

УДК 533.95:537.84:551.510.535

СУТОЧНЫЕ ВАРИАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕНЧИВОСТИ $NmF2$ СРЕДНИХ ШИРОТ В ГЕОМАГНИТО-СПОКОЙНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ НИЗКОЙ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

© 2019 г. А. В. Павлов¹, *, Н. М. Павлова¹¹Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (ИЗМИРАН), г. Москва, г. Троицк, Россия

*e-mail: pavlov@izmiran.ru

Поступила в редакцию 19.06.2018 г.

После доработки 27.11.2018 г.

Принята к публикации 24.01.2019 г.

Выполнено исследование суточных вариаций статистических характеристик изменчивости электронной концентрации $NmF2$ максимума слоя $F2$ ионосферы в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности по данным часовых ионозондовых измерений критической частоты слоя $F2$ ионосферы с 1957 г. по 2017 г. над Москвой. Для каждого месяца M года при значениях мирового времени $UT = 0, 1, \dots, 23$ ч вычислены статистические параметры $NmF2$: математическое ожидание $NmF2_E$, наиболее вероятное значение $NmF2_{MP}$, арифметически средняя месячная медиана $NmF2_{MED}$, арифметически среднее $NmF2_A$, стандартные отклонения величины $NmF2$ от $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ и коэффициенты вариаций CV_E , CV_{MP} и CV_{MED} значения $NmF2$ относительно $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ соответственно. Из расчетов следует, что величины CV_E , CV_{MED} и CV_{MP} изменяются в интервалах 12–43%, 12–60% и 13–75% соответственно и в преобладающем большинстве случаев $CV_E(UT, M) < CV_{MED}(UT, M)$ и $CV_E(UT, M) < CV_{MP}(UT, M)$. Если проводится сравнение величины коэффициента CV_E в каждом месяце года для различных моментов времени, то наименьшее значение CV_E изменяется от 12% (июль) до 19% (декабрь) и реализуется в дневных условиях, а наибольшая величина CV_E находится в интервале от 26% (июнь) до 43% (декабрь). Для каждого UT наименьшие и наибольшие значения этого коэффициента в осенние, зимние и весенние месяцы больше, чем в летние месяцы. Найдено, что отличие $NmF2_A(UT, M)$ от $NmF2_E(UT, M)$ не превосходит 0.2%.

DOI: 10.1134/S0016794019040138

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение вариаций ионосферных параметров примерно над одной и той же точкой поверхности Земли в фиксированные день года и момент местного времени (или при близких значениях местного времени и номера дня в году) в геомагнито-спокойных условиях и примерно одинаковом уровне солнечной активности выявило значительную изменчивость от одного дня к другому дня электронной концентрации $NmF2$ максимума слоя $F2$ ионосферы и рассматриваемая изменчивость $NmF2$ и ее источники обсуждались, например, в работах [Forbes et al., 2000; Rishbeth and Mendillo, 2001; Liu and Richmond, 2013; Pavlov and Pavlova, 2016; Pavlov, 2018]. Данная изменчивость $NmF2$ позволяет рассматривать $NmF2$ как случайный параметр, для изучения вариаций которого можно применять статистические методы, описанные, например, в монографиях [Кремер, 2012;

Ross, 2004]. Такой статистический подход был использован авторами работ [Павлов и Павлова, 2012; Pavlov et al., 2010; Pavlov, 2012; Pavlov and Pavlova, 2013, 2014] для исследования зимней и полугодовой аномалий $NmF2$ и аномального явления весенне-осенней асимметрии $NmF2$ вблизи полдня. В работах [Павлов и Павлова, 2015; Pavlov and Pavlova, 2016] были вычислены математическое ожидание $NmF2_E$, арифметически среднее $NmF2_A$, наиболее вероятное (мода) $NmF2_{MP}$ и арифметически средняя месячная медиана $NmF2_{MED}$ электронной концентрации максимума слоя $F2$ ионосферы для геомагнито-спокойных условий каждого месяца года вблизи полдня при низкой солнечной активности по данным измерений критической частоты f_oF2 слоя $F2$ ионосферы средних широт с помощью 18 ионозондов северного географического полушария за период с 1957 по 2015 гг. В этих исследованиях было впервые

показано, что для каждого ионозонда значения $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ могут заметно отличаться друг от друга при фиксированных значениях месяца года и момента мирового времени UT.

Стандартные (среднеквадратичные) отклонения $NmF2$ от $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ и коэффициенты вариации $NmF2$ относительно $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ (относительные стандартные отклонения $NmF2$ от $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$) характеризуют изменчивость $NmF2$ ото дня к другому дню для выбранного месяца года и UT над одной и той же точкой поверхности Земли в геомагнито-спокойных условиях и примерно одинаковом уровне солнечной активности.

Цель настоящей работы – рассчитать для каждого месяца года суточные вариации вышеуказанных статистических характеристик изменчивости $NmF2$ в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности по данным часовых ионозондовых измерений $foF2$ с 1957 г. по 2017 г. над Москвой, изучить найденные зависимости от времени и месяца года рассматриваемых статистических характеристик изменчивости $NmF2$ и показать, что использование математического ожидания $NmF2$ в качестве количественной характеристики множества значений $NmF2$ обеспечивает наилучшее описание рассматриваемых величин $NmF2$ одним единственным статистическим параметром $NmF2$.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И МЕТОД ИХ АНАЛИЗА

В работе используются часовые ионозондовые измерения $foF2$ над Москвой (55.5° N, 37.3° E) в течение периодов 1957–2006 гг. и 2010–2017 гг. (значения $foF2$ отсутствуют для 2007–2009 гг. в используемой базе данных), из базы данных по солнечно-земной физике (Великобритания, https://www.ukssdc.ac.uk/wdccc1/iono_menu.html). Для определения значений $NmF2$ используется связь между $NmF2$ и $foF2$ (см., например, работу [Пиггот и Равер, 1978]). Поэтому для краткости можно считать, что величина $NmF2$ измеряется ионозондом.

Релаксация состава нейтральной верхней атмосферы от возмущенных к спокойным условиям происходит примерно за 7–12 ч в среднем [Hedin, 1987], в то время как полное восстановление состава нейтральной верхней атмосферы на всех высотах выше 120 км может занять несколько суток [Richmond and Lu, 2000]. Поэтому, если в момент измерения $NmF2$ значение трехчасового индекса Kp геомагнитной активности не превышало 3, то это не всегда означает, что $NmF2$ соответствует геомагнито-спокойным условиям. Следуя подходу, изложенному в работах [Павлов и Павлова, 2012, 2015; Pavlov et al., 2010; Pavlov, 2012; Pavlov

and Pavlova, 2013, 2014, 2016], в настоящей работе мы рассматриваем величину $NmF2$ как геомагнито-спокойную электронную концентрацию максимума слоя $F2$ ионосферы, если $Kp \leq 3$ в течение 24-часового периода, предшествующего моменту измерения $NmF2$, и в момент измерения $NmF2$.

Электронная концентрация максимума слоя $F2$ ионосферы зависит от потока ионизирующего солнечного излучения в рассматриваемый день, а величина этого потока коррелирует с индексом солнечной активности $F10.7$ (среднесуточный поток излучения Солнца на длине волны 10.7 см) для исследуемого дня и арифметически средним значением $\langle F10.7 \rangle$ индекса $F10.7$ за 81 день с центром в рассматриваемый день [Richards et al., 1994]. С другой стороны, изменения $NmF2$ в цикле солнечной активности также связаны с изменениями температуры и концентраций нейтральных компонентов, зависимость которых от солнечной активности определяется вариациями индексов $F10.7p$ (величина $F10.7$ в день, предшествующий рассматриваемому дню) и $\langle F10.7 \rangle$ [Hedin, 1987; Picone et al., 2002]. Поэтому зависимость $NmF2$ от солнечной активности можно приближенно описать в терминах изменений индексов $F10.7$, $F10.7p$ и $\langle F10.7 \rangle$. В настоящей работе рассматриваются значения $NmF2$, измеренные ионозондом над Москвой при низкой солнечной активности, когда каждый из индексов $F10.7$, $F10.7p$ и $\langle F10.7 \rangle$ изменяется в пределах от 65 до 85 в единицах измерения 10^{-22} Вт м $^{-2}$ Гц $^{-1}$.

Результаты измерений электронной концентрации максимума слоя $F2$ ионосферы для геомагнито-спокойных условий при низкой солнечной активности сортируются в соответствии с номером месяца в году и выбираются только $NmF2$, измеренные при UT = 0, 1, ..., 23 ч. Связь местного солнечного времени SLT с UT определяется соотношением $SLT = UT + \lambda/15$, где λ – географическая долгота в градусах, а единицы измерения SLT и UT – часы.

В качестве количественных характеристик, обеспечивающих наилучшее описание множества наблюдений рассматриваемой случайной величины X параметром Y , в математической статистике используются математическое ожидание, арифметически среднее, наиболее вероятное значение и медиана X [Кремер, 2012; Ross, 2004]. Стандартное отклонение и коэффициент вариации X обычно применяются для определения изменчивости (меры рассеяния) X относительно Y [Кремер, 2012; Ross, 2004]. Такой подход используется и в настоящей работе для $X = NmF2$.

Рассмотрим выбранную совокупность геомагнито-спокойных значений $NmF2(UT, M)$ при низкой солнечной активности и фиксированных значениях UT и месяце M года. Введем интерва-

лы изменения $NmF2(UT, M)$ одной и той же длины $\Delta NmF2$:

$$NmF2_k(UT, M) - 0.5\Delta NmF2 < NmF2(UT, M) \leq NmF2_k(UT, M) + 0.5\Delta NmF2, \quad (1)$$

где $NmF2_k(UT, M) = (k - 0.5)\Delta NmF2$, $k = 1, 2, \dots, K$, K — число используемых интервалов $\Delta NmF2$.

В этом случае вероятность $P_k(UT, M)$ появления $NmF2(UT, M)$ в интервале (1) вычисляется по формуле

$$P_k(UT, M) = F_k(UT, M)/F(UT, M), \quad (2)$$

где $F_k(UT, M)$ — число измерений $NmF2(UT, M)$ в интервале (1) для выбранных значений k , UT и M , $F(UT, M)$ — полное число измерений $NmF2(UT, M)$ во всех интервалах (1) при фиксированных значениях UT и M .

Вероятность $P_k(UT, M)$ максимальна в промежутке изменения $NmF2$ от $NmF2_{MP}(UT, M) - 0.5\Delta NmF2$ до $NmF2_{MP}(UT, M) + 0.5\Delta NmF2$.

При заданных значениях UT и M математическое ожидание $NmF2$ определяется выражением

$$NmF2_E(UT, M) = \sum_{k=1}^K NmF2_k(UT, M)P_k(UT, M). \quad (3)$$

Если UT и M фиксированы, то арифметически среднее значение $NmF2_A(UT, M)$ электронной концентрации максимума слоя $F2$ ионосферы равно сумме измеренных значений $NmF2(UT, M)$ во всех интервалах (1), деленной на величину $F(UT, M)$.

Арифметически средняя месячная медиана $NmF2_{MED}(UT, M)$ электронной концентрации максимума слоя $F2$ ионосферы определяется как сумма месячных медиан $NmF2^*(UT, M)$, деленная на общее число медиан для данного набора измерений ионозонда при фиксированных UT и M . Значение $NmF2^*(UT, M)$ вычисляется из измеренной медианы $foF2^*(UT, M)$ критической частоты $foF2(UT, M)$ слоя $F2$ ионосферы, используя связь между $NmF2$ и $foF2$ (см., например, [Пиггот и Равер, 1978]). Для нахождения $foF2^*$ значения $foF2$, измеренные ионозондом в течение месяца M при данном UT сортируются в порядке возрастания их амплитуд, формируя последовательность $foF2$. При нечетном количестве $foF2(UT, M)$ медиана $foF2^*(UT, M)$ равна $foF2(UT, M)$, расположенной в середине этой последовательности. Если количество $foF2$ в рассматриваемой последовательности нечетно, то $foF2^*$ вычисляется как арифметически среднее значение двух срединных величин данной последовательности $foF2$. Значения индексов $F10.7$, $F10.7p$ и $\langle F10.7 \rangle$ для дня, соответствующего срединной $foF2(UT, M)$, или двух дней в случае двух срединных $foF2(UT, M)$ определяют уровень солнечной активности для $NmF2^*(UT, M)$. Отметим, что измерения

$foF2(UT, M)$ отсутствуют для некоторых дней и при малом количестве измерений $foF2(UT, M)$ в месяце найденную величину $foF2^*(UT, M)$ нельзя рассматривать в качестве месячной медианы $foF2(UT, M)$. В настоящей работе и, например, в работах [Павлов и Павлова, 2015; Pavlov and Pavlova, 2016] вычисленная $foF2^*(UT, M)$ рассматривается как месячная медиана $foF2(UT, M)$, если число измерений $foF2(UT, M)$ больше или равно 20.

Стандартные отклонения σ_E , σ_{MP} и σ_{MED} величины $NmF2$ соответственно от $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ в течение месяца M при данном UT имеют вид

$$\sigma_E(UT, M) = \left\{ \sum_{k=1}^K P_k(UT, M) [NmF2_k(UT, M) - NmF2_E(UT, M)]^2 \right\}^{0.5}, \quad (4)$$

$$\sigma_{MP}(UT, M) = \left\{ \sum_{k=1}^K P_k(UT, M) [NmF2_k(UT, M) - NmF2_{MP}(UT, M)]^2 \right\}^{0.5}, \quad (5)$$

$$\sigma_{MED}(UT, M) = \left\{ \sum_{k=1}^K P_k(UT, M) [NmF2_k(UT, M) - NmF2_{MED}(UT, M)]^2 \right\}^{0.5}. \quad (6)$$

Если значения M и UT фиксированы, то выраженные в процентах коэффициенты вариации CV_E , CV_{MP} и CV_{MED} величины $NmF2$ относительно $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ вычисляются по формулам

$$CV_E(UT, M) = 100\sigma_E(UT, M)/NmF2_E(UT, M), \quad (7)$$

$$CV_{MP}(UT, M) = 100\sigma_{MP}(UT, M)/NmF2_{MP}(UT, M), \quad (8)$$

$$CV_{MED}(UT, M) = 100\sigma_{MED}(UT, M)/NmF2_{MED}(UT, M). \quad (9)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Статистическое исследование распределения $NmF2$ по амплитуде проводится при $\Delta NmF2 = 10^3 \text{ см}^{-3}$ и $K = 1100$. Для приведенных в п. 2 промежутков времени часовых ионозондовых измерений $foF2$, используемых в исследовании вариаций гемагнито-спокойных $NmF2$ в условиях (2) низкой солнечной активности, величина $F(UT, M) \geq 119$. Используемые величины $F(UT, M)$ доста-

точно велики для выполнения закона больших чисел и корректного вычисления рассматриваемых статистических параметров $NmF2$ [Gatti, 2005]. Проведенное статистическое исследование показало, что при фиксированном времени и месяце года математическое ожидание и арифметически среднее $NmF2$ отличаются не более чем на 0.2%.

3.1. Суточные вариации $NmF2_E(UT, M)$, $NmF2_{MED}(UT, M)$ и $NmF2_{MP}(UT, M)$

В работе были выполнены расчеты суточных вариаций $NmF2_E(UT, M)$, $NmF2_{MED}(UT, M)$ и $NmF2_{MP}(UT, M)$ для всех месяцев года. На рисунке 1 представлены результаты расчетов суточных вариаций математического ожидания $NmF2$ (сплошные кривые), арифметически средней месячной медианы $NmF2$ (штриховые кривые) и наиболее вероятного $NmF2$ (пунктирные кривые) для января (верхняя левая панель), апреля (нижняя левая панель), июля (верхняя правая панель) и октября (нижняя правая панель). Из сравнения сплошных, штриховых и пунктирных кривых каждой панели рисунков видно, что эти статистические параметры $NmF2$ могут существенно отличаться друг от друга.

Так же, как и в работе [Pavlov and Pavlova, 2016], найдем выраженное в процентах отличие между двумя статистическими параметрами А и В одного типа, характеризующее электронную концентрацию максимума слоя $F2$ ионосферы при заданных значениях мирового времени и месяца года:

$$Z(A, B) = 200 \times |A - B| / (A + B). \quad (10)$$

Из проведенных расчетов следует, что при фиксированном значениях UT и M $0.03\% \leq Z(NmF2_E, NmF2_{MED}) \leq 25\%$, $0\% \leq Z(NmF2_E, NmF2_{MP}) \leq 39\%$ и $0.06\% \leq Z(NmF2_{MED}, NmF2_{MP}) \leq 40\%$. Таким образом, рассматриваемые количественные статистические характеристики, каждая из которых может обеспечить описание множества наблюдений рассматриваемой случайной величины $NmF2$, могут существенно отличаться друг от друга. Кроме того, и результаты решения рассматриваемой задачи с участием статистической характеристики $NmF2$ могут зависеть от выбора между $NmF2_E$, $NmF2_{MED}$ и $NmF2_{MP}$.

3.2. Суточные вариации $\sigma_E(UT, M)$, $\sigma_{MED}(UT, M)$ и $\sigma_{MP}(UT, M)$

Суточные вариации $\sigma_E(UT, M)$, $\sigma_{MED}(UT, M)$ и $\sigma_{MP}(UT, M)$ вычислялись для всех месяцев года. Из расчетов следует, что максимальные значения $Z(\sigma_E, \sigma_{MED})$, $Z(\sigma_E, \sigma_{MP})$ и $Z(\sigma_{MED}, \sigma_{MP})$ составляют 22, 39 и 34% соответственно, т.е. стандартные отклонения $\sigma_E(UT, M)$, $\sigma_{MED}(UT, M)$ и $\sigma_{MP}(UT, M)$ могут существенно отличаться друг от друга. Этот

вывод можно также сделать из сравнения сплошных (σ_E), штриховых (σ_{MED}) и штрихпунктирных (σ_{MP}) кривых рис. 2 для января (верхняя левая панель), апреля (нижняя левая панель), июля (верхняя правая панель) и октября (нижняя правая панель).

Следует отметить, что математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от любой постоянной величины превосходит или совпадает с математическим ожиданием квадрата отклонения X от математического ожидания X [Кремер, 2012; Ross, 2004]. В соответствии с этим общим выводом математической статистики вычисленные значения σ_E , σ_{MED} и σ_{MP} удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \sigma_E(UT, M) &\leq \sigma_{MED}(UT, M), \\ \sigma_E(UT, M) &\leq \sigma_{MP}(UT, M) \end{aligned} \quad (11)$$

для всех месяцев года. Рисунок 2 иллюстрирует выполнение этих условий для января, апреля, июля и октября. Таким образом, абсолютная величина изменчивости $NmF2$ минимальна при использовании $NmF2_E(UT, M)$.

3.3. Суточные вариации $NmF2_E(UT, M)$, $NmF2_{MED}(UT, M)$ и $NmF2_{MP}(UT, M)$

Стандартные отклонения $\sigma_E(UT, M)$, $\sigma_{MED}(UT, M)$ и $\sigma_{MP}(UT, M)$ дают абсолютную оценку меры разброса электронной концентрации максимума слоя $F2$ ионосферы относительно $NmF2_E(UT, M)$, $NmF2_{MED}(UT, M)$ и $NmF2_{MP}(UT, M)$ соответственно. Чтобы определить, насколько разброс $NmF2$ велик или мал относительно самих значений этих статистических параметров независимо от их величины, используются коэффициенты вариаций $CV_E(UT, M)$, $CV_{MED}(UT, M)$ и $CV_{MP}(UT, M)$. Кроме того, статистические параметры $NmF2_E$, $NmF2_{MED}$ и $NmF2_{MP}$ зависят от времени и месяца года. Поэтому коэффициенты вариаций $NmF2$, являющиеся относительными показателями изменчивости $NmF2$, необходимы и для сопоставления степени этой изменчивости при различных значениях времени и месяца года.

На рисунках 3 и 4 представлены результаты расчетов суточных вариаций $CV_E(UT, M)$ (сплошные кривые), $CV_{MED}(UT, M)$ (штриховые кривые) и $CV_{MP}(UT, M)$ (пунктирные кривые) для каждого месяца года. Вычисленные значения этих статистических характеристик $NmF2$ изменяются в промежутках $11.8\% \leq CV_E \leq 43.3\%$, $11.7\% \leq CV_{MED} \leq 59.5\%$ и $12.7\% \leq CV_{MP} \leq 74.6\%$. Из проведенных расчетов следует, что при фиксированных значениях времени и месяца года $0.02\% \leq Z(CV_E, CV_{MED}) \leq 43\%$, $0\% \leq Z(CV_E, CV_{MP}) \leq 73\%$ и $0\% \leq Z(CV_{MED}, CV_{MP}) \leq 63\%$. Видно, что коэффициенты вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания

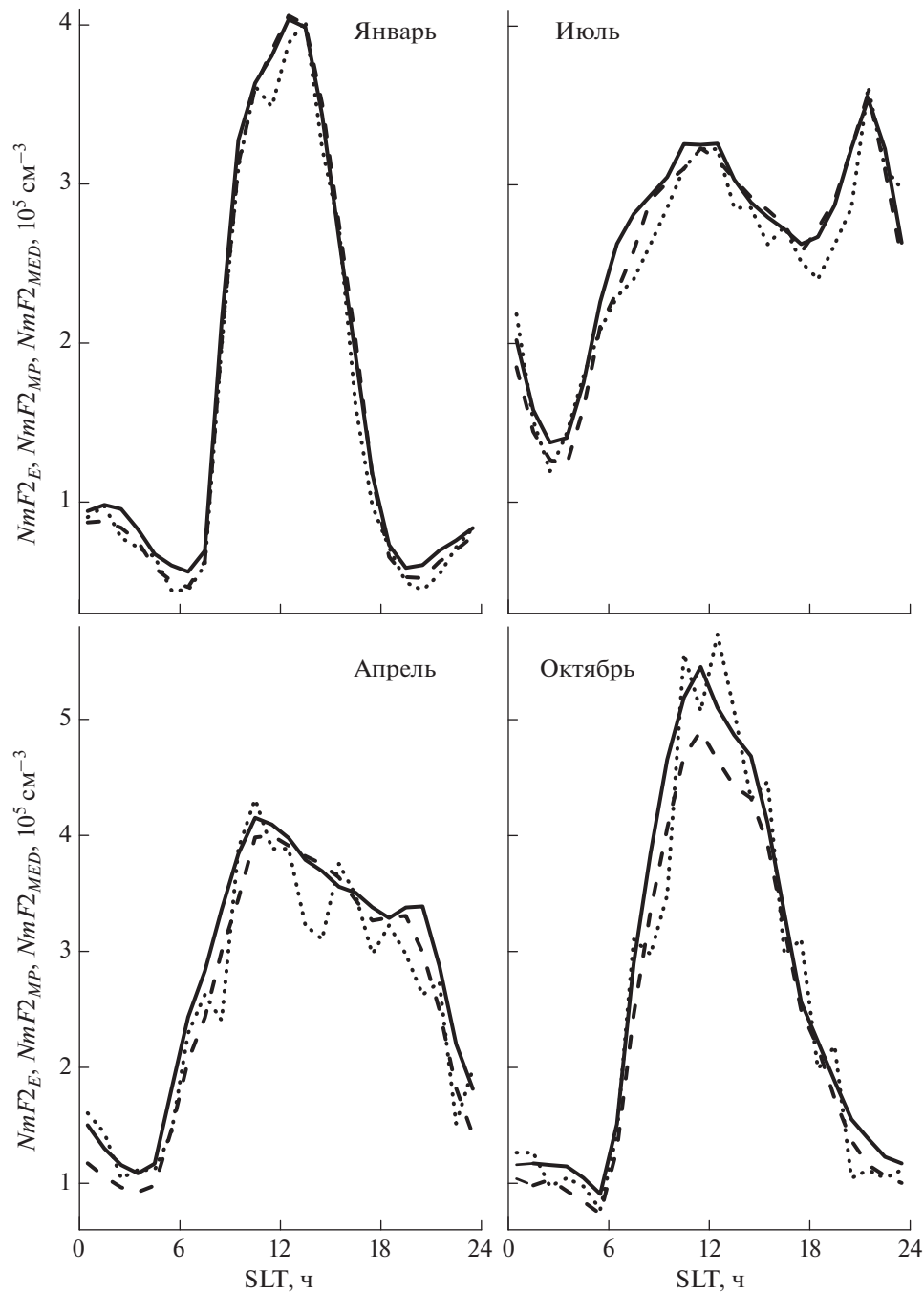


Рис. 1. Суточные вариации математического ожидания $NmF2$ (сплошные кривые), наиболее вероятного $NmF2$ (пунктирные кривые) и арифметически средней месячной медианы $NmF2$ (штриховые кривые) для января (верхняя левая панель), апреля (нижняя левая панель), июля (верхняя правая панель) и октября (нижняя правая панель).

$NmF2$, арифметически средней месячной медианы $NmF2$ и наиболее вероятного значения $NmF2$ могут существенно отличаться друг от друга. В преобладающем большинстве случаев значение $CV_E(UT, M)$ меньше, чем величина $CV_{MED}(UT, M)$ или $CV_{MP}(UT, M)$. Если величина $CV_E(UT, M)$ больше, чем значение $CV_{MED}(UT, M)$ или $CV_{MP}(UT, M)$, то отличие между коэффициентами $CV_E(UT, M)$ и

$CV_{MED}(UT, M)$ или между значениями $CV_E(UT, M)$ и $CV_{MP}(UT, M)$ не значительно в сравнении с их величинами (см. рис. 3 и 4).

Вычисленные значения CV_E и CV_{MED} позволяют определить для каждого используемого момента времени UT арифметически средние для зимних (декабрь, январь, февраль), весенних (март, апрель, май), летних (июнь, июль, август)

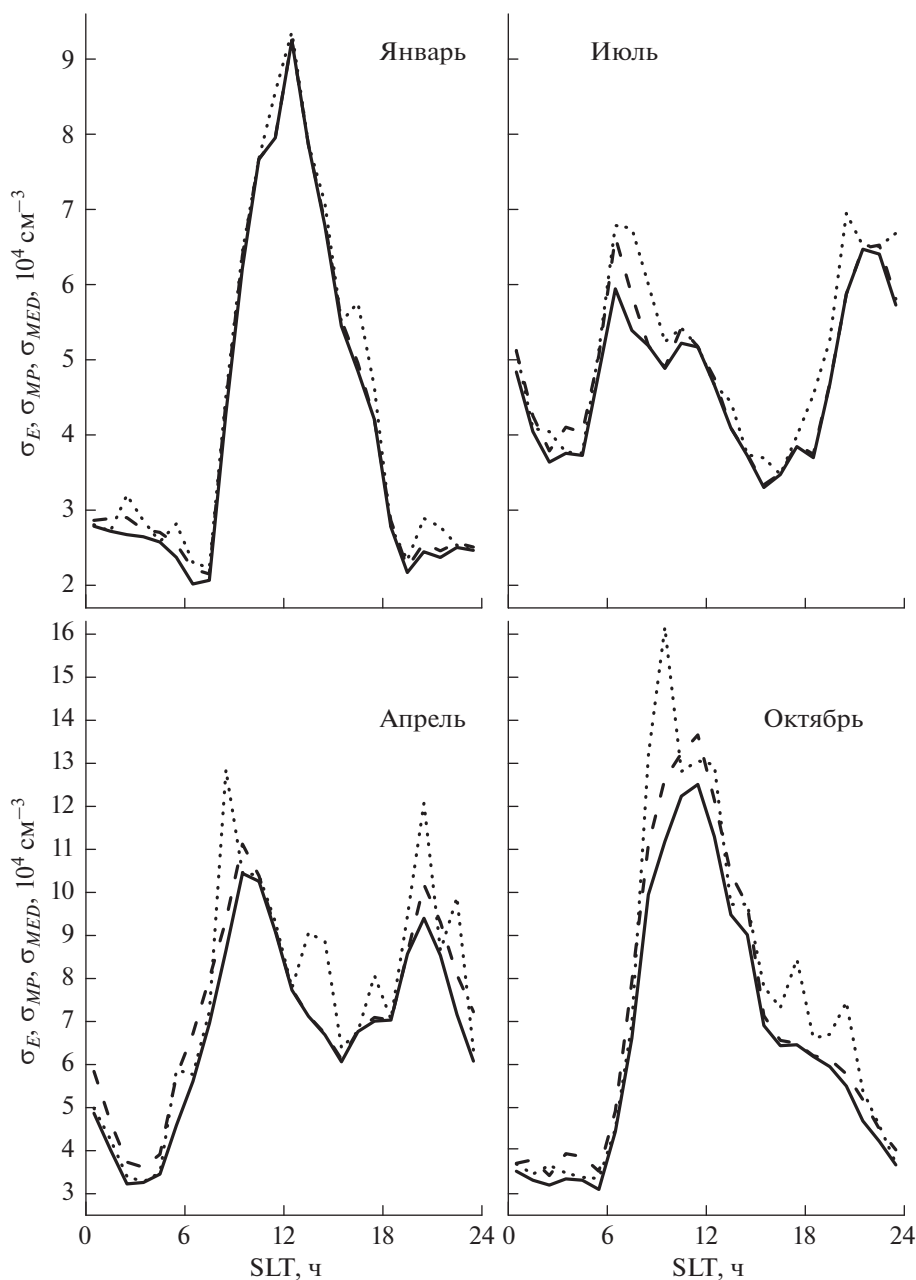


Рис. 2. Суточные вариации σ_E (UT, М) (сплошные кривые), σ_{MP} (UT, М) (пунктирные кривые) и σ_{MED} (UT, М) (штриховые кривые) для января (верхняя левая панель), апреля (нижняя левая панель), июля (верхняя правая панель) и октября (нижняя правая панель).

и осенних (сентябрь, октябрь, ноябрь) условий коэффициенты $\langle CV_E \rangle_S$ и $\langle CV_{MED} \rangle_S$ вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ и арифметически средней месячной медианы $NmF2$, соответственно. Сравним коэффициенты $\langle CV_E \rangle_S$ и $\langle CV_{MED} \rangle_S$ в разные сезоны года вблизи полночи и полдня для 0:29 SLT и 12:29 SLT, соответственно. Из расчетов следует, что вблизи полночи $\langle CV_E \rangle_S = 29.2, 29.4, 24.7, 28.2\%$ и $\langle CV_{MED} \rangle_S = 33.3, 41.3, 30.3, 33.9\%$, а вблизи полдня $\langle CV_E \rangle_S =$

$= 21.8, 19.0, 15.6, 19.1\%$ и $\langle CV_{MED} \rangle_S = 22.0, 19.8, 16.1, 21.5\%$ для зимнего, весеннего, летнего и осеннего сезонов года, соответственно. Если проводится сравнение коэффициентов $\langle CV_{MED} \rangle_S$ и $\langle CV_E \rangle_S$ при фиксированном сезоне года, то величина $\langle CV_{MED} \rangle_S - \langle CV_E \rangle_S$ изменяется от 4.1% (зима) до 11.9% (весна) для 0:29 SLT и от 0.2% (зима) до 1.4% (осень) для 12:29 SLT. Для каждого сезона года значение $\langle CV_{MED} \rangle_S - \langle CV_E \rangle_S$ уменьшается при переходе от 0:29 SLT к 12:29 SLT.

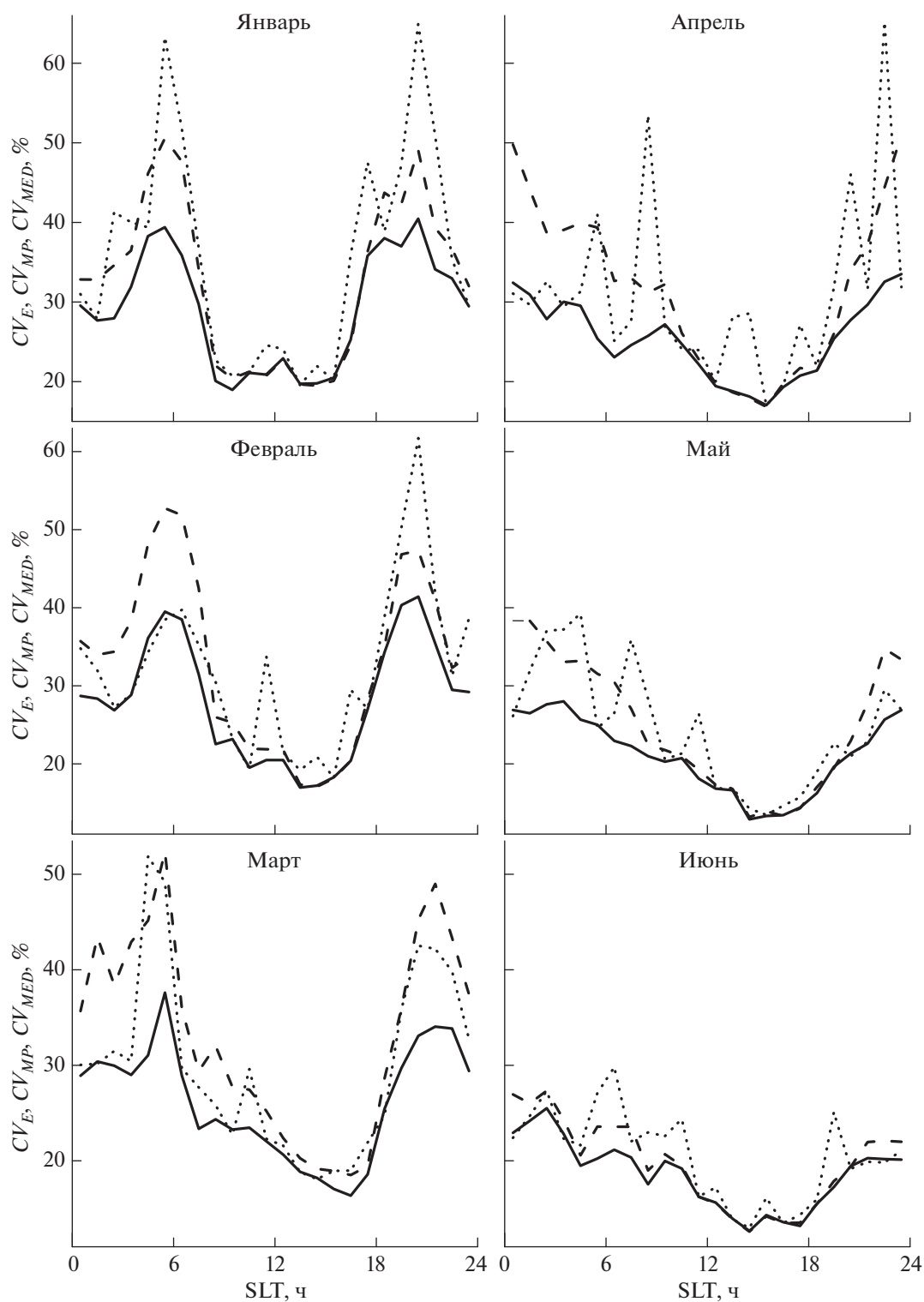


Рис. 3. Суточные вариации $CV_E(UT, M)$ (сплошные кривые), $CV_{MP}(UT, M)$ (пунктирные кривые) и $CV_{MED}(UT, M)$ (штриховые кривые) для января (верхняя левая панель), февраля (средняя левая панель), марта (нижняя левая панель), апреля (верхняя правая панель), мая (средняя правая панель) и июня (нижняя правая панель).

Проведенное исследование показало, что наименьшие значения 19.0, 17.0, 16.4, 17.0, 12.9, 12.7, 11.8, 13.9, 15.3, 16.8, 19.2 и 19.4% коэффициента

вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ реализуются в 9:29, 13:29, 16:29, 15:29, 14:29, 14:29, 15:29, 17:29, 14:29, 15:29, 12:29 и

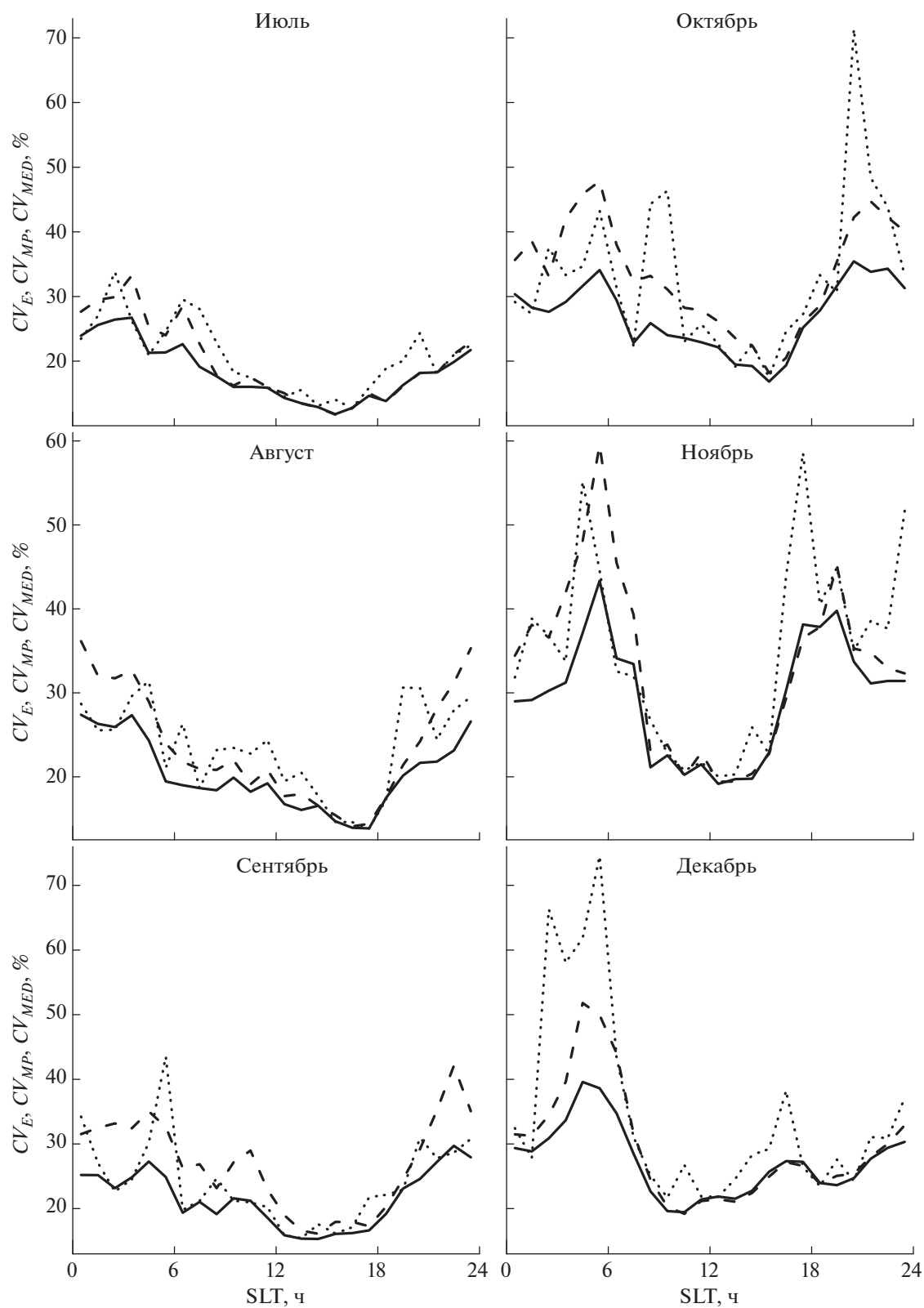


Рис. 4. Суточные вариации CV_E (UT, М) (сплошные кривые), CV_{MP} (UT, М) (пунктирные кривые) и CV_{MED} (UT, М) (штриховые кривые) для июля (верхняя левая панель), августа (средняя левая панель), сентября (нижняя левая панель), октября (верхняя правая панель), ноября (средняя правая панель) и декабря (нижняя правая панель).

10:29 SLT (т.е. в дневных условиях) для января, февраля, марта, апреля, мая, июня, июля, августа, сентября, октября, ноября и декабря соответственно и изменяются в пределах от 11.8% (июль) до 19.4% (декабрь). Видно, что эти наименьшие значения CV_E в осенние, зимние и весенние месяцы больше, чем в летние месяцы. При изменении месяца года последовательно от января до декабря наибольшие в каждом месяце года значения 40.5, 41.4, 37.6, 33.5, 28.0, 25.5, 26.7, 27.4, 29.7, 35.4, 43.3 и 39.6% коэффициента вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ соответствуют 20:29, 20:29, 5:29, 23:29, 3:29, 2:29, 3:29, 0:29, 22:29, 20:29, 5:29 и 4:29 SLT. Таким образом, рассматриваемые наибольшие значения CV_E находятся в пределах от 25.5% (июнь) до 43.3% (декабрь) и их величины в осенние, зимние и весенние месяцы больше, чем в летние месяцы.

3.4. Зависимости коэффициента $CV_E(UT, M)$ от месяца года

На рисунках 5 и 6 приведены вычисленные зависимости коэффициента $CV_E(UT, M)$ от месяца года при фиксированных значениях SLT. Коэффициент вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ принимает наименьшее значение в июне (0:29, 1:29, 3:29, 4:29, 8:29, 14:29, 17:29 и 23:29 SLT), в июле (9:29, 10:29, 11:29, 12:29, 13:29, 15:29, 16:29, 18:29, 19:29, 20:29, 21:29 и 22:29 SLT), в августе (5:29, 6:29 и 7:29 SLT) и в сентябре (2:29 SLT). Таким образом, если изменяется месяц года при заданном значении UT, то коэффициент $CV_E(UT, M)$ достигает наименьшего значения в июне, июле, августе и сентябре (наименьшая изменчивость $NmF2$).

При изменении месяца года последовательно от января до декабря вычисленные среднеарифметические по времени ($UT = 0, 1, \dots, 23$ ч) значения коэффициента вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ равны 29.1, 28.1, 26.1, 25.3, 21.0, 18.5, 18.4, 20.3, 21.6, 26.9, 29.5 и 27.2% соответственно. Таким образом, арифметически среднее по времени значение CV_E (среднесуточный коэффициент CV_E), характеризующее среднюю изменчивость $NmF2$ в выбранном месяце года, уменьшается при переходе от зимних, весенних и осенних месяцев к летним месяцам года.

Максимум слоя $F2$ ионосферы расположен на высотах более 200 км (см., например, [Schunk and Nagy, 2009]). Моменты времени восхода и захода Солнца над Москвой на высоте 200 км можно определить с помощью алгоритмов [Павлов и Павлова, 2010; Pavlov et al., 2010] для каждого дня года. Из проведенных расчетов следует, что среди моментов времени измерений $NmF2$, используемых в настоящей работе, значения 7:29, 8:29, ...,

16:29 SLT соответствуют дневным условиям на высоте максимума слоя $F2$ ионосферы для всех месяцев года. При изменении месяца года последовательно от января до декабря вычисленный среднеарифметический для данных дневных моментов времени коэффициент $CV_E(UT, M)$ равен 21.9, 21.0, 20.8, 21.7, 17.5, 16.3, 15.0, 17.2, 18.0, 21.6, 23.1, 23.1%, соответственно. Видно, что арифметически среднее значение $CV_E(UT, M)$ уменьшается при переходе от зимних, весенних и осенних к летним месяцам в промежутке дневного времени от 7:29 SLT до 16:29 SLT.

Для определения изменчивости $NmF2$ в работах [Araujo-Pradere et al., 2004, 2005] были использованы измерения $foF2$ 75 ионозондами с июня 1981 г. по июнь 1988 г. Данные были распределены на группы по областям геомагнитных широт $0^\circ-20^\circ$, $20^\circ-40^\circ$, $40^\circ-60^\circ$, $60^\circ-80^\circ$. В каждой группе исследование изменчивости $NmF2$ проводилось отдельно для пяти периодов времени: 21 мая–20 июля в северном полушарии и 21 ноября–20 января в южном полушарии, 21 апреля–20 мая и 21 июля–20 августа, 21 февраля–20 апреля и 21 августа–20 октября, 21 января–20 февраля и 21 октября–20 ноября, 21 ноября–20 января в северном полушарии и 21 мая–20 июля в южном полушарии. Сортировка данных также проводилась по уровню геомагнитной активности (спокойные условия и три уровня возмущенных условий). Авторы работы [Araujo-Pradere et al., 2005] определили средние коэффициенты CV_{AVR} вариаций $NmF2$ для каждой из вышеприведенных подгрупп. Для группы $40^\circ-60^\circ$, соответствующей геомагнитной широте ионозонда Москвы, в геомагнитно-спокойных условиях величина CV_{AVR} равна 14, 16, 17, 17, 19% для вышеуказанных периодов времени, соответственно [Araujo-Pradere et al., 2005].

Вычисленные по данным ионозонда Москвы для каждого месяца года значения среднесуточного коэффициента CV_E вариаций $NmF2$ в геомагнитно-спокойных условиях при низкой солнечной активности позволили определить среднеарифметическую величину CV_E^* этого коэффициента для периодов времени июнь–июль, май и август, март–апрель и сентябрь–октябрь, февраль и ноябрь, декабрь–январь, близких к периодам времени, использованным при расчетах CV_{AVR} : $CV_E^* = 18, 21, 25, 29, 28\%$ соответственно. Видно, что коэффициент CV_{AVR} заметно меньше коэффициента CV_E^* .

В период времени с 1 июня 1981 г. по 1 июня 1988 г. индекс $F10.7$ солнечной активности изменялся от 65.8 до 302.9. Сортировка данных по уровням солнечной активности не проводилась в работе [Araujo-Pradere et al., 2005]. Поэтому нельзя считать, что коэффициент CV_{AVR} вычислен для

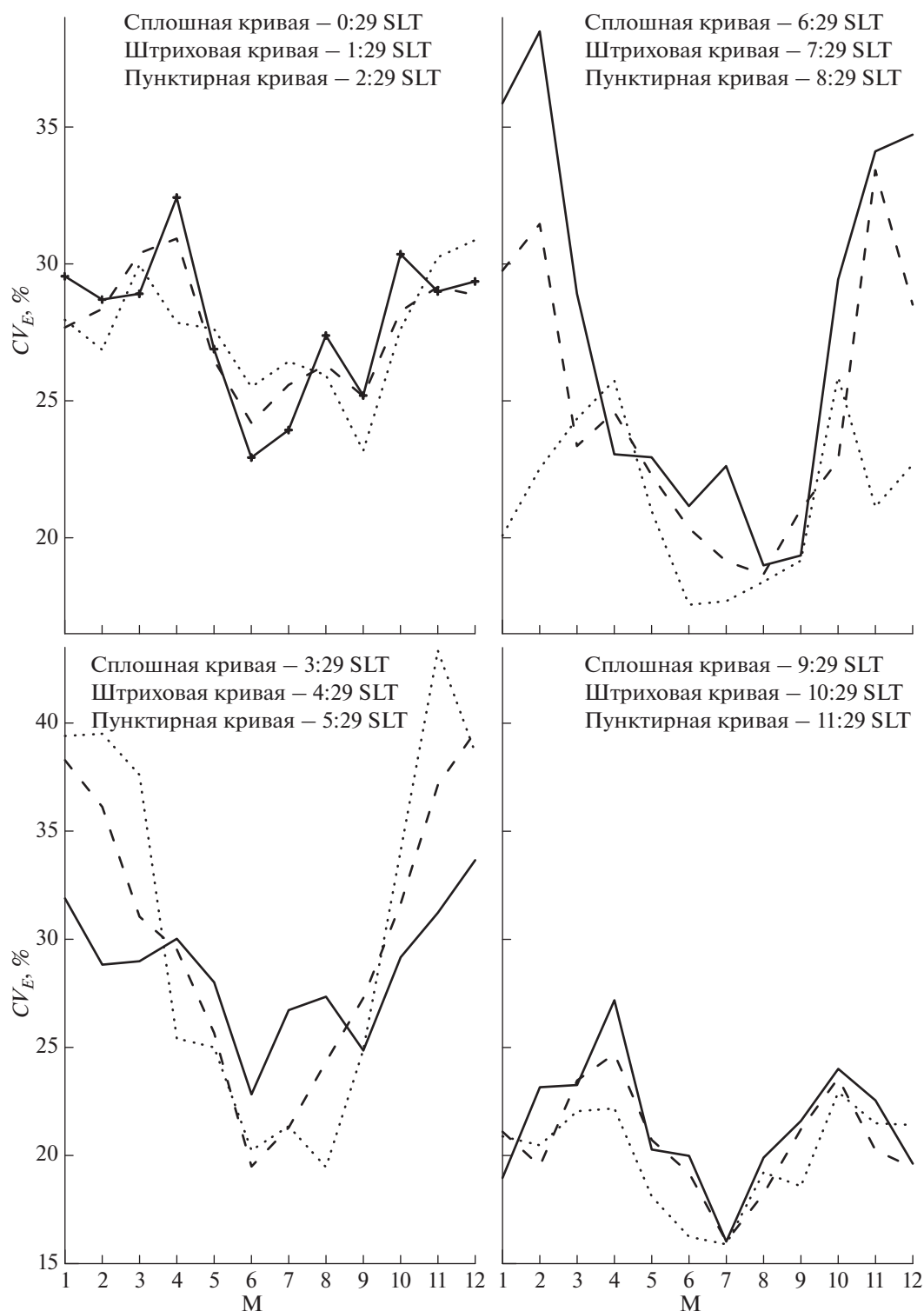


Рис. 5. Зависимости от месяца года $CV_E(UT, M)$ в 0:29, 1:29 и 2:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на верхней левой панели); 3:29, 4:29 и 5:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на нижней левой панели); 6:29, 7:29 и 8:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на верхней правой панели); 9:29, 10:29 и 11:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на нижней правой панели).

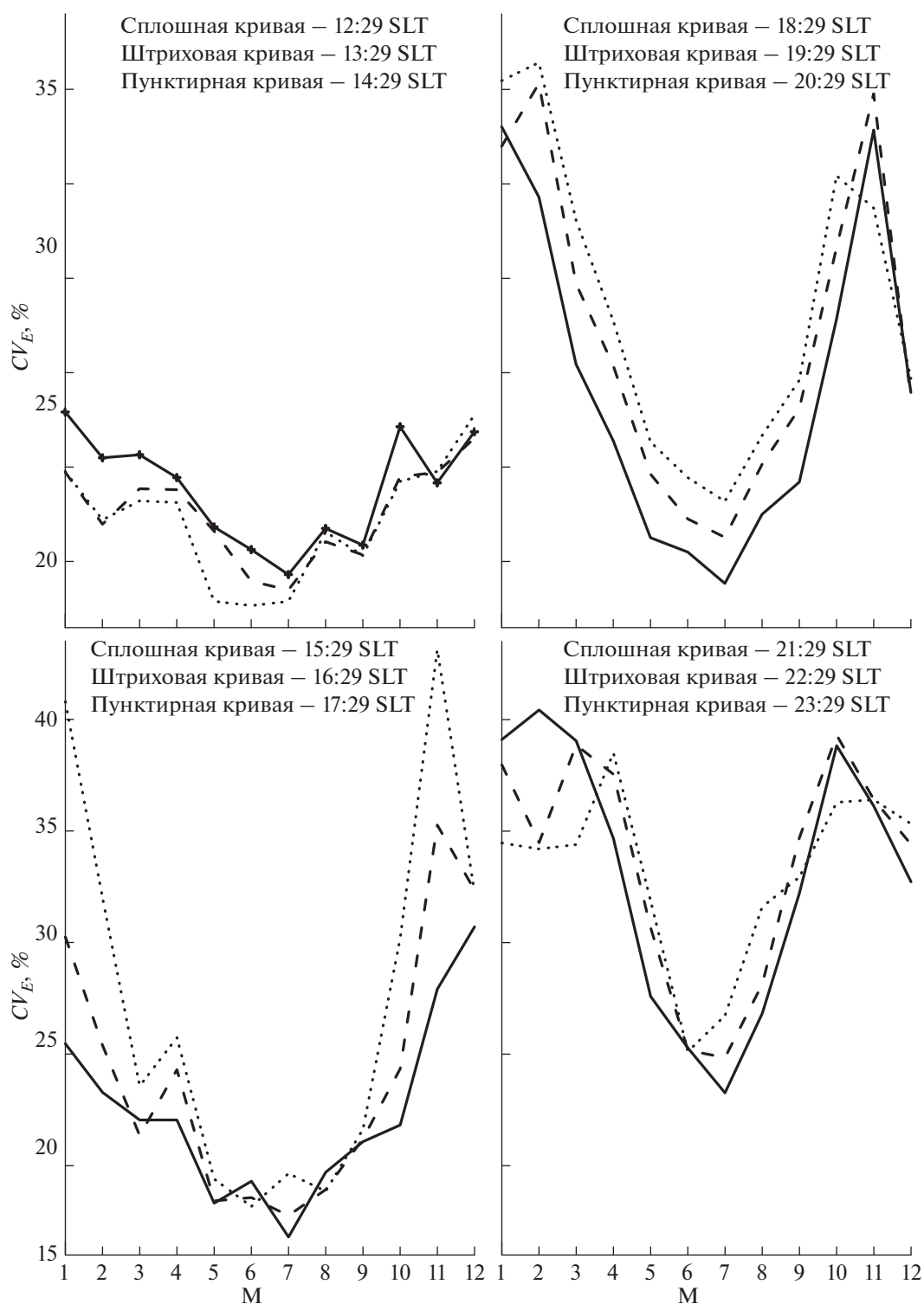


Рис. 6. Зависимости от месяца года $CV_E(UT, M)$ в 12:29, 13:29 и 14:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на верхней левой панели); 15:29, 16:29 и 17:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на нижней левой панели); 18:29, 19:29 и 20:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на верхней правой панели); 21:29, 22:29 и 23:29 SLT (сплошные, штриховые и пунктирные кривые соответственно на нижней правой панели).

условий низкой солнечной активности. Таким образом, отличие CV_E^* от CV_{AVR} может быть обусловлено тем, что коэффициенты CV_E^* и CV_{AVR} определены для разных уровней солнечной активности. Несовпадением периодов времени, использованных при расчетах CV_{AVR} и CV_E^* , и вариациями CV_E при изменении геомагнитной широты от 40° до 60° также можно объяснить часть отличия CV_E^* от CV_{AVR} .

3.5. Описание измерений $NmF2$ одним статистическим параметром

Чем меньше коэффициент вариации случайной величины X относительно статистического параметра Y , тем более точной является оценка X параметром Y . Если условие минимизации стандартного отклонения и коэффициента вариации $NmF2$ принимается в качестве критерия наилучшего описания множества измерений $NmF2$ одним единственным статистическим параметром $NmF2$, то согласно результатам настоящей работы использование в ионосферных исследованиях математического ожидания $NmF2$ или арифметически среднего значения $NmF2$ в наилучшей степени обеспечивает выполнение этого критерия в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности.

Месячная медиана $NmF2$ часто используется в ионосферных исследованиях в качестве характеристики измерений $NmF2$ для выбранных значений M и UT при примерно одинаковом уровне солнечной активности и предполагается, что месячная медиана $NmF2$ соответствует геомагнито-спокойным условиям. Такой подход применяется, например, в эмпирической модели ионосферы IRI [Bilitza et al., 2014]. В действительности, приведенное в п. 2 (см. также работу [Piggott and Rawer, 1978]) определение месячной медианы $NmF2$ не связано с геомагнитной активностью и ее величина может соответствовать как геомагнито-спокойным, так и геомагнито-возмущенным условиям. В работе [Pavlov and Pavlova, 2016] было впервые показано, что месячная медиана $NmF2$ может заметно отличаться от исправленной месячной медианы $NmF2$, при определении которой учитываются только геомагнито-спокойные значения $NmF2$. В отличие от математического ожидания $NmF2$, месячная медиана $NmF2$ не учитывает каждое измерение $NmF2$ для рассматриваемых условий и, следовательно, не использует всю информацию, доступную в данных. Кроме того, для корректного определения статистических параметров случайной величины X необходимо использовать достаточно большое число F значений X . Для определения наиболее вероятного значе-

ния, медианы, стандартного отклонения и коэффициента вариаций X необходимо, чтобы минимальная величина F была бы ~ 100 [Gatti, 2005]. Используемая в ионосферных исследованиях месячная медиана $NmF2$ не удовлетворяет этому условию. Таким образом, используемая в ионосферных исследованиях месячная медиана $NmF2$ может заметно отличаться от корректного значения медианы $NmF2$ для рассматриваемых условий из-за малого количества измерений $NmF2$ (существенно меньше 100) в течение месяца для заданного момента времени UT . Поэтому месячную медиану $NmF2$ следует рассматривать лишь как оценку корректного значения медианы $NmF2$ для рассматриваемых условий. С другой стороны, для определения математического ожидания X необходимо, чтобы минимальная величина F была бы ~ 30 [Gatti, 2005], т.е. для корректного вычисления математического ожидания $NmF2$ требуется существенно меньшее количество измерений $NmF2$ в сравнении с корректным расчетом медианы $NmF2$.

При фиксированных значениях UT и M вероятность $P_k(UT, M)$ зависит от $NmF2_k(UT, M)$ и для этой зависимости характерно присутствие нескольких пиков $P_k(UT, M)$, наибольший из которых реализуется при $NmF2_k(UT, M) = NmF2_{MP}(UT, M)$ (см. рисунки 1 и 2 работы [Pavlov and Pavlova, 2016]). Во многих случаях значение второго по величине пика $P_k(UT, M)$ близко к максимальной величине $P_k(UT, M)$ [Pavlov and Pavlova, 2016]. В отличие от $NmF2_{MP}(UT, M)$, вклад всех существенных пиков $P_k(UT, M)$ учитывается при вычислении $NmF2_E(UT, M)$. Поэтому $NmF2_E(UT, M)$ в большей степени, чем $NmF2_{MP}(UT, M)$ описывает множество наблюдений рассматриваемой случайной величины $NmF2$. Например, статистический анализ [Pavlov and Pavlova, 2016] результатов измерений $NmF2$ ионизондами de l'Ebre и Rome в геомагнито-спокойных условиях вблизи полдня при низкой солнечной активности показал, что вероятность наблюдения зимней аномалии $NmF2$ составляет 65–69%, но эта аномалия $NmF2$ не существует, если сравнивать зимние и летние значения $NmF2_{MP}$. В то же время, в соответствии с вышеуказанным значением вероятности рассматриваемое явление зимней аномалии $NmF2$ существует, если сравнивать зимние и летние величины $NmF2_E$.

Исходя из приведенных выше аргументов и выполненного в настоящей работе исследования изменчивости $NmF2$ можно сделать вывод о необходимости использования математического ожидания или арифметически среднего значения $NmF2$, а не месячной медианы $NmF2$ или наиболее вероятного значения $NmF2$, в качестве количественной характеристики, обеспечивающей наилучшее описание множества измерений $NmF2$.

одним единственным статистическим параметром $NmF2$.

Исследование относительной роли процессов формирования суточных вариаций статистических характеристик изменчивости $NmF2$ выходит за рамки целей настоящей работы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование суточных вариаций статистических характеристик $NmF2$ для каждого месяца года в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности по данным часовых (UT = 0, 1, ..., 23 ч) ионозондовых измерений $foF2$ с 1957 г. по 2017 г. над Москвой. В качестве этих статистических параметров $NmF2$ использовались математическое ожидание $NmF2_E$, арифметически среднее $NmF2_A$, наиболее вероятное $NmF2_{MP}$, арифметически средняя месячная медиана $NmF2_{MED}$, стандартные отклонения σ_E , σ_{MP} и σ_{MED} величины $NmF2$ от $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ и коэффициенты вариаций CV_E , CV_{MP} и CV_{MED} значения $NmF2$ относительно $NmF2_E$, $NmF2_{MP}$ и $NmF2_{MED}$ соответственно.

Найдено, что при фиксированных значениях M и UT отличие арифметически средней месячной медианы $NmF2$ от математического ожидания $NmF2$ изменяется от 0.03 до 25%, наиболее вероятного $NmF2$ от математического ожидания $NmF2$ — от 0 до 39%, наиболее вероятного $NmF2$ от средней месячной медианы $NmF2$ — от 0.06 до 40%, а арифметически среднее $NmF2$ отличается от математического ожидания не более чем на 0.2%.

Вычисленные статистические параметры $CV_E(UT, M)$, $CV_{MP}(UT, M)$ и $CV_{MED}(UT, M)$ являются характеристиками относительной изменчивости $NmF2$ ото дня к другому дню для каждого месяца года и указанных моментов времени UT над Москвой в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности. Из результатов расчетов следует, что величины CV_E , CV_{MED} и CV_{MP} изменяются в интервалах 12–43%, 12–60% и 13–75%, соответственно.

Проведенное исследование показало, что в преобладающем большинстве случаев коэффициент вариации $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ меньше коэффициентов вариации $NmF2$ относительно арифметически средней месячной медианы $NmF2$ или наиболее вероятного значения $NmF2$. Если величина $CV_E(UT, M)$ больше, чем значение $CV_{MED}(UT, M)$ или $CV_{MP}(UT, M)$, то отличие между коэффициентами $CV_E(UT, M)$ и $CV_{MED}(UT, M)$ или между значениями $CV_E(UT, M)$ и $CV_{MP}(UT, M)$ незначительно в сравнении с их величинами. Эти результаты и приведенные в статье дополнительные ар-

гументы позволяют рекомендовать использовать математическое ожидание $NmF2$ или арифметически среднее значение $NmF2$ в качестве количественной характеристики, обеспечивающей наилучшее описание множества измерений $NmF2$ одним единственным статистическим параметром $NmF2$ в геомагнито-спокойных условиях при низкой солнечной активности для выбранных значений месяца года и момента времени.

Если проводится сравнение величины коэффициента вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$ в каждом месяце года для различных моментов времени, то наименьшее значение $CV_E(UT, M)$ изменяется от 12% (июль) до 19% (декабрь) и реализуется в дневных условиях, а наибольшая величина $CV_E(UT, M)$ находится в интервале от 26% (июнь) до 43% (декабрь). При этом наименьшие и наибольшие значения этого коэффициента в осенние, зимние и весенние месяцы больше, чем в летние месяцы. Если изменяется месяц года для фиксированного момента времени UT , то коэффициент $CV_E(UT, M)$ принимает наименьшее значение в июне, июле, августе и сентябре в зависимости от выбранного UT .

При изменении месяца года вычисленное среднеарифметическое по времени ($UT = 0, 1, \dots, 23$ ч) значение коэффициента вариаций $NmF2$ относительно математического ожидания $NmF2$, характеризующее среднюю изменчивость $NmF2$ в выбранном месяце, уменьшается при переходе от зимних, весенних и осенних месяцев к летним месяцам. Арифметически средний по времени коэффициент $CV_E(UT, M)$ минимален в июле (18%) и максимален в ноябре (30%).

Среднеарифметический в промежутке 7:29–16:29 SLT дневного времени коэффициент $CV_E(UT, M)$ изменяется от 15% в июле до 23% в декабре и увеличивается при переходе от летних месяцев к зимним, весенним и осенним месяцам года.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кример Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 551 с. 2012.
- Павлов А.В., Павлова Н.М. О влиянии рефракции солнечного излучения на зенитный угол и времени восхода и захода Солнца в атмосфере // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 50. № 2. С. 228–333. 2010.
- Павлов А.В., Павлова Н.М. Вариации статистических параметров зимней аномалии $NmF2$ с широтой и солнечной активностью // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 52. № 3. С. 335–343. 2012.
- Павлов А.В., Павлова Н.М. Зависимости от месяца года статистических характеристик $NmF2$ средних широт в геомагнито-спокойных условиях вблизи полдня при низкой солнечной активности // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 55. № 4. С. 504–510. 2015. <https://doi.org/10.7868/S0016794015040112>

- *Piggott B.P., Pawer K.* Руководство URSI по интерпретации и обработке ионограмм. М.: Наука, 342 с. 1978.
- *Araujo-Pradere E.A., Fuller-Rowell T.J., Bilitza D.* Ionospheric variability for quiet and perturbed conditions // *Adv. Space Res.* V. 34. № 9. P. 1914–1921. 2004. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.06.007>
- *Araujo-Pradere E.A., Fuller-Rowell T.J., Codrescu M.V.* Characteristics of the ionospheric variability as a function of season, latitude, local time, and geomagnetic activity // *Radio Sci.* V. 40. № 5. P. RS5009. 2005. <https://doi.org/10.1029/2004RS003179>
- *Bilitza D., Altadill D., Zhang Y., Mertens C., Truhlík V., Richards P., Reinisch B.* The International Reference Ionosphere 2012—A model of international collaboration // *J. Space Weather Spac.* V. 4. № A07. P. 1–12. 2014. <https://doi.org/10.1051/swsc/2014004>
- *Forbes J.M., Palo S.E., Zhang X.* Variability of the ionosphere // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 62. № 8. P. 685–693. 2000. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00029-8](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00029-8)
- *Gatti P.L.* Probability theory and mathematical statistics for engineers. London and New York: Spon Press of Taylor&Frands Group, 356 p. 2005.
- *Hedin A.E.* MSIS-86 thermospheric model // *J. Geophys. Res.* V. 92. № 5. P. 4649–4662. 1987. <https://doi.org/10.1029/JA092iA05p04649>
- *Liu H.-L., Richmond A.D.* Attribution of ionospheric vertical plasma drift perturbations to large-scale waves and the dependence on solar activity // *J. Geophys. Res.* V. 118. № 9. P. 2452–2465. 2013. <https://doi.org/10.1002/jgra.50265>
- *Pavlov A.V.* The low and middle latitude semi-annual anomaly in *NmF2* near noon: a statistical study // *Adv. Space Res.* V. 49. № 5. P. 922–936. 2012. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2011.12.024>
- *Pavlov A.V.* Causes of the mid-latitudinal daytime *NmF2* semi-annual anomaly at solar minimum // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 169. P. 6–15. 2018. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2017.12.015>
- *Pavlov A.V., Pavlova N.M., Makarenko S.F.* A statistical study of the mid-latitude *NmF2* winter anomaly // *Adv. Space Res.* V. 45. № 3. P. 374–385. 2010. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2009.09.003>
- *Pavlov A.V., Pavlova N.M.* Variations in statistical parameters of the *NmF2* equinoctial asymmetry with latitude and solar activity near noon // *Adv. Space Res.* V. 51. № 11. P. 2018–2034. 2013. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.01.007>
- *Pavlov A.V., Pavlova N.M.* Influence of the equinoctial asymmetry on the semi-annual anomaly in *NmF2* near noon in the northern geographic hemisphere: a statistical study // *Adv. Space Res.* V. 53. № 4. P. 619–634. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.12.014>
- *Pavlov A.V., Pavlova N.M.* Long-term monthly statistics of mid-latitudinal *NmF2* in the northern geographic hemisphere during geomagnetically quiet and steadily low solar activity conditions // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 142. P. 83–97. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2016.03.001>
- *Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., Aikin A.C.* NRLM-SISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues // *J. Geophys. Res.* V. 107. № 12. P. 1468. 2002. <https://doi.org/10.1029/2002JA009430>
- *Ross S.M.* Introduction to probability and statistics for engineers and scientists. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 624 p. 2004.
- *Richards P.G., Fennelly J.A., Torr D.G.* EUVAC: A solar EUV flux model for aeronomical calculations // *J. Geophys. Res.* V. 99. № 5. P. 8981–8986. 1994. <https://doi.org/10.1029/94JA00518>
- *Richmond A.D., Lu G.* Upper-atmospheric effects of magnetic storms: a brief tutorial // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 62. № 12. P. 1115–1127. 2000. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00094-8](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00094-8)
- *Rishbeth H., Mendillo M.* Patterns of F2-layer variability // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 63. № 15. P. 1661–1680. 2001. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(01\)00036-0](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(01)00036-0)
- *Schunk R.W., Nagy A.F.* Ionospheres. Physics, plasma physics, and chemistry. Cambridge: Cambridge University Press, 628 p. 2009.