

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

© 2023 г. Б. И. Биргер*

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

**E-mail: birgerbor@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.

После доработки 31.08.2022 г.

Принята к публикации 31.08.2022 г.

Методом линейной теории для малых возмущений исследуется неустойчивость тяжелого включения в верхних слоях Земли. Существование такого рода включений с повышенной плотностью связано с химической неоднородностью или фазовыми переходами. Вязкоупругость геоматериала описывается реологической моделью Максвелла. Рассмотрены два варианта расположения включения с повышенной плотностью. Тяжелое включение в холодном верхнем упругом слое коры не меняет своего расположения при малых возмущениях, т.е. является устойчивым по линейной теории. Тяжелое включение, которое расположено в горячем вязком слое коры, подстилающем верхний холодный слой, является неустойчивым (медленно погружается в лежащие ниже вязкие слои мантии).

Ключевые слова: гравитационная неустойчивость, вязкоупругость геоматериала, реологическая модель Максвелла.

DOI: 10.31857/S0002333723020059, **EDN:** LHOUE

ВВЕДЕНИЕ

Анализ неустойчивости, основанный на линейной теории для малых возмущений, т.е. теорией Ляпунова, является локальным, поскольку проблема устойчивости существенно нелинейна. Состояние системы, которое по линейной теории считается устойчивым, может оказаться неустойчивым при достаточно больших возмущениях. Поэтому линейная теория дает только достаточное условие неустойчивости. При глобальном анализе устойчивости величина рассматриваемых возмущений не ограничена. Глобальный анализ использует энергетический метод, который, как правило, дает только достаточное условие устойчивости, а следовательно, метод линейной теории и энергетический метод дополняют друг друга при исследовании устойчивости [Джозеф, 1981]. Энергетический метод успешно применяется при рассмотрении гравитационной устойчивости упругих слоев Земли в работах [Мухамедиев и др., 2016; Рыжак и др., 2016; Рыжак, Синюхина, 2019], в которых авторам удается получить не только достаточные, но и необходимые условия устойчивости.

Однако линейный анализ устойчивости имеет свои преимущества. Глобальный анализ дает критерий устойчивости рассматриваемой системы, но не прослеживает эволюцию того или иного на-

чального возмущения. В частности, такой анализ не учитывает вязкость, которая характеризует исследуемую систему, поскольку устойчивость (или неустойчивость) системы не зависит от вязкости. Вязкость определяет скорость возвращения системы в начальное состояние после возмущения (если система устойчива) или скорость, с которой система удаляется от начального состояния после возмущения (если система неустойчива). Для геофизических приложений важно знать характерное время развития неустойчивости. Если система обладает огромной вязкостью, что характерно для верхних слоев Земли, может оказаться, что в глобально неустойчивой системе неустойчивость заметно развивается только на временах, сравнимых со временем существования самой системы (несколько миллиардов лет для Земли). Линейная теория прослеживает эволюцию начальных возмущений той или иной пространственной формы. Поэтому линейная теория позволяет говорить об устойчивости системы к возмущениям определенного типа, что не имеет смысла в рамках глобального анализа. Согласно линейной теории, система устойчива, если она устойчива к малым возмущениям любого типа, и неустойчива, если она неустойчива хотя бы к одному типу малых возмущений.

В геодинамике при рассмотрении медленных процессов, связанных с гравитационной неустойчивостью, обычно рассматриваются только малые начальные возмущения, а развитие возмущения представляется в виде $ae^{\lambda t}$, где a начальное возмущение, а λ – комплексный инкремент. Если действительная часть λ отрицательна, имеет место устойчивость, а если положительна – неустойчивость. Когда начальное возмущение мало, а $\text{Re}\lambda < 0$ (устойчивость) линейная теория полностью описывает эволюцию начального малого возмущения. Когда $\text{Re}\lambda > 0$ (неустойчивость), линейная теория описывает эволюцию возмущения только на не слишком больших временах, при которых возмущение остается малым.

В настоящее время принята такая реологическая модель земной коры, в которой эффективная вязкость уменьшается с глубиной на несколько порядков, что вызвано ростом температуры [Karato, 2008; Birger, 2013]. Поэтому верхняя кора, где вязкость очень велика, ведет себя как упругая среда при не слишком высоких сдвиговых напряжениях (при достаточно больших напряжениях – как хрупко-упругая), а подстилающие ее слои нижней коры и мантийной литосферы, ведут себя как вязкие при медленных течениях и как упругие при быстрых. Тяжелые включения в коре могут вызвать гравитационную неустойчивость, при которой возникают медленные течения, представляющие интерес для геологии.

В настоящей работе методом линейной теории исследуется неустойчивость тяжелого включения в земной коре. Существование такого рода включений с повышенной плотностью связано с химической неоднородностью или фазовыми переходами. Будет исследована неустойчивость для двух вариантов расположения тяжелого включения: тяжелое упругое включение в верхнем холодном упругом слое коры и тяжелое вязкое включение в более глубоко расположенных горячих и вязких слоях Земли.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двухслойная модель. Нижний слой представлен как полупространство. Начало координат помещено на нижней поверхности верхнего слоя, а ось z направлена вертикально вверх. Слой ($0 < z < d$) моделирует верхнюю упругую кору, а полупространство ($z < 0$) – подстилающую литосферу и мантию. Начальное состояние в решаемой задаче – это литостатическое равновесие. В этом состоянии отсутствуют девиа-

торные напряжения, а давление связано с плотностью уравнением

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0(z)g, \quad (1)$$

где: g – ускорение силы тяжести, а плотность определена как

$$\begin{aligned} \rho_0(z) &= \rho + \Delta\rho \quad \text{при } 0 < z < d, \\ \rho_0(z) &= \rho \quad \text{при } -\infty < z < 0. \end{aligned}$$

В состоянии литостатического равновесия Земля испытывает огромное давление, вызванное гравитацией. Еще Рэлей ввел представление, согласно которому напряжение в Земле складывается из литостатического давления и небольшого добавочного напряжения, которое связано с деформациями, отсчитываемыми от равновесного состояния, обычными соотношениями линейной теории упругости или вязкоупругости. Это представление, широко используемое в современной геофизике, применяется и в данной статье.

Уравнения, описывающие возмущения литостатического равновесия несжимаемой среды, записываются в виде:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где: p – возмущение давления; σ_{xx} , σ_{xz} и σ_{zz} – компоненты девиаторного тензора напряжений; u_x и u_z – смещения. Все эти переменные являются функциями вертикальной пространственной координаты z , горизонтальной координаты x и времени t . Уравнения (2) и (3) описывают двумерное движение среды, а уравнение (4) представляет собой условие несжимаемости. К этим уравнениям добавляются уравнения состояния, связывающие девиаторные напряжения с деформациями ϵ_{ij} , которые определены как

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) справедливы и для верхнего, и для нижнего слоя, моделированного как полупространство. Однако плотности и реологические свойства слоев отличаются. Чтобы учесть скачок плотности на границе между слоями необходимо ввести граничные условия.

На верхней деформируемой границе слоя обращается в нуль сила, действующая на единицу площади поверхности, откуда следует, что на не-

деформированной верхней границе ($z = d$) выполняются условия

$$\sigma_{xz}^{(2)} = 0, \quad -p^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} + \rho^{(2)} g u_z^{(2)} = 0. \quad (6)$$

Индекс 1 относится к нижнему слою (полупространству), индекс 2 – к верхнему. Вывод уравнений (6) приведен в Приложении 1. На границе ($z = 0$) между верхним слоем и полупространством непрерывны смещения

$$u_x^{(2)} = u_x^{(1)}, \quad u_z^{(2)} = u_z^{(1)}$$

и сила, действующая на единицу площади поверхности, откуда следует (см. Приложение 1), что:

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \quad -p^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2)} + (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) g u_z = -p^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)}. \quad (7)$$

На нижней границе полупространства ($z = -\infty$) наложено условие ограниченности вертикальных и горизонтальных смещений.

Вертикальное смещение представим в виде:

$$u_z(x, z, t) = U_z(z) \exp(\lambda t) \cos(kx), \quad k > 0, \quad (8)$$

где λ – комплексный инкремент, k – действительное волновое число. В аналогичном виде представим и все остальные физические переменные, причем в выражения для u_z , ε_{xz} и σ_{xz} входит не $\cos(kx)$, а $\sin(kx)$. Такое представление позволяет свести систему уравнений в частных производных (2)–(5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой все переменные, характеризующие смещения, деформации, напряжения и давление, зависят только от вертикальной координаты z .

Для среды Максвелла уравнение состояния (реологическое соотношение) имеет вид:

$$\sigma_{ij} + \frac{\eta}{\mu} \frac{d}{dt} \sigma_{ij} = 2\eta \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (9)$$

где: t – время; μ – упругий модуль сдвига; η – коэффициент вязкости; индекс 1 соответствует координате x , а индекс 2 – координате z . Поскольку зависимость от времени определена как $\exp(\lambda t)$, уравнение Максвелла (9) принимает вид:

$$\sigma_{ij} + \frac{\eta}{\mu} \lambda \sigma_{ij} = 2\eta \lambda \varepsilon_{ij}. \quad (10)$$

Как следует из уравнения (10), если вязкость η очень велика $\left(\frac{\eta}{\mu} |\lambda| \gg 1 \right)$, уравнение Максвелла вырождается в уравнение состояния для упругой среды

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (11)$$

а если упругий модуль сдвига μ очень велик $\left(\frac{\eta}{\mu} |\lambda| \ll 1 \right)$, уравнение Максвелла вырождается в реологическое соотношение для вязкой ньютоновской жидкости

$$\sigma_{ij} = 2\eta \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

В рамках линейной теории устойчивости скорости связаны со смещениями простым соотношением $v_i = \lambda u_i$, поэтому уравнения, описывающие движения упругой среды, и уравнения, описывающие течения вязкой среды, имеют аналогичный вид. Из уравнений для упругой среды, в которые входят смещения u_i и модуль сдвига μ , сразу получаются уравнения для вязкой среды, если заменить u_i на v_i , а μ на η . Записывая уравнения для вязкой среды не в скоростях, а в смещениях, следует ввести эффективный модуль сдвига вязкой среды $\mu_{eff} = \lambda \eta$.

Вязкость геоматериала сильно зависит от температуры, которая в Земле быстро растет с глубиной. Поэтому верхняя кора обладает очень высокой вязкостью и ведет себя как упругая среда, а более глубокие слои Земли, где вязкость значительно ниже, ведут себя как вязкая среда.

Медленные безынерционные течения, которые называют ползущими, характеризуют геологические движения, возникающие при тепловой конвекции и при восстановлении изостазии. В настоящей работе рассматриваются ползущие геологические течения, вызываемые возмущениями плотности земной коры. В правой части уравнения (2) стоит инерционный член $\rho \lambda^2 U_x$, а левая часть этого уравнения в случае упругой среды содержит член $\mu k^2 U_x$. Аналогичная ситуация и в уравнении (3), которое содержит члены $\rho \lambda^2 U_z$ и $\mu k^2 U_z$. Следовательно, для пренебрежения инерционностью упругой среды, необходимо выполнение условия

$$|\lambda| \ll k \sqrt{\mu/\rho}. \quad (13)$$

Сжимаемостью упругой среды можно пренебречь при условии

$$\mu \ll K, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = 1/2, \quad (14)$$

где K – модуль всестороннего сжатия, ν – коэффициент Пуассона. Для геоматериала $\nu \approx 0.3$, $\frac{\mu}{K} \approx 0.5$, и условие несжимаемости (14), строго говоря, не выполняется. Однако учет сжимаемости, как показали проведенные автором расчеты, качественно не изменяет результаты, полученные

для несжимаемой упругой среды и представленные в настоящей статье. В уравнения, учитывающие сжимаемость среды, модуль всестороннего сжатия входит в виде безразмерного параметра $\frac{\mu}{3K}$, который можно считать малым. Условия безынерционности и несжимаемости для вязкой среды записываются в виде:

$$|\lambda| \ll \frac{\eta k^2}{\rho}, \quad (15)$$

$$|\lambda| \ll \frac{K}{\eta}. \quad (16)$$

Эти условия можно получить из требований (13) и (14) для упругой среды, подставив $\lambda\eta$ вместо упругого модуля сдвига μ .

Подставляя (8) в уравнения (2)–(5) и накладывая на величину инкремента ограничение (13), которое позволяет пренебречь инерционными членами в уравнениях (2) и (3), выражаем все физические переменные через вертикальное смещение:

$$u_x(x, z, t) = \frac{1}{k} D U_z(z) \exp(\lambda t) \sin(kx), \quad (17)$$

$$p(x, z, t) = \mu \left(-D + \frac{D^2}{k^2} \right) U_z(z) \exp(\lambda t) \cos(kx), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, z, t) &= -\sigma_{xx}(x, z, t) = \\ &= 2\mu D U_z(z) \exp(\lambda t) \cos(kx), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, z, t) &= \\ &= \mu \frac{1}{k} (D^2 + k^2) U_z(z) \exp(\lambda t) \sin(kx), \end{aligned} \quad (20)$$

а для амплитуды вертикального смещения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$(D^2 - k^2)^2 U_z = 0. \quad (21)$$

Уравнения (17)–(21), в которых введен дифференциальный оператор $D = d/dz$, записаны для упругого верхнего слоя. Чтобы рассматривать вязкую среду, подстилающую упругий слой, в уравнения (18)–(20) следует вместо упругого модуля сдвига μ подставить $\mu_{eff} = \lambda\eta$.

Уравнение (21) имеет общее решение:

$$U_z = e^{kz} C_1 + z e^{kz} C_2 + e^{-kz} C_3 + z e^{-kz} C_4, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (22)$$

$$U_z = e^{kz} B_1 + z e^{kz} B_2, \quad -\infty \leq z \leq 0, \quad (23)$$

где C_i и B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – произвольные константы. Уравнение (23) следует из требования ограниченности смещений в подстилающем слое полупространстве. Согласно (23), смещения в полупространстве убывают с глубиной как e^{kz} . Полупространство моделирует нижний слой, в

котором смещения проникают на глубину, зависящую от волнового числа k .

Коэффициент вязкости земных недр оценивается как $\eta \approx 4 \times 10^{19}$ Па·с [Cathles, 1975]. Упругий модуль сдвига и плотность недр можно оценить как $\mu \approx 6 \times 10^{10}$ Па, $\rho \approx 3 \times 10^3$ кг/м³. Все дальнейшие соотношения будут выписаны для безразмерных физических переменных, для которых сохраняем те же самые обозначения, что и для размерных. В качестве масштаба длины использована толщина верхнего упругого слоя коры, которая оценивается как $d = 10$ км, масштаб напряжения – упругий модуль сдвига μ , масштаб времени η/μ , где η коэффициент вязкости для глубоких слоев Земли. В приповерхностном слое вязкость выше на несколько порядков, и этот слой ведет себя как упругий даже на временах, сравнимых с возрастом Земли. Время η/μ , выбранное в качестве масштабного, называется временем Максвелла. Согласно приведенным оценкам, получаем масштаб времени $\eta/\mu \approx 6 \times 10^8$ с ≈ 20 лет. После введения масштаба времени можно сказать, что глубокие слои Земли ведут как вязкая среда, если $|\lambda| \ll 1$. Нет смысла рассматривать возмущения, длина волны которых $\frac{2\pi}{k}$ превышает 1000 км. Такое ограничение, наложенное на длину волны, приводит к ограничению $k > 6 \times 10^{-2}$, наложенному на безразмерное волновое число. При этом из условия (16) следует ограничение $|\lambda| \ll 2$, наложенное на безразмерный инкремент, а условия (13) и (15) приводят к значительно более слабому ограничению $|\lambda| \ll 1.5 \times 10^7$. Таким образом, при выполнении условия $|\lambda| \ll 1$ слои Земли, подстилающие верхнюю упругую кору, можно рассматривать как вязкую среду, пренебрегая инерционностью и сжимаемостью.

На всех графиках в этой статье представлены безразмерные инкременты λ и безразмерные волновые числа k . При выбранных масштабах длины и времени волновое число k измеряется в масштабе обратной длины 10^{-4} м⁻¹, а инкремент λ – в масштабе обратного времени 1.7×10^{-9} с⁻¹. В этих масштабах построены все графики в статье. Расчеты, в результате которых получены эти графики, проведены для безынерционной несжимаемой среды, т.е. заранее предполагается, что $|\lambda| \ll 1$. Если бы какой-нибудь расчет давал безразмерный инкремент, не удовлетворяющий требованию $|\lambda| \ll 1$, это означало бы только то, что в этом случае не появляется ползущее безынерционное течение. Однако ни в одном из случаев, ко-

торые будут рассмотрены далее, такая ситуация не возникает.

Для устойчивой системы ($\lambda < 0$), используемая линейная теория справедлива на любых временах, поскольку возмущение, зависящее от времени как $\exp(\lambda t)$, остается малым. Когда рассматриваемая система неустойчива ($\lambda > 0$), использование линейной теории перестает быть законным, когда $\lambda t \gg 1$. Поэтому в случае неустойчивости результаты линейного анализа устойчивости справедливы только на временах $t \leq 1/\lambda$, но это ограничение не является сильным в случае, когда $\lambda \ll 1$.

Учитывая соотношения (18)–(19) и вводя безразмерные переменные, уравнения (6) и (7) запишем в виде:

$$(D^2 + k^2)U_z^{(2)} = 0, \quad \left(3D - \frac{D^3}{k^2} + \varphi\right)U_z^{(2)} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (D^2 + k^2)U_z^{(2)} &= \lambda(D^2 + k^2)U_z^{(1)}, \\ \left(3D - \frac{D^3}{k^2}\right)U_z^{(2)} + RU_z^{(2)} &= \lambda\left(3D - \frac{D^3}{k^2}\right)U_z^{(1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

В уравнениях (24) и (25) введены безразмерные параметры $\varphi = \frac{\rho^{(2)}gd}{\mu}$, $R = \frac{\Delta\rho gd}{\mu}$, где $\Delta\rho = \rho^{(2)} - \rho^{(1)}$ – скачок плотности на границе между верхним слоем и полупространством. Если считать, что плотность верхнего слоя выше, чем плотность подстилающего полупространства, перепад плотности $\Delta\rho$ и параметр R положительны. Поскольку в недрах Земли перепады плотности малы, $\frac{R}{\varphi} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$.

Итак, решается краевая задача: обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (21) имеет общее решение, в которое входят 8 произвольных констант (по 4 для верхнего и нижнего слоев). Граничных условий тоже 8. На верхней свободно деформируемой границе ($z = 1$) наложены условия (24). На границе между слоями ($z = 0$) наложены условия (25) и условия непрерывности горизонтальных и вертикальных смещений. В силу (17) и (20) условия непрерывности горизонтального смещения и касательного напряжения сводятся к условиям непрерывности первой и второй производной вертикального смещения U_z по z . На нижней границе нижнего слоя $z = -\infty$ наложено условие ограниченности смещений. Из этого условия следует равенство нулю двух произвольных констант нижнего слоя, что учтено в уравнении (23). Краевые условия, как и само уравнение, записаны в терминах функции $U_z(z)$.

При такой постановке задачи исследуется устойчивость бесконечного горизонтального слоя к возмущениям, характеризуемым любыми волновыми числами k . Однако постановку задачи можно интерпретировать по-другому. Пусть в верхней коре имеется возмущение плотности (тяжелое включение), охватывающее область с горизонтальным размером L . Вертикальный размер d этой аномальной области выбран в качестве масштаба длины и, следовательно, равен 1. Такое возмущение плотности создает возмущение гравитационной силы, которое вызывает течение. Возможность перехода от рассмотрения возмущения с горизонтальным размером L к периодическому по горизонтали возмущению связана с тем, что первая гармоника $\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ дает основной вклад в разложение Фурье возмущения с горизонтальным размером L [Cathles, 1975; Биргер, 2016; 2017]. Волновое число k , характеризующее периодичность по горизонтали, связано с горизонтальным размером аномальной области как $k = \frac{2\pi}{L}$. При периодическом движении среда, неограниченная по горизонтали, разбивается на бесконечный набор вертикальных столбов. Движение в одном из вертикальных столбов ($0 < x < L$) моделирует движение, которое возникает в случае, когда возмущение плотности происходит в области с горизонтальным размером L . В столбе ($0 < x < L$) вертикальное смещение зависит от горизонтальной координаты как $\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, а горизонтальное смещение – как $\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$. Поэтому на боковых краях столба ($x = 0, x = L$) горизонтальное смещение отсутствует, а вертикальное смещение максимально и направлено вверх, а в центре ($x = L/2$) столба вертикальное смещение имеет ту же величину, но направлено вниз.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛОГО УПРУГОГО СЛОЯ

В случае упругого тяжелого слоя на вязком полупространстве граничные условия приводят к системе из шести однородных уравнений для шести произвольных констант:

$$\begin{aligned} ke^k C_1 + (1+k)e^k C_2 + ke^{-k} C_3 + (-1+k)e^{-k} C_4 &= 0, \\ (\varphi + 2k)e^k(C_1 + C_2) + (\varphi - 2k)e^{-k}(C_3 + C_4) &= 0, \\ C_1 + C_3 - B_1 &= 0, \\ kC_1 + C_2 - kC_3 + C_4 - kB_1 - B_2 &= 0, \\ kC_1 + C_2 + kC_3 - C_4 - \lambda kB_1 - \lambda B_2 &= 0, \\ (R + 2k)C_1 + (R - 2k)C_3 - 2\lambda kB_1 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

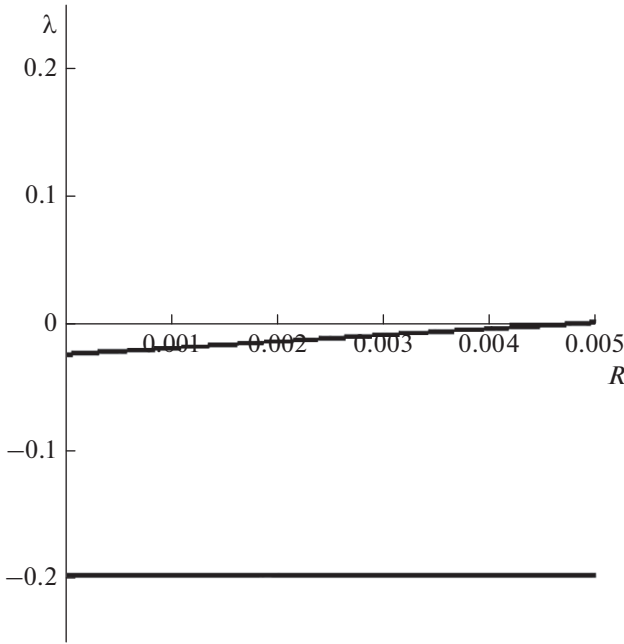


Рис. 1. Зависимость инкремента λ от параметра R при $\varphi = 0.005$ и фиксированном волновом числе $k = 0.1$. На этом рисунке, как и на всех последующих, безразмерный инкремент λ измеряется в масштабе $1.7 \times 10^{-9} \text{ с}^{-1}$.

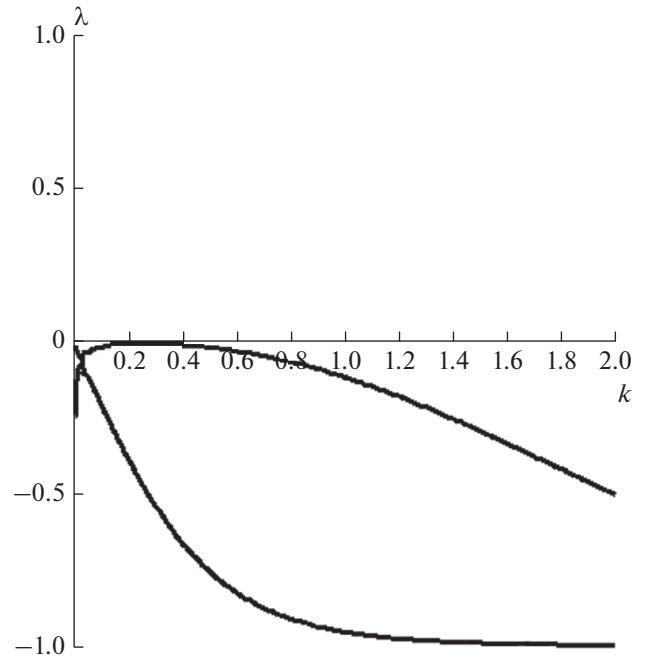


Рис. 2. Зависимость инкремента λ от волнового числа k при фиксированном значении параметров $\varphi = 0.005$, $R = 0.01\varphi$. На этом рисунке, как и на всех последующих, безразмерное волновое число k измеряется в масштабе 10^{-4} м^{-1} .

Приравнявая нулю определитель этой системы линейных уравнений (если определитель отличен от нуля, все константы равны нулю), получаем биквадратное уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (27)$$

где:

$$a = 2k(8k^3 - 4k\varphi + 4k + 4k\text{ch}(2k) + 2\varphi\text{sh}(2k)),$$

$$b = -8Rk^3 - 4Rk + 4Rk\varphi + 16k^2\text{sh}(2k) + 2R\varphi\text{sh}(2k) - 4Rk\text{ch}(2k) + 8k\varphi\text{ch}(2k),$$

$$c = -8Rk^2 + 2R\varphi - 16k^4 + 8k^2\varphi - 8k^2 - 2R\varphi\text{ch}(2k) + 4k\varphi\text{sh}(2k) + 8k^2\text{ch}(-2k) + 4Rk\text{sh}(2k).$$

Решая уравнение (27), находим два значения инкремента λ и зависимость каждого значения инкремента λ от k при различных значениях параметра $R = \frac{\Delta\rho g d}{\mu}$ и фиксированном значении параметра $\varphi = \frac{\rho g d}{\mu} \approx 0.005$ (такая оценка соответствует верхнему слою земной коры толщиной порядка 10 км). Безразмерный параметр $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, где

ρ – плотность тяжелого верхнего слоя, лежит в интервале $0 < \frac{\Delta\rho}{\rho} < 1$. Этот параметр равен единице только в случае, когда плотность нижнего слоя равна нулю. Поскольку $\frac{R}{\varphi} = \frac{\Delta\rho}{\rho}$, параметр R может изменяться в интервале $0 < R < \varphi$.

Когда $R < \varphi$, уравнение (27) имеет два действительных отрицательных корня λ , зависимость которых от R и от k представлена на рис. 1 и рис. 2.

Таким образом, тяжелое включение в верхнем упругом слое земной коры устойчиво. Эта устойчивость обеспечивает восстановление изостатического равновесия: земная поверхность, возмущенная в начальный момент, со временем возвращается в исходное равновесное состояние даже при наличии тяжелого включения в верхней коре. Примером восстановления изостазии является процесс послеледниковых поднятий земной поверхности [Cathles, 1975; Биргер, 2016; 2017]. Расчеты показывают, что неустойчивость могла бы возникнуть только в том случае, когда параметры $\varphi = \frac{\rho g d}{\mu}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ на несколько порядков превышают их оценки для земной коры, т.е. при не-

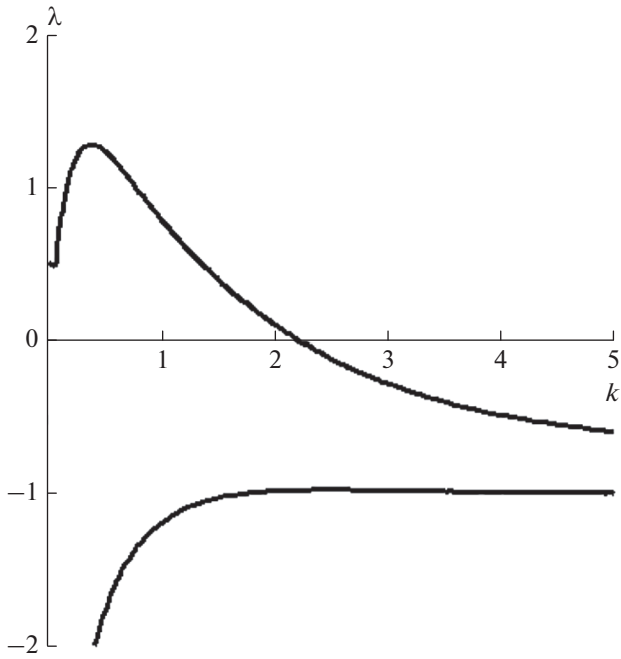


Рис. 3. Зависимость инкремента λ от волнового числа k при фиксированном значении параметров $\varphi = 5$, $R = 4$.

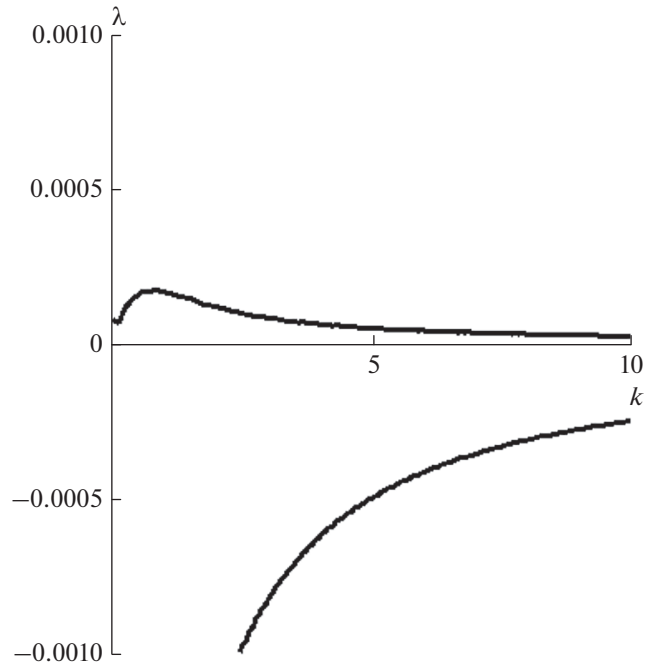


Рис. 4. Зависимость λ от k при фиксированных параметрах $\varphi = 0.005$ и $R = 0.001$ для тяжелого вязкого включения.

реально малом модуле упругости и при нереально большом перепаде плотности. Например, если принять $\varphi = 5$, $R = 4$, получаем неустойчивость, при которой зависимость λ от k показана на рис. 3.

Результаты анализа устойчивости тяжелого упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве, представлены в Приложении 2.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛОГО ВЯЗКОГО СЛОЯ

В случае тяжелого включения в вязком слое ($0 < z < 1$), лежащем на вязком полупространстве, граничные условия приводят к системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} ke^k C_1 + (1+k)e^k C_2 + ke^{-k} C_3 + (-1+k)e^{-k} C_4 &= 0, \\ (\varphi + 2\lambda k)e^k(C_1 + C_2) + (\varphi - 2\lambda k)e^{-k}(C_3 + C_4) &= 0, \\ C_1 + C_3 - B_1 &= 0, \\ kC_1 + C_2 - kC_3 + C_4 - kB_1 - B_2 &= 0, \\ kC_1 + C_2 + kC_3 - C_4 - kB_1 - B_2 &= 0, \\ (R + 2\lambda k)C_1 + (R - 2\lambda k)C_3 - 2\lambda kB_1 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Приравнивая определитель этой системы линейных уравнений нулю, находим для $\varphi = 0.005$ и $R = 0.001$ зависимость λ от k , показанную на рис. 4. В случае, когда $R = 0$, т.е. когда нет скачка плотности, верхняя кривая на рис. 4 исчезает, а оставшаяся нижняя кривая показывает устойчи-

вость, которая приводит к восстановлению изостатического равновесия.

Зависимость λ от параметра R при $k = 1$ показана на рис. 5. Вязкий тяжелый слой, подстилаемый вязким полупространством с тем же самым коэффициентом вязкости, неустойчив при $\Delta\rho > 0$, т.е. при сколь угодно малом перепаде плотности. Такая неустойчивость, называемая неустойчивостью Рэля–Тейлора, хорошо известна в гидродинамике и геофизике [Теркот, Шуберт, 1985].

Однако задача о тяжелом вязком слое, подстилаемом вязким слоем с меньшей плотностью, не соответствует реальной ситуации в Земле, где холодный верхний слой ведет себя как упругая среда даже на очень больших временах. Чтобы учесть влияние верхнего упругого слоя, можно моделировать этот слой как тонкую упругую пластину. Тогда на верхней поверхности ($z = 1$) должны выполняться граничные условия, определяемые силовым воздействием упругой пластины:

$$\frac{2}{(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu h_{el}} \sigma_{xz} = 0, \quad (29)$$

$$N \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \rho g u_z + \sigma_{zz} - p = 0, \quad (30)$$

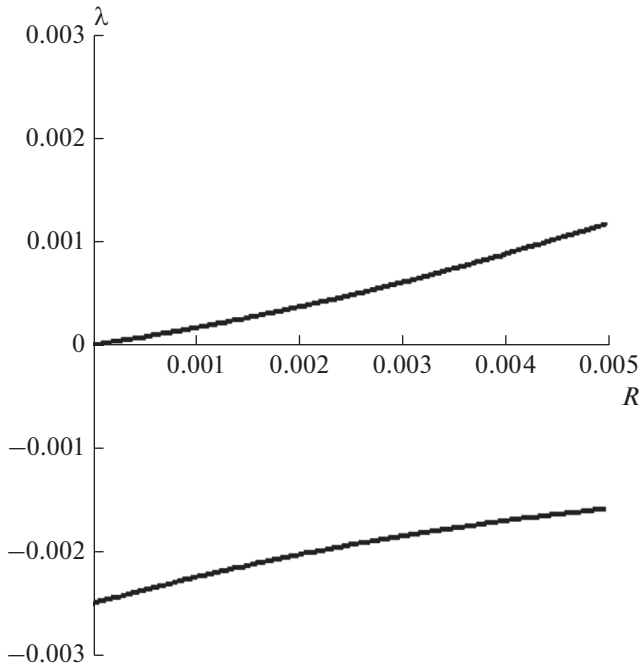


Рис. 5. Зависимость инкремента λ от параметра R при фиксированном волновом числе $k = 1$ для тяжелого вязкого включения.

$$N = \frac{\mu h_{el}^3}{6(1-\nu)}, \quad (31)$$

где $\nu \approx 0.3$ – коэффициент Пуассона; N – изгибная жесткость упругой пластины, имеющей толщину h_{el} . Будем считать, что толщина упругой пластины h_{el} равна толщине $d = 10$ км, лежащего под ней тяжелого вязкого слоя. Когда заданы граничные условия (29)–(31), первые два уравнения из системы уравнений (28) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{(1-\nu)}k\right)ke^k C_1 + \left(1 + \frac{1}{(1-\nu)}k\right)(1+k)e^k C_2 + \\ & + \left(1 - \frac{1}{(1-\nu)}k\right)ke^{-k} C_3 + \\ & + \left(1 - \frac{1}{(1-\nu)}k\right)(-1+k)e^{-k} C_4 = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \left(\varphi + \frac{1}{6(1-\nu)}k^4 + 2\lambda k\right)e^k(C_1 + C_2) + \\ & + \left(\varphi + \frac{1}{6(1-\nu)}k^4 - 2\lambda k\right)e^{-k}(C_3 + C_4) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Приравняв нулю определитель полученной системы уравнений, находим зависимость λ от R при фиксированных значениях $\varphi = 5 \times 10^{-3}$ и $k = 1$, показанную на рис. 6. Сравнение рис. 6 с

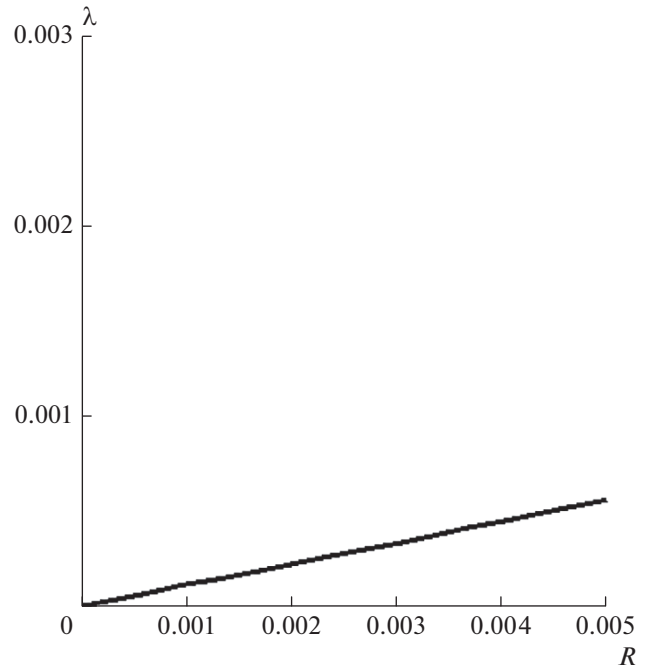


Рис. 6. Зависимость положительного инкремента λ от параметра R в случае, когда верхний упругий слой моделируется как тонкая пластина.

рис. 5 показывает, что учет самого верхнего упругого слоя, моделируемого как тонкая пластина, снижает значения инкрементов λ , т.е. снижает неустойчивость.

Фиксируя $\varphi = 5 \times 10^{-3}$ и $R = 5 \times 10^{-5}$, находим зависимость λ от k , которая показана на рис. 7а. На рис. 7б показана та же самая зависимость в другом масштабе.

Приближение тонкой пластины применимо в случае, когда рассматриваются возмущения с длиной волны, значительно превышающей толщину слоя. Этому условию удовлетворяют только возмущения с волновыми числами $k \ll \pi$. Кроме того, приближение тонкой пластины не учитывает вес упругого слоя. Поэтому приходится применять трехслойную модель, рассматривая упругий верхний слой ($1 \leq z \leq 2$) с плотностью ρ . Под этим упругим слоем находится тяжелый вязкий слой ($0 \leq z \leq 1$) с плотностью $\rho + \Delta\rho$. Под тяжелым вязким слоем находится слой, который моделируется как полупространство ($-\infty \leq z \leq 0$) с плотностью ρ . На верхней границе $z = 2$ (земная поверхность) отсутствуют нормальные и касательные напряжения, т.е. наложены граничные условия (23) и (24). На внутренних границах $z = 1$ и $z = 0$ выполняются условия непрерывности смещений и напряжений. Распределение вертикальных смещений в верхнем слое имеет вид:

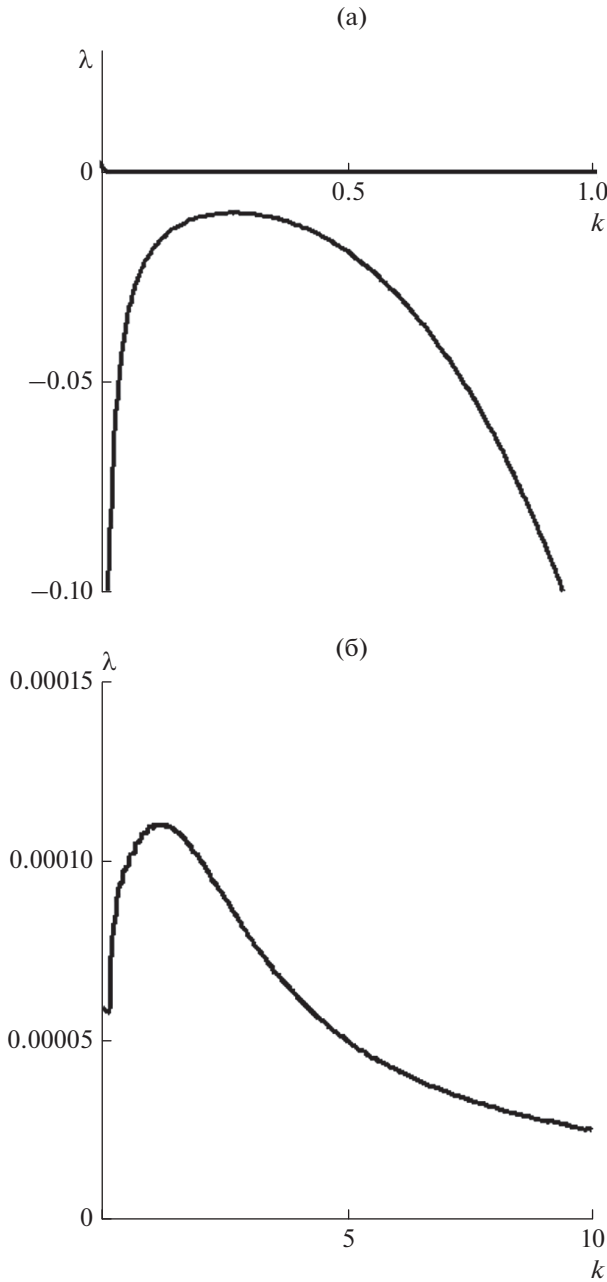


Рис. 7. (а) — Зависимость инкремента λ от волнового числа k при фиксированных параметрах $\varphi = 5 \times 10^{-3}$ и $R = 5 \times 10^{-5}$ в случае, когда верхний упругий слой моделируется как тонкая пластина; (б) — та же самая зависимость, что и на рис. 7а, при малых значениях инкремента λ .

$$U_z = e^{kz} A_1 + z e^{kz} A_2 + e^{-kz} A_3 + z e^{-kz} A_4, \quad (34)$$

$$1 \leq z \leq 2,$$

где A_i — произвольные константы, а в нижних слоях справедливы распределения (20) и (21). По-

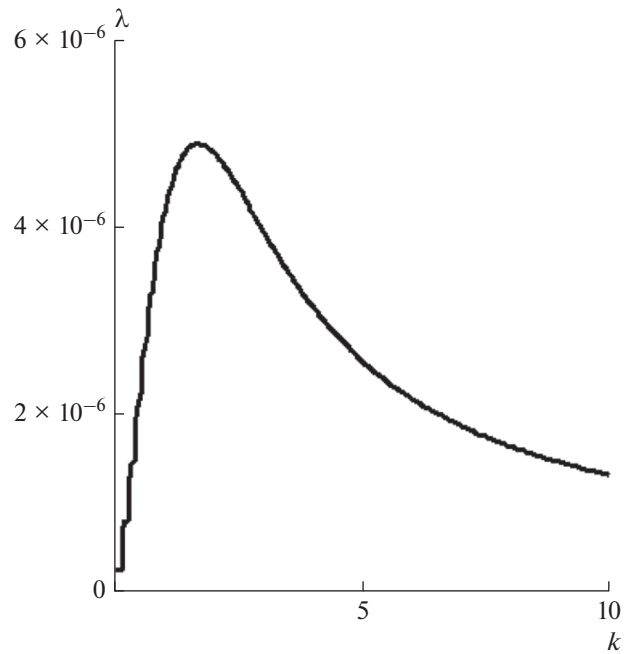


Рис. 8. Зависимость инкремента λ от волнового числа k при фиксированных значениях параметров $\varphi = 5 \times 10^{-3}$ и $R = 5 \times 10^{-5}$ в случае трехслойной модели.

сле подстановки этих распределений в граничные условия, получаем систему из 10 уравнений:

$$\begin{aligned} & k e^{2k} A_1 + (1 + 2k) e^{2k} A_2 + k e^{-2k} A_3 + \\ & \quad + (-1 + 2k) e^{-2k} A_4 = 0, \\ & (-1 + 2k) e^{-2k} A_1 + (\varphi + 4k) e^{2k} A_2 + \\ & \quad + (\varphi - 2k) e^{-2k} A_3 + (\varphi - 4k) e^{-2k} A_4 = 0, \\ & e^k A_1 + e^k A_2 + e^{-k} A_3 + e^{-k} A_4 - e^k C_1 - e^k C_2 - \\ & \quad - e^{-k} C_3 - e^{-k} C_4 = 0, \\ & k e^k A_1 + (1 + k) e^k A_2 - k e^{-k} A_3 + (1 - k) e^{-k} A_4 - \\ & \quad - k e^k C_1 - (1 + k) e^k C_2 + \\ & \quad + k e^{-k} C_3 + (k - 1) e^{-k} C_4 = 0, \\ & k e^k A_1 + (1 + k) e^k A_2 + k e^{-k} A_3 + (k - 1) e^{-k} A_4 - \\ & \quad - \lambda k e^k C_1 - \lambda (1 + k) e^k C_2 - \lambda k e^{-k} C_3 - \\ & \quad - \lambda (k - 1) e^{-k} C_4 = 0, \\ & (2k e^k - R)(A_1 + A_2) - (2k e^k + R)(A_3 + A_4) - \\ & \quad - 2\lambda k e^k (C_1 + C_2) + 2\lambda k e^{-k} (C_3 + C_4) = 0, \\ & \quad C_1 + C_3 - B_1 = 0, \\ & k C_1 + C_2 - k C_3 + C_4 - k B_1 - B_2 = 0, \\ & k C_1 + C_2 + k C_3 - C_4 - k B_1 - B_2 = 0, \\ & (R + 2\lambda k) C_1 + (R - 2\lambda k) C_3 - 2\lambda k B_1 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

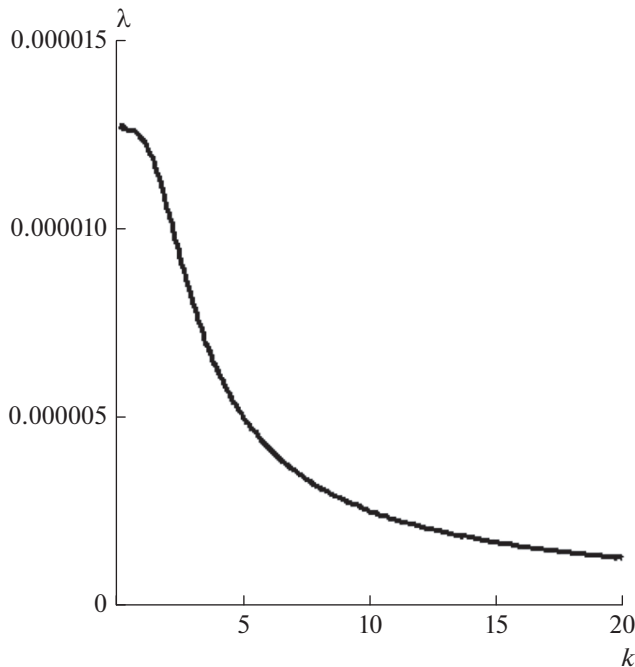


Рис. 9. Зависимость инкремента от волнового числа в случае, когда вязкость верхнего холодного слоя на 4 порядка выше, чем вязкость подстилающих горячих слоев.

Приравняв нулю определитель системы уравнений (35) и решив полученное уравнение 3-го порядка по λ , получаем зависимость корней λ от волнового числа k . На рис. 8 представлена зависимость положительного корня λ от волнового числа при фиксированных значениях $\varphi = 5 \times 10^{-3}$ и $R = 5 \times 10^{-5}$.

Как видно из рис. 8, наиболее неустойчивой является мода, для которой $k \approx 1.8$. Таким образом, при фиксированном вертикальном размере $d = 10$ км тяжелого включения, наиболее неустойчиво включение с горизонтальным размером $\frac{2\pi}{k} d \approx 35$ км. Для волнового числа $k \approx 1.8$ значение безразмерного инкремента $\lambda \approx 5 \times 10^{-6}$. Возмущение развивается во времени как $\exp(\lambda t)$. Поскольку был введен масштаб времени $\eta \approx 20$ лет, характерное время развития возмущения, т.е. время, за которое возмущение возрастает в $e \approx 2.7$ раз, составляет 4 миллиона лет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель проведенного исследования состоит в том, чтобы установить при каких условиях возмущения плотности коры вызывают медленные

(ползущие) течения в недра Земли, изменяющие рельеф земной поверхности в геологических масштабах времени. Ползущие течения являются безынерционными и характеризуются малыми значениями инкрементов и волновых чисел. Возникновение ползущих течений связано с крупномасштабными возмущениями плотности земной коры. Показано, что тяжелое включение, которое расположено в вязком горячем слое коры, подстилающем верхний холодный упругий слой, является неустойчивым (медленно погружается в лежащие ниже вязкие слои мантии).

Кроме того, показано, что тяжелое включение в холодном верхнем слое коры является устойчивым. Именно упругость холодного верхнего слоя определяет устойчивость, препятствуя погружению тяжелого включения в подстилающие вязкие слои. Материал земной коры, как и любой поликристаллический материал, обладает не только упругостью, но и ползучестью, которая определяется имеющимися дефектами в идеально правильной кристаллической структуре. Упруго — ползучая реология хорошо описывается моделью Максвелла, которая представляет полную деформацию в виде суммы упругой деформации и вязкой деформации. Ползучесть геоматериала, конечно, не описывается вязкой ньютоновской моделью, однако можно ввести эффективную ньютоновскую вязкость, зависящую от характерной продолжительности рассматриваемого процесса. Материал, описываемый моделью Максвелла, ведет себя как вязкий при медленных процессах, характерное время которых значительно превышает время Максвелла, представляющее собой отношение коэффициента вязкости к упругому модулю сдвига. В процессах с характерным временем, значительно более коротким, чем время Максвелла, материал ведет себя как упругий. При линейном анализе устойчивости зависимость от времени задается в виде $e^{\lambda t}$, а характерное время процесса определяется как $\frac{1}{\lambda}$. Вязкость геоматериала сильно зависит от температуры, которая в Земле быстро растет с глубиной. Поэтому верхняя кора обладает очень высокой вязкостью и может вести себя как упругая среда в то время, когда более глубокие слои Земли, где вязкость значительно ниже, ведут себя как вязкая среда. Однако при очень малом инкременте λ (сверхмедленный процесс) холодный верхний слой коры ведет себя как вязкий, и имеет место неустойчивость Рэлея — Тейлора, при которой включение с повышенной плотностью в верхнем вязком слое погружается в подстилающую вязкую среду при любом (даже очень малом) перепаде плотности. Таким образом, можно утверждать, что тяжелое включение в верхней ко-

ре всегда неустойчиво, хотя движение, вызванное неустойчивостью, происходит крайне медленно. Сделанное выше утверждение о том, что тяжелое включение в верхнем холодном слое коры является устойчивым, подразумевает только невозможность наблюдать такой медленный процесс на ограниченном промежутке времени. Эффективная вязкость верхнего слоя на несколько порядков выше, чем вязкость подстилающих слоев. На рис. 9 представлены результаты расчетов, выполненных для случая, когда верхний слой с тяжелым включением $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.01\right)$ имеет вязкость на 4

порядка выше, чем вязкость $\eta \approx 4 \times 10^{19}$ Па·с подстилающего слоя, который моделируется как полупространство.

Как видно из рис. 9, наиболее неустойчивым является тяжелое включение, которому соответствует безразмерное волновое число $k \approx 1.5$ и безразмерный инкремент $\lambda \approx 10^{-5}$. Поскольку масштаб длины $-d = 10$ м (толщина верхнего слоя), такое включение имеет горизонтальный размер $\frac{2\pi}{k}d \approx 40$ км. В качестве масштаба времени принято отношение коэффициента вязкости верхнего слоя к упругому модулю сдвига $\mu \approx 6 \times 10^{10}$ Па. Безразмерному инкременту $\lambda \approx 10^{-5}$ соответствует огромное характерное время развития неустойчивости $\frac{\eta}{\lambda\mu} \approx 2 \times 10^{10}$ лет, которое значительно превосходит возраст Земли. Если верхний холодный слой коры рассматривается как упругий, ему приписывается бесконечно большая вязкость, при которой тяжелые включения в этом слое устойчивы. Однако вязкость этого слоя хотя и велика, но не бесконечна. Поэтому тяжелые включения в этом верхнем слое коры неустойчивы, но эта неустойчивость развивается так медленно, что тяжелые включения в верхнем слое коры практически не меняют своего положения за период времени, сравнимый с возрастом Земли.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Полное давление представимо в виде $p_0(z) + p$, где $p_0(z)$ – начальное литостатическое давление, а p – возмущение давления, которое входит в исходные уравнения (2)–(4) и определяется соотношением (16). На верхней деформированной поверхности обращается в нуль сила, действующая на единицу площади поверхности. Это условие можно перенести на исходную плоскую поверхность ($z = d$), если учесть, что после де-

формации поверхность испытывает вертикальное смещение u_z :

$$\sigma_{ij}n_j - [p_0(d - u_z) + p]n_i = 0, \quad (\text{П1.1})$$

где n_i – компоненты единичного вектора, направленного по нормали к деформированной поверхности, а $p_0(z - u_z)$ – начальное давление в той точке, из которой материальная частица переместилась в точку с вертикальной координатой $z = d$. В рамках линейной теории предполагается, что смещение мало и поверхность деформируется слабо. Следовательно:

$$n_x \approx 0, \quad n_z \approx 1, \quad (\text{П1.2})$$

$$p_0(d - u_z) \approx p_0(d) - \frac{dp_0}{dz}u_z, \quad (\text{П1.3})$$

где $p_0(d) = 0$. Как следует из (П1.2) и (П1.3), уравнение (П1.1) принимает вид:

$$\sigma_{xz} = 0,$$

$$-p + \sigma_{zz} + \rho_0 g u_z = 0,$$

что соответствует уравнению (6). Аналогичный учет деформируемости внутренней граничной поверхности ($z = 0$) использован и при выводе уравнения (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В настоящем исследовании предполагается, что верхний упругий слой коры имеет толщину 10 км. Если тяжелое включение находится в самой верхней области этого слоя и имеет толщину 1 км, то можно применять модель, в которой тяжелое упругое включение подстилается упругим полупространством. В этом случае принимаем масштаб длины $d = 1$ км, а параметр ϕ оценивается как $\phi = \frac{\rho g d}{\mu} = 0.0005$. Для такой модели производные константы C_i B_i связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} & k e^k C_1 + (1 + k) e^k C_2 + k e^{-k} C_3 + \\ & + (-1 + k) e^{-k} C_4 = 0, \\ & (2k + \phi) e^k C_1 + (2k + \phi) e^k C_2 + \\ & (-2k + \phi) e^{-k} C_3 + (-2k + \phi) e^{-k} C_4 = 0, \quad (\text{П2.1}) \\ & C_1 + C_3 - B_1 = 0, \\ & k C_1 + C_2 - k C_3 + C_4 - k B_1 - B_2 = 0, \\ & k C_1 + C_2 + k C_3 - C_4 - k m B_1 - m B_2 = 0, \\ & (R + 2k) C_1 + (R - 2k) C_3 - 2k m B_1 = 0, \end{aligned}$$

где $m = \frac{\mu_h}{\mu}$ – отношение модуля сдвига упругого полупространства к модулю сдвига верхнего слоя.

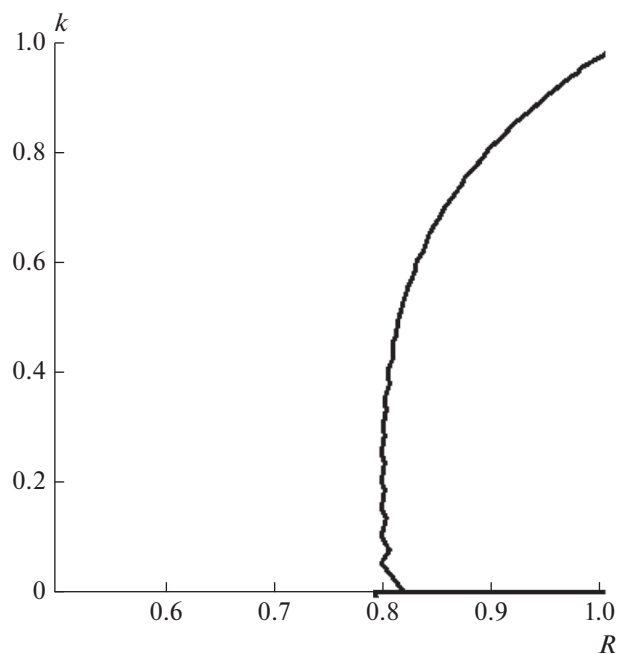


Рис. 10. Зависимость волнового числа k от параметра R при фиксированном параметре $\varphi = 1$ в случае, когда упругий слой подстилается идеальной жидкостью.

Инкремент λ не входит в уравнения (П2.1), а применяемый в настоящей работе метод исследования неустойчивости по Ляпунову основан на поиске всех значений λ , характеризующих рассматриваемую систему. Поэтому упругая среда — не самый удачный объект применения метода Ляпунова. Геоматериал хорошо описывается реологическими моделью Максвелла (или более сложными реологическими моделями максвелловского типа). В рамках модели Максвелла упругий материал — это материал с бесконечно большим коэффициентом вязкости η . Если перейти от упругой модели к модели Максвелла, уравнения (П2.1) заменились бы уравнениями, содержащими инкремент λ . Когда коэффициент вязкости η очень велик, среда ведет себя как упругая даже при очень малых инкрементах λ . Однако даже уравнения (П2.1) позволяют сделать определенные выводы об устойчивости. Приравняв нулю определитель системы уравнений (П2.1), получаем характеристическое уравнение, связывающее переменные R и k . Функция $k(R)$ определяет для фиксированного параметра R такое значение k , при котором возникает неустойчивость и в изначально плоской коре появляются вертикальные смещения, пропорциональные $\cos(kx)$. При тех значениях параметра R , которым соответствует какие-либо значения волнового числа k , имеет место неустойчивость, вызванная тяжелым включением в верхней коре. Если считать, что в коре

не возникают большие начальные смещения, при тех значениях параметра R , которым не соответствует ни одно значение волнового числа k , кора устойчива.

Значение $m = 1$ в уравнениях (П2.1) соответствует случаю, когда модуль сдвига для упругого полупространства равен модулю сдвига тяжелого верхнего слоя. Положив $m = 0$ (модуль сдвига для упругого полупространства равен нулю), рассматриваем тяжелый упругий слой, под которым находится идеальная жидкость. В этом случае определитель системы уравнений (П2.1) совпадает с определителем системы уравнений (26), в которой $\lambda = 0$. Дело в том, что, когда смещение зависит от времени как $\exp(\lambda t)$, а $\lambda = 0$, сдвиговые напряжения в вязкой среде обращаются в нуль, поэтому вязкая среда ведет себя как идеальная жидкость и ничем не отличается от упругой среды с нулевым модулем упругости. Другими словами, эффективный модуль упругости вязкой среды $\eta\lambda$ обращается в нуль при $\lambda = 0$.

Решая характеристическое уравнение, соответствующее системе уравнений (П2.1) при фиксированном параметре $\varphi = 0.0005$, видим, что при любых значениях $m \neq 0$ и при введенном ранее естественном ограничении $0 < R < \varphi$, наложенном на значения параметра R , не существует волнового числа k , которое удовлетворяет этому уравнению. Поэтому можно утверждать, что тяжелые включения в верхнем упругом слое коры устойчивы. Неустойчивость могла бы возникнуть только в том случае, когда $m = 0$ (упругий слой подстилается идеальной жидкостью), а параметры $\varphi = \frac{\rho g d}{\mu}$ и $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ на несколько порядков превышают их оценки для земной коры, т.е. при нереально малом модуле упругости и при нереально большом перепаде плотности. Например, если принять $m = 0$ и $\varphi = 1$, получаем неустойчивость, при которой зависимость k от R показана на рис. 10.

В этой работе исследованы связанные с малыми инкрементами медленные течения, при рассмотрении которых можно пренебречь упругостью и инерционностью. При рассмотрении больших инкрементов λ и быстрых течений можно пренебречь вязкостью, но необходимо учитывать упругость и инерционность. В случае чисто упругой среды инкремент оказывается чисто мнимым $\lambda = \pm i\omega$, неустойчивость не возникает, а задача сводится к стоячим волнам Рэлея в среде со скачком плотности, который дает действительную поправку к рэлеевской частоте. Частота рэлеевской волны слабо зависит от модуля объемного сжатия, но сильно зависит от модуля сдвига. Таким образом, именно сдви-

говая упругость определяет движения среды вблизи свободной границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Биргер Б.И.* Динамика литосферы Земли. М.: Ленанд. 2016. 256 с.
- Биргер Б.И.* Восстанавливающие изостазию течения в литосфере // Геофизические исследования. 2017. № 4. С. 17–31.
- Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир. 1981. 638 с.
- Мухамедиев Ш.А., Рыжак Е.И., Синюхина С.В.* Об устойчивости двуслойной системы неоднородных тяжелых сжимаемых жидкостей // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 3. С. 375–385.
- Рыжак Е.И., Мухамедиев Ш.А., Синюхина С.В.* Условия и механизмы возникновения гравитационной неустойчивости слоистых объемно-упругих геомассивов // Физика Земли. 2016. № 6. С. 4–20.
- Рыжак Е.И., Синюхина С.В.* Об устойчивости стратифицированных упругих геосистем в поле силы тяжести // Докл. РАН. 2019. Т. 489. № 3. С. 298–302.
- Теркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. М.: Мир. 1985. 730 с.
- Birger B.I.* Temperature-dependent transient creep and dynamics of cratonic lithosphere // Geophys. J. Inter. 2013. V. 195. P. 695–705.
- Karato S.* Deformation of Earth Materials. An Introduction to the Rheology of Solid Earth. Cambridge university press. 2008. 463 p.
- Cathles L.M.* The viscosity of the Earth's mantle. Princeton university press. 1975. 386 p.

Gravitational Instability in the Earth's Viscoelastic Crust

B. I. Birger*

Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia

**E-mail: birgerbor@mail.ru*

This paper studies instability of a heavy inclusion in the Earth's upper layers by the linear theory method for small perturbations. The existence of such inclusions with increased density is associated with chemical inhomogeneity or phase transitions. The viscoelasticity of the geomaterial is described by the Maxwell rheological model. Two layouts of the inclusion with increased density are considered. The heavy inclusion in the cold upper elastic layer of the crust does not change its location under small perturbations, i.e., it is stable according to the linear theory. The heavy inclusion which is located in the hot viscous crustal layer underlying the upper cold layer, is unstable (slowly sinking into the underlying viscous mantle layers).

Keywords: gravitational instability, viscoelasticity of the geomaterial, Maxwell rheological model