

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО И ЕГО ОСОБЕННОСТИ В ПОЛЯРНЫХ ШИРОТАХ

© 2023 г. Н. А. Шаталов<sup>1</sup>, \*, В. М. Чечеткин<sup>2</sup>, \*\*, С. Л. Шалимов<sup>3</sup>, \*\*\*

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

\*E-mail: satalovnazar@gmail.com

\*\*E-mail: chechetv@gmail.com

\*\*\*E-mail: pmsk7@mail.ru

Поступила в редакцию 25.07.2022 г.

После доработки 29.09.2022 г.

Принята к публикации 03.10.2022 г.

Представлены результаты расчетов структуры магнитного поля в кинематическом приближении, свидетельствующие о согласованности построенной численной модели со структурой течений проводящей жидкости: нестабильность конвективного процесса во вращающейся сферической оболочке отражается в эволюции магнитного поля, находя свое выражение в пульсационном режиме поля. Показано, что особенности эволюции поля в расчете наиболее четко проявляются в высоких широтах и имеют аналоги в поведении реального геомагнитного поля.

*Ключевые слова:* кинематическое динамо, геомагнитное поле, численная модель.

**DOI:** 10.31857/S0002333723020114, **EDN:** LIUETZ

### ВВЕДЕНИЕ

Геомагнитное поле генерируется в жидком (расплавленное железо) ядре Земли за счет механизма динамо, действующего во вращающейся сферической оболочке при наличии конвекции [Roberts, Glatzmaier, 2000]. Хотя основные черты геомагнитного поля выглядят достаточно просто — почти стабильный диполь вдоль оси вращения — сама теория динамо совсем не проста и для получения наглядных результатов использует численное моделирование. Сложной является даже проблема так называемого кинематического динамо, когда при заданном поле скорости находят решение уравнения магнитной индукции. Это обусловлено прежде всего тем, что неизвестно распределение скорости в жидком ядре Земли, и требуется исследовать огромное число этих распределений, чтобы возникающее магнитное поле можно было сравнивать с наблюдаемым.

Следует отметить, что тщательному изучению задачи о кинематическом динамо был посвящен ряд работ, позволивших выяснить как изменяется интенсивность магнитного поля в зависимости от структуры поля скорости. При этом, неопределенности в поведении магнитного поля (неограниченный рост, убывание или промежуточное

состояние) исчезали, когда учитывалось требование баланса импульса с участием силы Лоренца. В частности, предполагалось (см. напр. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991GApFD..60..357B/abstract>), что существует первоначальный баланс сил в уравнении движения жидкости между силами Кориолиса, Лоренца и давления, причем силами инерции пренебрегалось. Если теперь пренебречь вязким и электромагнитным взаимодействием с мантией, динамо будет проходить через состояния магнитосферического равновесия. Это приводит к так называемому ограничению Тейлора, при котором азимутальная сила, действующая на геострофический цилиндр, равна нулю. Иными словами, геострофический поток становится таким, что индуцированные магнитные силы удовлетворяют ограничению Тейлора. В результате кинематическое динамо можно рассматривать как соответствующее росту слабого затравочного поля до тех пор, пока оно не становится настолько сильным, что сила Лоренца начинает влиять на скорость.

В рассматриваемых работах использовалось приближение динамо среднего поля, в котором для структуры потока, кроме предположения о крупномасштабном дифференциальном враще-

нии (омега-эффект), использовалось представление об альфа-эффекте (когда электродвижущая сила пропорциональна крупномасштабному среднему полю через псевдоскаляр  $\alpha$ ), гарантирующего генерацию магнитного поля, благодаря мелкомасштабным или неосесимметричным движениям. Поскольку  $\alpha$ -эффект обусловлен другим псевдоскаляром – спиральностью движений [Moffatt, 1978], результаты этих исследований, в частности, приводят к выводу о решающей роли спиральности в генерации магнитного поля.

В некоторых МГД-моделях (например, [Glatzmaier, Roberts, 1995]) вблизи оси вращения возникает специфическая структура течения, состоящая из направленного на восток потока вблизи твердого ядра и обратного (направленного на запад) течения вблизи границы жидкого ядра и мантии. Следует отметить, что такая структура наблюдается не всегда (см. например, [Kuang, Bloxham, 1997]), в частности, тогда, когда граничные условия были невязкими, что, возможно, и обусловило отличие от предыдущего расчета. Считается, что структура течения вблизи полюса вращающейся сферической оболочки обусловлена тепловым ветром вблизи твердого ядра, последующим восходящим течением и растеканием потока на границе жидкого ядра и мантии [Olson, Aurnou, 1999]. Если предполагать вмороженность магнитного поля в поток, то из-за растекания проводящей жидкости вблизи полюса на границе ядро – мантия можно ожидать понижение величины радиальной компоненты поля на поверхности Земли, что в действительности и наблюдают [Olson, Aurnou, 1999]. Такая структура течения – один из результатов численного моделирования, который ранее не был известен. Отметим, что непосредственно на полюсе наблюдают даже слабое поле обратного направления. Вместе с тем роль указанного течения в эволюции геомагнитного поля остается невыясненной. Поэтому условия возникновения и развития приполюсного течения во вращающейся сферической оболочке требуют дальнейшего исследования.

В настоящей работе рассмотрена структура магнитного поля, возникающая при заданной тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке при вязких граничных условиях. Предполагается, что дифференциальное вращение ядра и мантии отсутствует. Обращено внимание на соответствие областей наиболее интенсивного поля со спиральностью течения. Также затронуты вопросы соответствия расчетов наблюдениям.

Математическая модель и результаты численных расчетов течения жидкости при тепловой конвекции во вращающейся сферической обо-

лочке были описаны ранее в работе [Абакумов и др., 2018], где приведены основные уравнения и предположения, при которых осуществлялся расчет. Основные особенности этих расчетов следующие.

1) Радиальная компонента скорости жидкости вблизи оси вращения демонстрирует крупномасштабное восходящее движение, которое немного отклоняется от оси вращения, а на самой оси доминирует возвратное течение (в сторону внутренней оболочки). После разрушения картины течения структура стремится к восстановлению.

2) Азимутальная компонента скорости жидкости соответствует структуре течения, при которой вблизи внутренней оболочки скорость направлена на восток, а на границе внешней оболочки и жидкости (вблизи проекции внутренней сферы на внешнюю) скорость направлена на запад. Такая картина течения также нестабильна, и после разрушения она стремится к восстановлению. При этом на широтах более высоких, чем проекция внутренней сферы на внешнюю, попеременно возникают и исчезают восточно-западные джеты. В целом картина напоминает крутильные колебания в полярных широтах.

Прежде, чем рассмотреть структуру магнитного поля, возникающую при указанном выше течении, опишем используемый в расчетах математический аппарат и численную модель.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Как хорошо известно, в кинематическом приближении задачи геодинамики используется уравнение магнитной индукции:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\nu_m \nabla \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

где:  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $\nu_m$  – коэффициент магнитной диффузии. Для жидкого ядра Земли используем величину  $\nu_m = 2 \text{ м}^2/\text{с}$  [Roberts, Glatzmaier, 2000].

В данной работе это уравнение решалось в сферической системе координат. Для перехода к сферическим координатам использовался переход к интегральному виду данного уравнения. Для нахождения компонент поля в явном виде умножим уравнение с обеих частей на соответствующий орт ( $e_r, e_\theta, e_\phi$ ) и проинтегрируем по площадке в данной проекции.

Для  $\phi$  – компоненты поля

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{e}_\phi dS_\phi = \iint_S \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \vec{e}_\phi dS_\phi. \quad (2)$$

Тогда можно применить теорему Стокса в правой части уравнения, а в левой части провести интегрирование с учетом вмороженности поля. Также слева был сделан переход к разностной схеме [Галанин, Лукин, 2007]:

$$\frac{\Delta B_i}{\Delta t} S_i = \oint_{\partial S_i} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{Id}\Gamma - v_m \oint_{\partial S_i} [\nabla \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{Id}\Gamma. \quad (3)$$

Использовалась явная разностная схема, значения сеточных функций относятся к граням расчетной сетки. Каждый интеграл вычислен методом трапеции (см. ПРИЛОЖЕНИЕ). Вычисленные значения магнитного поля находятся в центре граней ячеек. Для нахождения поля в вершинах использовалась линейная интерполяция по двум соседним точкам. На границе ставилось условие непрерывности магнитного поля

$$B_{rbound} = B_{rbound-1}.$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для жидкого ядра Земли структура течения, возникающая за счет тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке при вязких граничных условиях в предположении, что дифференциальное вращение ядра и мантии отсутствует и величины температуры, давления и плотности оцениваются так же, как в работе [Абакумов и др., 2018]. В настоящей работе величина начального дипольного магнитного поля предполагалась равной  $B_{in} \approx 5 \times 10^{-7}$  Тл.

Оценим теперь влияние магнитной диффузии для данных параметров системы [Moffatt, 1978]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (B^2) d^3r = \\ & = \int_V \vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} d^3r - \int_V v_m (\nabla \times B)^2 d^3r. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого можно записать:

$$\vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} = B_\alpha B_\beta \nabla_\beta v_\alpha = \frac{1}{2} B_\alpha B_\beta (\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta).$$

То есть симметричная часть сдвига может преобразовывать кинетическую энергию в энергию магнитного поля. Оценка этого интеграла сверху дает:

$$\begin{aligned} & \int_V B_\alpha B_\beta (\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta) d^3r \leq \\ & \leq |\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta|_{\max} \int_V (B^2) d^3r. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в уравнении можно получить следующую нижнюю оценку [Зельдович и др., 2006]:

$$\int_V v_m (\nabla \times B)^2 d^3r \geq v_m L^{-2} |\gamma_1| \int_V (B^2) d^3r,$$

где  $|\gamma_1|$  – безразмерная скорость затухания низшей основной гармоники, соответствующей режиму самого медленного затухания. Отсюда можно получить необходимое условие для увеличения магнитной энергии за счет кинетической. Само изменение энергии есть:

$$\frac{v}{L} \int_V (B^2) d^3r,$$

где  $v$  и  $L$  – характерные скорость движущейся среды и масштаб области изменения поля.

Для затухающей части имеем  $v_m L^{-2} |\gamma_1| \int_V (B^2) d^3r$ , причем для сферической области [Зельдович и др., 2006]  $|\gamma_1| \approx 10$ . Тогда отношение кинетической энергии движения жидкости к магнитной при  $v = 5 \times 10^{-4}$  м/с,  $L = 10^3$  км оценивается как:

$$\frac{E_k}{E_m} \sim \frac{v}{v_m} L \sim \frac{5 \times 10^{-4}}{2} \times 10^8 \gg 1.$$

Это соотношение действительно только на временах, значительно меньших, чем характерные времена изменения магнитного поля, так как при эволюции поля меняется его характерный масштаб. Поскольку используется кинематическое приближение, важно для каждого момента времени оценивать отношение кинетической энергии движения жидкости к энергии магнитного поля. Для этого были построены распределения отношений энергий (рис. 1)

Как видно из рис. 1, величина кинетической энергии много больше величины энергии магнитной, что говорит нам о применимости данного подхода. Также были построены распределения для больших времен, и для них также сохраняется данное условие.

Заметим, что указанное отношение энергий характеризует в основном вклады крупномасштабной динамики. Как можно увидеть из рис. 1, основные особенности эволюции отношения энергий следующие. Первоначально происходит нарастание магнитной энергии вблизи оси вращения. Затем энергия перераспределяется в объеме жидкого ядра с локальными максимумами в приэкваториальной области, ослабляясь в приполюсной области. Этот цикл потом повторяется, так что в целом эволюция магнитной энергии имеет вид пульсаций.

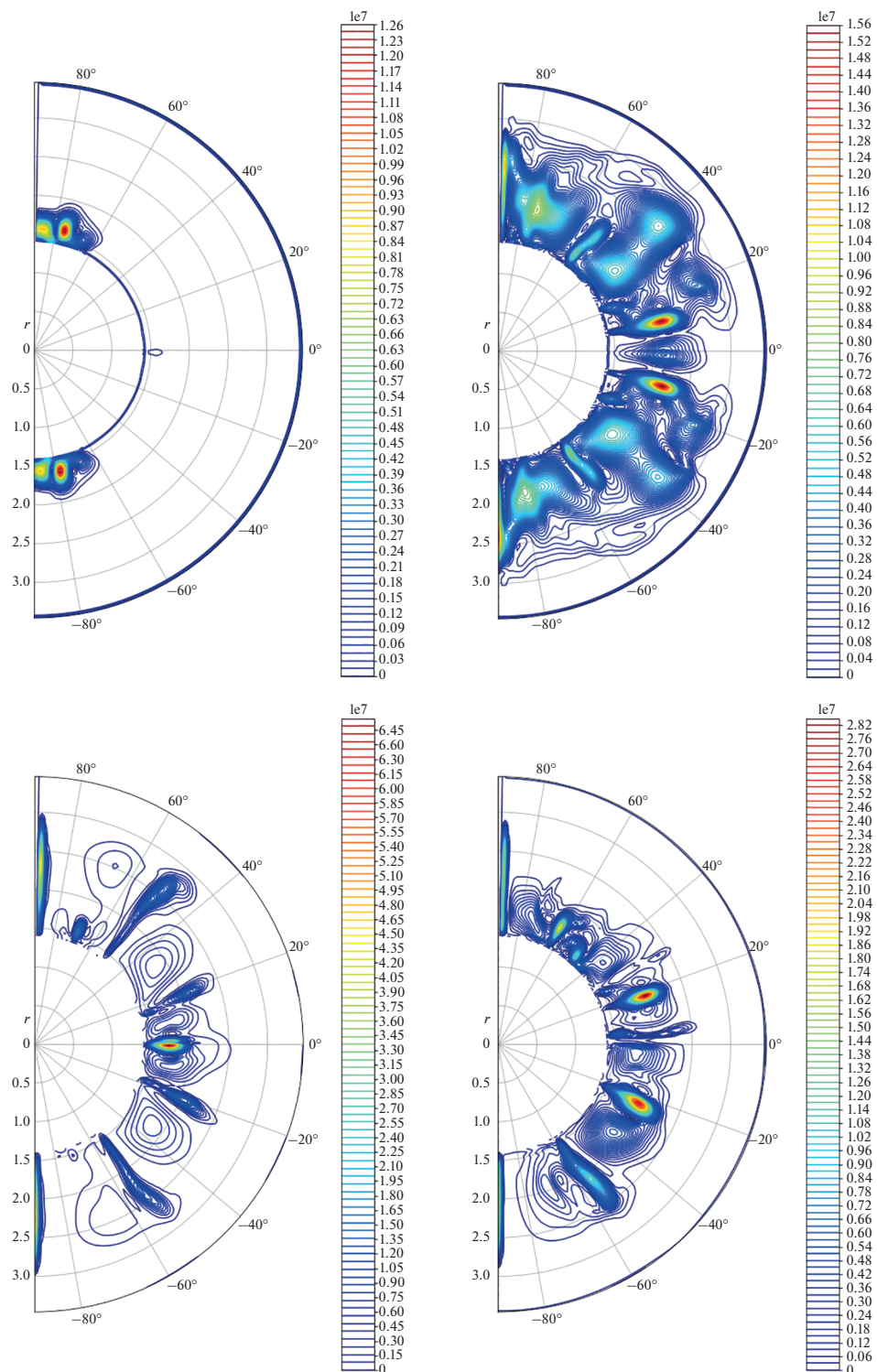


Рис. 1. Графики распределения отношений энергии в моменты времени  $T = 250, 500, 900, 1800$ .

Обратимся теперь к эволюции полоидальной компоненты магнитного поля. Расчет показывает, что величина индукции магнитного поля начального диполя начинает расти в приполюсной

области и усиливается в пять раз, после чего немного здесь ослабевает, и начинается рост поля на более низких широтах с постепенным дроблением масштабов (см. рис. 2). Затем процесс по-

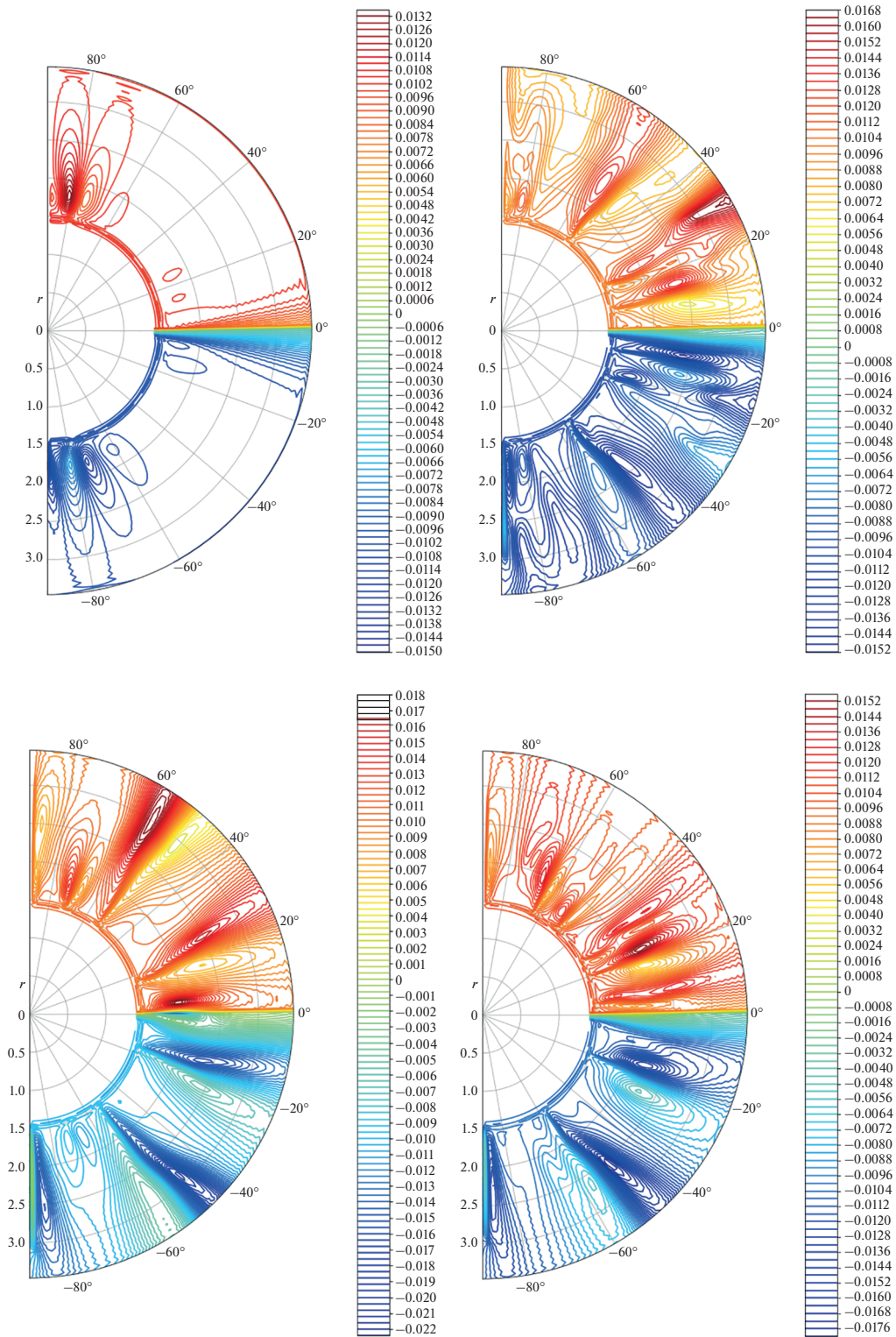


Рис. 2. Значения полоидальной компоненты поля в Гс, в моменты времени  $T = 250, 500, 900, 1800$ .

вторяется, т.е. эволюция полоидальной компоненты находится в режиме пульсаций.

На рис. 3 показано распределение спиральности ( $\mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v}$ ) для поля скоростей. В частности,

имеют место пульсации максимальной спиральности течения вблизи оси вращения и на высоких широтах (в тангенциальном цилиндре). Из сопоставления рис. 2 и рис.3 видно, что магнитное по-

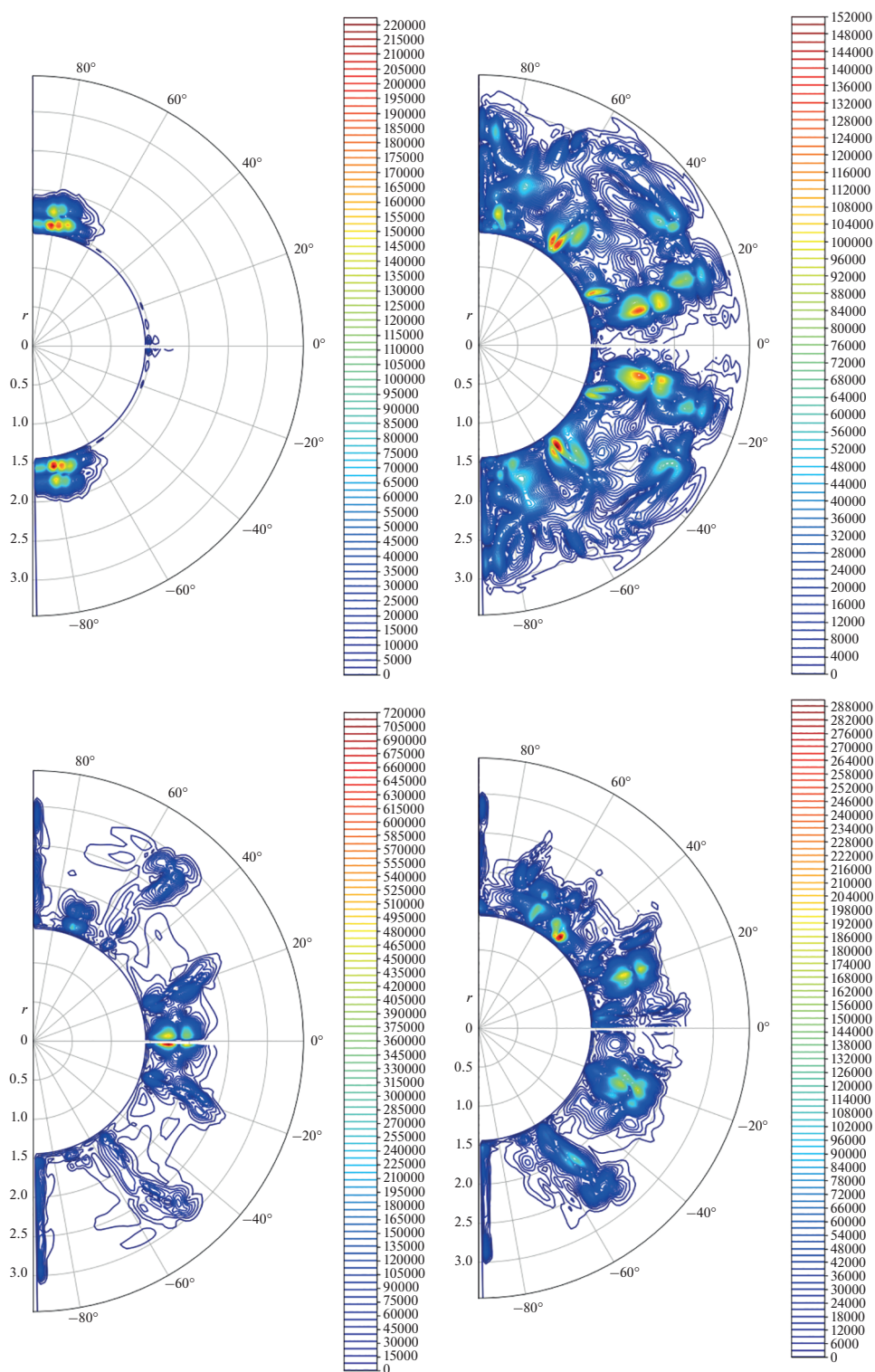


Рис. 3. Распределение спиральности в моменты времени  $T = 250, 500, 900, 1800$

ле растет наиболее быстро в местах наибольшей спиральности. Это свидетельствует о согласованности построенной численной модели и подтверждает предположения, высказанные в работе [Абакумов и др., 2018].

## ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Рассмотрим теперь вопрос о том насколько результаты расчета могут соответствовать процессам в жидком ядре Земли. Как было отмечено во ВВЕДЕНИИ, если предполагать вмороженность

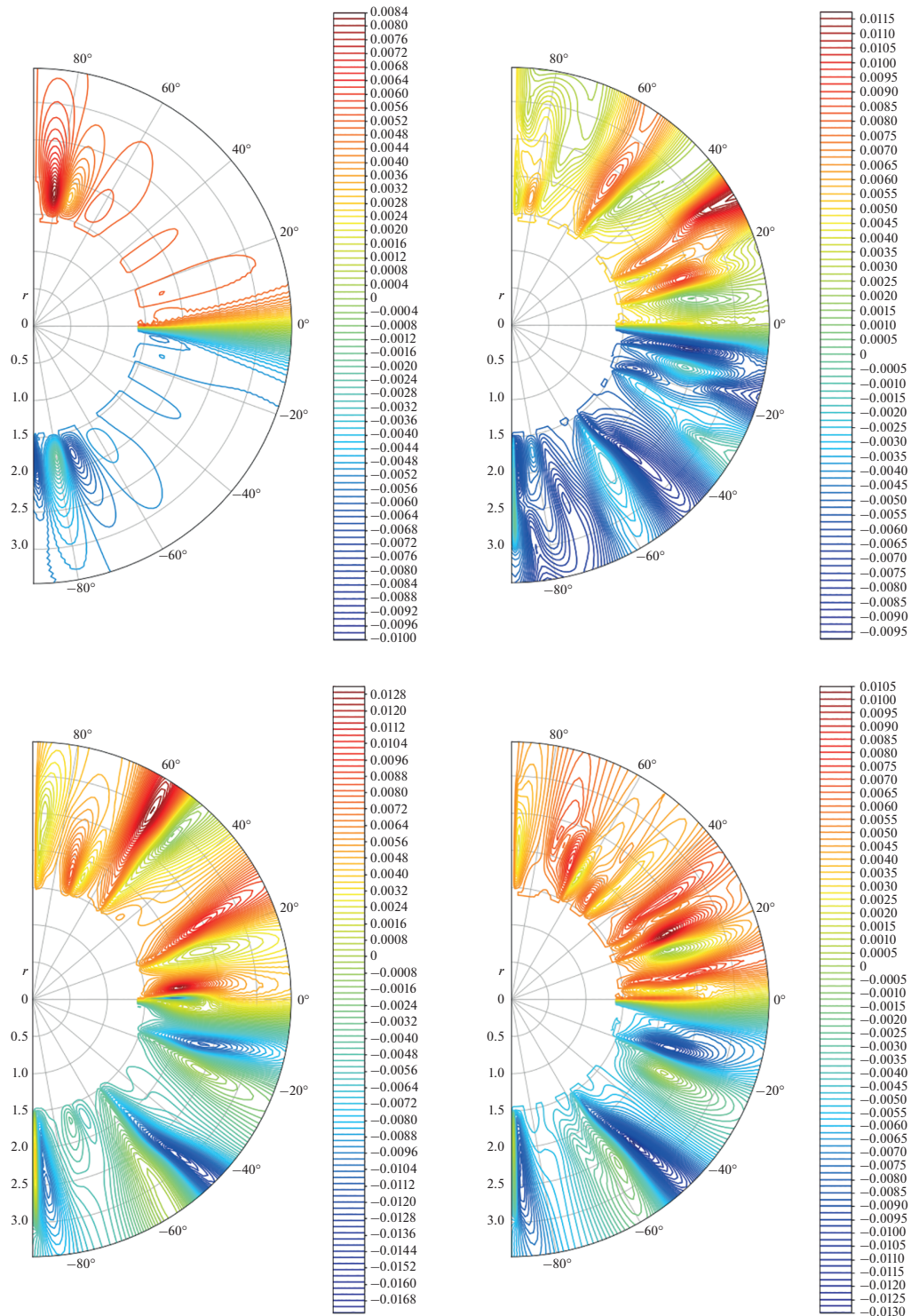


Рис. 4. График радиальной компоненты поля в Гс, в моменты времени  $T = 250, 500, 900, 1800$ .

магнитного поля в поток, то из-за растекания проводящей жидкости вблизи полюса на границе ядро—мантия можно ожидать понижение величины радиальной компоненты поля на поверхности Земли. Результаты численного моделирования (рис. 4) соответствуют этим наблюдениям (струк-

тура поля, отражаемая в радиальной компоненте). Это также соответствует расчету в работе [Абакумов и др., 2018], указанному как пункт 1 во ВВЕДЕНИИ.

На рис. 5 показаны результаты расчета эволюции азимутальной компоненты магнитного поля.

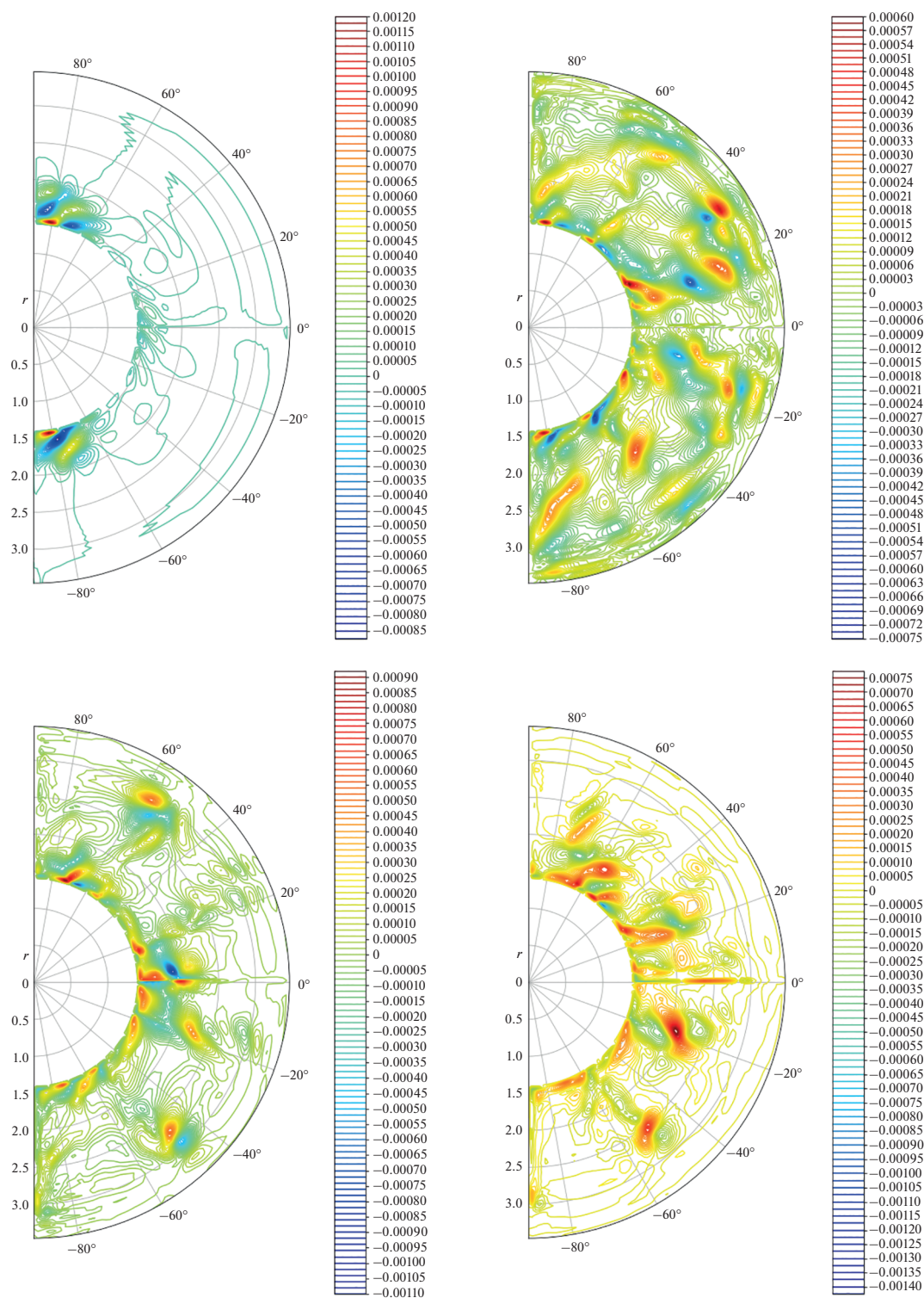


Рис. 5. График тороидальной компоненты поля в Гс, в моменты времени  $T = 250, 500, 900$ .

Можно отметить, что с течением времени вблизи границы жидкого ядра и мантии появляются азимутальные компоненты противоположного направления. Это может быть следствием движения проводящей жидкости, формирующего так называемые ази-

мутальные джеты, которые были отмечены в работе [Абакумов и др., 2018] (см. особенность этих расчетов, указанную как пункт 2 во ВВЕДЕНИИ).

Вывод о существовании подобных структур (джетов) был сделан по наблюдениям спутника



Swarm за период 2000–2016 гг. [Livermore et al., 2016], которые показывают наличие неосесимметричного крупномасштабного джета на запад вблизи проекции тангенциального цилиндра на земную поверхность. Эти джеты, как считается, играют ключевую роль в дрейфе магнитного полюса [Livermore et al., 2020], благодаря их воздействию на крупномасштабные магнитные аномалии, которые отражают состояние магнитного поля на поверхности жидкого ядра, т.е. на границе ядро–мантия. Речь идет об областях (пятнах) магнитного поля повышенной интенсивности, приблизительно симметричных относительно экватора и центрированных на пересечении параллелей ( $60^\circ$  в северном и южном полушариях) и меридианов ( $120^\circ$  на восток и запад соответственно). В северном полушарии эти области центрированы в Сибири и в Северной Америке. Впервые такие аномалии были обнаружены при обработке исторических наблюдений [Bloxham, Gubbins, 1987; Johnson et al., 2003]. Затем они были подтверждены и уточнены в наблюдениях посредством спутников [Magsat, 1980; Oersted, 2000; Hulot et al., 2002]. В предположении вмороженности геомагнитного поля в жидкость, вывод, который можно сделать из наблюдений, таков: течение на поверхности жидкого ядра представляет собой систему из четырех крупномасштабных вихрей. Оказалось, что неосесимметричный крупномасштабный джет на запад вблизи проекции тангенциального цилиндра на земную поверхность включает упомянутые вихревые образования и влияет на них таким образом, что интенсивность одного вихря может уменьшаться, а другого — расти, что и определяет в итоге дрейф магнитного полюса. Интересно, что авторы работы [Livermore et al., 2016] допускают, во-первых, что джет может менять направление, а, во-вторых, джет служит источником крутильных колебаний в жидком ядре.

Наконец, рассмотрим возможную роль шира (по высоте) азимутальной скорости в генерации геомагнитного поля. Возникновение такого шира (в высоких широтах) отражают модельные расчеты [Абакумов и др., 2018] (это отмечено и в пункте 2 ВВЕДЕНИЯ). При наличии полоидальной компоненты магнитного поля поток с широм приведет к  $\Omega$ -эффекту — сильной аксиально-симметричной тороидальной компоненте внутри условного тангенциального цилиндра. Можно полагать, что вблизи ядра азимутальное поле будет частично подавлять турбулентную конвекцию. Поэтому турбулентная область будет сосредоточена вблизи границы жидкое ядро–мантия, являясь источником спиральных волн (инерционных или магнитострофических). При распространении этих волн через область азимутального поля возможен  $\alpha$ -эффект — генерация полоидальной компоненты поля из азимутальной (см.

например, [Шалимов, 2017]). Таким образом, возможен механизм  $\alpha$ - $\Omega$  геодинамо, способный поддерживать дипольную компоненту магнитного поля.

Таким образом, представленные результаты расчетов структуры магнитного поля в кинематическом приближении свидетельствует о согласованности построенной численной модели со структурой течений проводящей жидкости, полученной в работе [Абакумов и др., 2018]: неустойчивость конвективного процесса во вращающейся сферической оболочке отражается в эволюции магнитного поля, находя свое выражение в пульсационном режиме поля. Особенности эволюции поля в расчете наиболее четко проявляются в высоких широтах и имеют аналоги в поведении реального геомагнитного поля.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (3)

$$\oint_{\partial S} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \vec{l} d\Gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Проекция на  $[r, \theta]$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_r dr = \\ &= \frac{((B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i,j,k} + (B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i+1,j,k})}{2} (r_{i+1} - r_i), \\ I_2 &= \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\theta r_{i+1} d\theta = \\ &= -\frac{((B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i+1,j,k} + (B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i+1,j+1,k})}{2} \times \\ &\quad \times r_{i+1} (\theta_{j+1} - \theta_j), \\ I_3 &= \int_{r_{i+1}}^{r_i} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_r dr = \\ &= -\frac{((B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i,j+1,k} + (B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i+1,j+1,k})}{2} \times \\ &\quad \times (r_i - r_{i+1}), \\ I_4 &= \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\theta r_{i+1} d\theta = \\ &= \frac{((B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j,k} + (B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j+1,k})}{2} \times \\ &\quad \times r_i (\theta_j - \theta_{j+1}). \end{aligned}$$

Проекция на  $[r, \phi]$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_r dr = \\
&= \frac{((B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i,j,k} + (B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i+1,j,k})}{2} (r_{i+1} - r_i) \\
I_2 &= \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\phi r_{i+1} d\phi = \\
&= -\frac{((B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i+1,j,k} + (B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i+1,j,k+1})}{2} \times \\
&\quad \times r_{i+1} (\phi_{k+1} - \phi_k), \\
I_3 &= \int_{r_{i+1}}^{r_i} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_r dr = \\
&= -\frac{((B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i,j,k+1} + (B_\phi v_\theta - B_\theta v_\phi)_{i+1,j,k+1})}{2} (r_i - r_{i+1}), \\
I_4 &= \int_{\phi_{j+1}}^{\phi_j} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\phi r_{i+1} d\phi = \\
&= \frac{((B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j,k} + (B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j,k+1})}{2} \times \\
&\quad \times r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).
\end{aligned}$$

Проекция на  $[\theta, \phi]$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\theta r_i d\theta = \\
&= -\frac{((B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j,k} + (B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j+1,k})}{2} \times \\
&\quad \times r_i (\theta_{j+1} - \theta_j), \\
I_2 &= \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\phi r_i d\phi = \\
&= -\frac{((B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j+1,k} + (B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j+1,k+1})}{2} \times \\
&\quad \times r_i (\phi_{k+1} - \phi_k), \\
I_3 &= \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\theta r_i d\theta = \\
&= -\frac{((B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j,k+1} + (B_r v_\phi - v_r B_\phi)_{i,j+1,k+1})}{2} \times \\
&\quad \times r_i (\theta_j - \theta_{j+1}), \\
I_4 &= \int_{\phi_{k+1}}^{\phi_k} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\phi r_i d\phi = \\
&= \frac{((B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j,k} + (B_r v_\theta - v_r B_\theta)_{i,j,k+1})}{2} \times \\
&\quad \times r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).
\end{aligned}$$

Также для вычисления значения поля в центре ячейки необходимо знать площадь этой ячейки:

$$\begin{aligned}
S_\theta &= \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)(\phi_{k+1} - \phi_k)}{2}, \\
S_\phi &= \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2)(\theta_{j+1} - \theta_j)}{2},
\end{aligned}$$

$$S_r = r_i^2 (\cos(\phi_k) - \cos(\phi_{k+1}))(\theta_{j+1} - \theta_j).$$

Первый интеграл уже посчитан, рассмотрим второй интеграл:

$$\oint_{\partial S_i} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} d\Gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Для того чтобы посчитать ротор индукции магнитного поля, рассмотрим некоторый вектор  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_i} \mathbf{A} dS_i &= \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{B} dS_i = \oint_{\partial S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} d\Gamma = \\
&= I_1' + I_2' + I_3' + I_4',
\end{aligned}$$

$$A \cdot S_i \rightarrow A = \frac{1}{S_i} (I_1' + I_2' + I_3' + I_4'),$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} &= \oint_{\partial S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{l} d\Gamma = \\
&= \oint_{\partial S_i} \frac{1}{S_i} (I_1' + I_2' + I_3' + I_4') \cdot \mathbf{l} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Таким образом вычисление ротора сводится к вычислению контурных интегралов по проекциям.

Проекция на  $[r, \theta]$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} B_r dr = \frac{(B_{i,j,k}^r + B_{i+1,j,k}^r)}{2} (r_{i+1} - r_i), \\
I_2 &= \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} B_\theta r_{i+1} d\theta = -\frac{(B_{i+1,j,k}^\theta + B_{i+1,j+1,k}^\theta)}{2} \times \\
&\quad \times r_{i+1} (\theta_{j+1} - \theta_j), \\
I_3 &= \int_{r_{i+1}}^{r_i} B_r dr = -\frac{(B_{i,j+1,k}^r + B_{i+1,j+1,k}^r)}{2} (r_i - r_{i+1}), \\
I_4 &= \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} B_\theta r_{i+1} d\theta = \frac{(B_{i,j,k}^\theta + B_{i,j+1,k}^\theta)}{2} r_i (\theta_j - \theta_{j+1}).
\end{aligned}$$

Проекция на  $[r, \phi]$ :

$$I_1 = \int_{r_i}^{r_{i+1}} B_r dr = \frac{(B_{i,j,k}^r + B_{i+1,j,k}^r)}{2} (r_{i+1} - r_i),$$

$$I_2 = \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} B_\phi r_{i+1} d\phi = -\frac{(B_{i+1,j,k}^\phi + B_{i+1,j,k+1}^\phi)}{2} \times r_{i+1} (\phi_{k+1} - \phi_k),$$

$$I_3 = \int_{r_{i+1}}^{r_i} B_r dr = -\frac{(A_{i,j,k+1}^r + A_{i+1,j,k+1}^r)}{2} (r_i - r_{i+1}),$$

$$I_4 = \int_{\phi_{j+1}}^{\phi_j} B_\phi r_{i+1} d\phi = \frac{(B_{i,j,k}^\phi + B_{i,j,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).$$

Проекция на  $[\theta, \phi]$

$$I_1 = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} B_\theta r_i d\theta = -\frac{(B_{i,j,k}^\theta + B_{i,j+1,k}^\theta)}{2} r_i (\theta_{j+1} - \theta_j),$$

$$I_2 = \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} B_\phi r_i d\phi = -\frac{(B_{i,j+1,k}^\phi + B_{i,j+1,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_{k+1} - \phi_k),$$

$$I_3 = \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} B_\theta r_i d\theta = -\frac{(B_{i,j,k+1}^\theta + B_{i,j+1,k+1}^\theta)}{2} r_i (\theta_j - \theta_{j+1}),$$

$$I_4 = \int_{\phi_{k+1}}^{\phi_k} B_\phi r_i d\phi = \frac{(B_{i,j,k}^\phi + B_{i,j,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).$$

Тогда вычисление второго интеграла в уравнении (1) сводится к такому же интегрированию по проекциям.

Проекция на  $[r, \theta]$ :

$$I_1 = \int_{r_i}^{r_{i+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_r dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} A_r dr = \frac{(A_{i,j,k}^r + A_{i+1,j,k}^r)}{2} (r_{i+1} - r_i),$$

$$I_2 = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_\theta r_{i+1} d\theta = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A_\theta d\theta = -\frac{(A_{i+1,j,k}^\theta + A_{i+1,j+1,k}^\theta)}{2} r_{i+1} (\theta_{j+1} - \theta_j),$$

$$I_3 = \int_{r_{i+1}}^{r_i} [\nabla \times \mathbf{B}]_r dr =$$

$$= -\frac{(A_{i,j+1,k}^r + A_{i+1,j+1,k}^r)}{2} (r_i - r_{i+1}),$$

$$I_4 = \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} [\nabla \times \mathbf{B}]_\theta r_{i+1} d\theta =$$

$$= \frac{(A_{i,j,k}^\theta + A_{i,j+1,k}^\theta)}{2} r_i (\theta_j - \theta_{j+1}).$$

Проекция на  $[r, \phi]$ :

$$I_1 = \int_{r_i}^{r_{i+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_r dr = \frac{(A_{i,j,k}^r + A_{i+1,j,k}^r)}{2} (r_{i+1} - r_i),$$

$$I_2 = \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_\phi r_{i+1} d\phi = \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} A_\phi r_{i+1} d\phi =$$

$$= -\frac{(A_{i+1,j,k}^\phi + A_{i+1,j,k+1}^\phi)}{2} r_{i+1} (\phi_{k+1} - \phi_k),$$

$$I_3 = \int_{r_{i+1}}^{r_i} [\nabla \times \mathbf{B}]_r dr =$$

$$= -\frac{(A_{i,j,k+1}^r + A_{i+1,j,k+1}^r)}{2} (r_i - r_{i+1}),$$

$$I_4 = \int_{\phi_{j+1}}^{\phi_j} [\nabla \times \mathbf{B}]_\phi r_{i+1} d\phi =$$

$$= \frac{(A_{i,j,k}^\phi + A_{i,j,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).$$

Проекция на  $[\theta, \phi]$ :

$$I_1 = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_\theta r_i d\theta =$$

$$= -\frac{(A_{i,j,k}^\theta + A_{i,j+1,k}^\theta)}{2} r_i (\theta_{j+1} - \theta_j),$$

$$I_2 = \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} [\nabla \times \mathbf{B}]_\phi r_i d\phi =$$

$$= -\frac{(A_{i,j+1,k}^\phi + A_{i,j+1,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_{k+1} - \phi_k),$$

$$I_3 = \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} [\nabla \times \mathbf{B}]_\theta r_i d\theta =$$

$$= -\frac{(A_{i,j,k+1}^\theta + A_{i,j+1,k+1}^\theta)}{2} r_i (\theta_j - \theta_{j+1}),$$

$$I_4 = \int_{\phi_{k+1}}^{\phi_k} [\nabla \times \mathbf{B}]_\phi r_i d\phi = \frac{(A_{i,j,k}^\phi + A_{i,j,k+1}^\phi)}{2} r_i (\phi_k - \phi_{k+1}).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абакумов М.В., Четкин В.М., Шалимов С.Л. Математическое моделирование конвективных процессов в жидком ядре Земли и его следствия для интерпретации вариаций геомагнитного поля в полярных широтах // Физика Земли. 2018. № 3. С. 84–91.

Галанин М.П., Лукин В.В. Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на неструктурированных сетках. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 50. С. 1–29.

- Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитные поля в астрофизике. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований. 2006. 384 с.
- Шалимов С.Л.* О роли магнитострофических волн в геодинамо // *Физика Земли*. 2017. № 3. С. 488–491.
- Bloxham J., Gubbins D.* Thermal core—mantle interactions // *Nature*. 1987. V. 325. № 6104. P. 511–513.
- Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1995. V. 91. № 1. P. 63–75.
- Hulot G., Eymin C., Langlais B., Manda M., Olsen N.* Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data // *Nature*. 2002. V. 416. Is. 6881. P. 620–623.
- Johnson C.L., Constable C.G., Tauxe L.* Mapping long-term changes in Earth’s magnetic field // *Science*. 2003. V. 300. P. 2044–2045.
- Kuang W., Bloxham J.* An Earth-like numerical dynamo model // *Nature*. 1997. V. 389. № 6649. P. 371–374.
- Livermore P.W., Hollerbach R., Finlay C.C.* An accelerating high-latitude jet in Earth’s core // *Nature Geoscience*. 2016. <https://doi.org/10.1038/NGEO2859>
- Livermore P.W., Finlay C.C., Bayliff M.* Recent north magnetic pole acceleration toward Siberia caused by flux lobe elongation // *Nature Geoscience*. 2020. V.13. Iss. 5. P. 387–391. <https://doi.org/10.1038/s41561-020-0570-9>
- Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge University Press. 1978.
- Olson P., Aurnou J.* A polar vortex in the Earth’s core // *Nature*. 1999. V. 402. № 6758. P. 170–173.
- Roberts P.H., Glatzmaier G. A.* Geodynamo theory and simulations // *Rev. Mod. Phys.* 2000. V. 72. P. 1081–1123.

## Kinematic Dynamo Modeling and Its Peculiarities in Polar Latitudes

N. A. Shatalov<sup>a,\*</sup>, V. M. Chechetkin<sup>b,\*\*</sup>, and S. L. Shalimov<sup>c,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>National Research Nuclear University, Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, 115409 Russia

<sup>b</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

<sup>c</sup>Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia

\*E-mail: satalovnazar@gmail.com

\*\*E-mail: chechetv@gmail.com

\*\*\*E-mail: pmsk7@mail.ru

The results of calculations of the magnetic field structure in the kinematic approximation are presented, testifying to the consistency of the constructed numerical model with the structure of the flows of a conducting liquid: the instability of the convective process in a rotating spherical shell is reflected in the evolution of the magnetic field, manifesting itself in the pulsation regime of the field. It is shown that the features of the field evolution in the calculations are most clearly pronounced at high latitudes and have analogs in the behavior of the real geomagnetic field.

*Keywords:* kinematic dynamo, geomagnetic field, numerical model