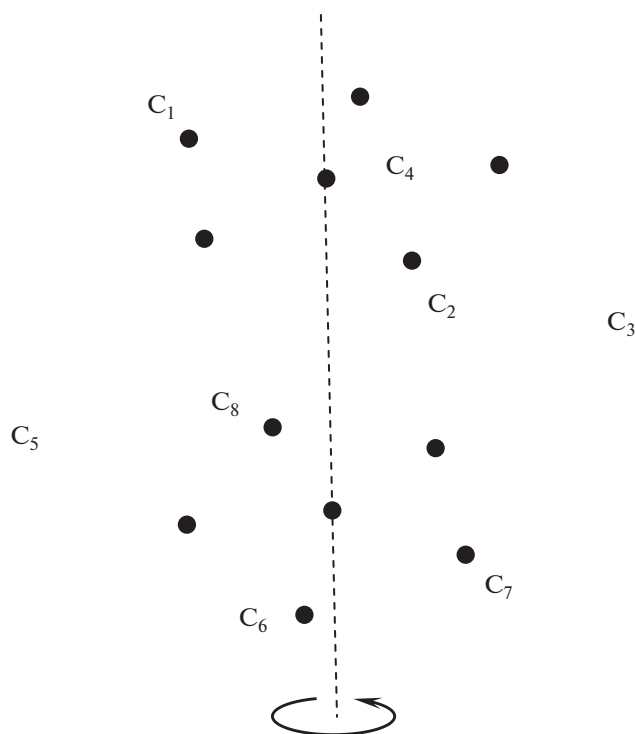


Рис. 6. Вращение куба (каркас которого нарисован более жирной линией) вокруг вертикальной оси (штриховая линия), переставляющее вместе с собственными перестановками куба все вершины додекаэдра, вершины и центры верхней и нижней граней которого отмечены точками. При вращении куба ребро C_1C_2 на верхней грани додекаэдра и C_7C_8 на нижней образуют пентаграммы [Тюрин, 19896].

$$\begin{aligned} X^2 = & \Psi^3 + 3\Psi(3^8\Phi^5 + 2^43^75\Phi^4F^2 + \\ & + 2^43^531\Phi^3F^4 - 2^73^511\Phi^2F^2 + 2^{10}3^55\Phi F^8 + \\ & + 2^{10}31F^{10}) + 2^23^5F(3^65\Phi^7 - 2^23^75\Phi^6F^2 + \\ & + 2^43^3773\Phi^5F^4 - 2^63^511\Phi^4F^3 + 2^{12}3^257\Phi^3F^8 - \\ & - 2^{13}3^25^2\Phi^2F^{10} + 2^{16}3^65\Phi F^{12} - 2^{18}5F^{14}). \end{aligned}$$

Из этого уравнения получается резольвента шестой степени

$$\begin{aligned} & Z^6 + 6(\eta + 2)FZ^5 + \\ & + \left[\frac{3}{2}(\eta - 3)\Phi + 6(11\eta + 1)F^2 \right] Z^4 - \\ & - \left[3(\eta + 15)\Phi F + 4(51\eta + 55)F^3 \right] Z^3 - \\ & - \left[\frac{3}{16}(11\eta + 1)\Phi^2 + \frac{3}{2}(29\eta + 39)\Phi F^2 - \right. \\ & - \left. 3(53\eta - 145)F^4 \right] Z^2 + \left[\frac{1}{16}\Psi + \frac{3}{16}(123\eta - 127) \times \right. \\ & \times \Phi^2 F - 16(7\eta + 5)\Phi F^3 \left. \right] Z + \Phi^3 = 0, \end{aligned}$$

к которой, как показал Klein [1905], приводится произвольное уравнение шестой степени.

Пусть $(y_1, \dots, y_6)$ — корни (по Клейну — образ) этого уравнения, заданный однородными координатами в P^5 . Ковариантные точки определяются тремя функциями шести переменных, заданными как $z_j(y_1, \dots, y_6)$, так что проективизации этой тройки при четной перестановке корней преобразуется соответствующими элементами группы G_V . При этом разрешаются побочные иррациональности — квадратные и кубические корни.

Эквивариантное соответствие получится, если кроме (z_1, z_2, z_3) взять контрагredientные координаты (z'_1, z'_2, z'_3) двойственной плоскости. Coble [1911] нашел форму, инвариантную относительно действия группы Галуа уравнения шестой степени, имеющую бистепень $(1, 1)$ по $\{z\}$ и $\{z'\}$ и степень 4 по $\{y\}$. Точке $(y_1, \dots, y_6) \in P^5$ отвечает матрица M линейного преобразования в координатах (z_1, z_2, z_3) . Взяв собственный вектор M (при этом решается уравнение только третьей степени), получаем искомое отображение $(y_1, \dots, y_6) \rightarrow (z_1, z_2, z_3)$, подстановка которого в F и Φ дает приведенное выражение резольвенты уравнения шестой степени.

Некоторое представление о том, почему найденная [Coble, 1911] форма имеет четвертую степень по $\{y\}$, дает рис. 6. Заметим, что геометрия куба подчинена октаэдральной группе, изоморфной группе подстановок уравнения четвертой степени. Движения куба (вращения вокруг вертикальной оси) и его собственные преобразования переставляют все вершины додекаэдра, собственные перестановки которого входят в группу икосаэдра и группу G_V . Это доказывает полноту построенного решения. Более строгое выкладки приведены в работе [Тюрин, 19896].

Из физических соображений, очевидно, что к уравнению четвертой степени приводится уравнение изолиний (и силовых линий) поля холловских токов в случае двух иницирующих продольных. В этом смысле можно считать, что каждая ветвь вещественного решения уравнения локально порождается парой эквивалентных продольных токов. Такая трактовка имеет место и для уравнений более высокой степени, но для уравнений шестой степени положения эквивалентных токов, соответствующие элементу дуги C_V , связаны с центром его кривизны линейным преобразованием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ. 719 с. 1939.
- Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 304 с. 1978.
- Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука. 336 с. 1989.
- Копытенко Ю.А., Распопов О.М. Некоторые особенности в распределении концентрации плазмы и поля альвеновских скоростей в магнитосфере Земли // Космич. исслед. Т. 6. С. 611–616. 1968.
- Ляцкий В.Б., Плясова-Бакунина Т.А. О влиянии геомагнитных пульсаций $Pc4$ на пульсации $Pc1$ // Геомагнетизм и аэрономия. Т.26. С. 802–806. 1986.
- Петленко А.В., Копытенко Ю.А., Петрова А.А., Петрищев М.С. и рабочая группа BEAR. О возможном влиянии поля региональных магнитных аномалий на положение локальных источников геомагнитных пульсаций // Материалы V всероссийской школы-семинара им. М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям Земли — ЭМЗ-2011. Книга 1. — СПб.: СПбГУ. С. 279–281. 2011а.
- Петленко А.В., Копытенко Ю.А., Мартинес В.А., Пилипенко В.А., Исмаилов В.С. Тонкая структура геомагнитных пульсаций типа $Pi2$ // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 51. С. 592–607. 2011б.
- Ролдугин В.К., Бельская Б.Н., Мальцева Н.Ф. Электрические поля в ионосфере во время пульсирующих сияний // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 11. С. 813–818. 1971.
- Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ФИЗМАТЛИТ. 616 с. 2003.
- Тюрин А.Н. Дополнение Г. В книге Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука. С. 320–324. 1989а.
- Тюрин А.Н. Дополнение В. Там же. С. 301–319. 1989б.
- Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. М.: ОГИЗГИТТЛ. 396 с. 1948.
- Чеботарев Н.Г. Теория Галуа. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ. 152 с. 2009.
- Coble A.B. An application of Moore's cross-ratio group to the solution of the sextic equation // Trans. Am. Math. Soc. V. 12. P. 311–325. 1911.
- Kato Y., Tamao T. Hydromagnetic oscillations in a conducting medium with Hall conductivity under the uniform magnetic field // Sci. Rept. Tohoku Univ. Ser. 5, Geophys. V. 7. P. 147–164. 1956.
- Klein F. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades // Math. Ann. V. 61. P. 50–71. 1905.
- Roldugin V.C., Roldugin A.V. $Pc5$ pulsations on the ground, in the magnetosphere and in the electron precipitation: Event of 19 January 2005 // J. Geophys. Res. V. 90. P. A04222–A04227. 2008.