

## РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2023 г. А. С. Черепанцев

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: s6319a@mail.ru

Поступила в редакцию 01.06.2021 г.

После доработки 29.06.2022 г.

Принята к публикации 06.07.2022 г.

Рассмотрена модель релаксации напряжений в системе дискретных элементов. Модель предполагает рассмотрение малого временного масштаба процесса, при котором внешнее поступление дополнительных напряжений в систему пренебрежимо мало. Нелинейное взаимодействие элементов аналогично взаимодействию элементов в открытой диссипативной OFC-модели. Условия сброса определяются эффектом статической усталости. Показано, что при высоком уровне связи элементов в модели формируется степенной спад частоты сбросов во времени, аналогичный, наблюдаемому в афтершоковых последовательностях землетрясений. Данная закономерность слабо зависит от начального распределения напряжений в системе и имеет степенной показатель  $p = 0.85-1.0$  при значениях параметра связи элементов  $\alpha = 0-0.25$ . Анализ длительности временной задержки  $c$  возникновения степенного спада частоты сбросов показывает связь данного параметра с длительностью сбросов большой амплитуды в начальной фазе релаксационного процесса. Величина  $c$  в этом случае определяется параметром  $\alpha$ . Расчеты показывают, что и релаксация среднего напряжения  $\sigma(t)$  в системе элементов подчиняется соотношению  $t \propto e^{-\gamma\sigma}$  с временем задержки, соответствующим значению  $c$  для зависимости частоты сбросов. При этом во временном ряде средней величины уменьшения напряжения при сбросе отдельного элемента  $d\sigma$  задержка отсутствует. Зависимость  $d\sigma(t)$  определяется соотношением  $t \propto e^{-\beta\Delta\sigma}$  во всем диапазоне расчетных времен релаксационного процесса. Значение  $\beta$  линейно уменьшается с ростом связи элементов модели  $\alpha$ .

*Ключевые слова:* OFC-модель, эффект статистической усталости, афтершоковая последовательность землетрясений, закон Омори–Утсу.

DOI: 10.31857/S0002333723010027, EDN: BZWMZE

### ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемая естественная сейсмичность представляет собой одну из форм диссипации накапливаемой упругой энергии в литосфере Земли. Потери энергии  $\Delta E_e$  в системе упругих напряжений, обусловленные землетрясением [Kostrov, Das, 1988], без учета изменения гравитационной энергии, включают в себя сейсмическую энергию  $E_s$ , работу сил трения на разломе  $E_f$ , поверхностную энергию связи породы по разлому  $E_d$ . Потери упругой энергии, определяемые указанными процессами, свидетельствуют о диссипативном характере динамической системы напряженного состояния геологической среды.

Исходя из природы сейсмичности как потока дискретных событий, стандартной формой регистрируемой информации являются записи волнового пакета, излученного землетрясением, на пространственно разнесенной системе станций

наблюдения. Обработка записей позволяет получить основные параметры землетрясения, такие как значения времени возникновения, величины, координат гипоцентра, механизма очага землетрясения. Эти данные формируют каталоги землетрясений как последовательности точечных событий во времени. Объединенные в каталог параметры землетрясений, представляющие собой информативный набор характеристик отдельных землетрясений, позволяют исследовать общие закономерности сейсмического режима значительных пространственных областей. Рассматривая сейсмическую активность как отдельную проекцию динамической системы, удается получить знания о свойствах общей системы напряженного деформированного состояния геологической среды. При этом для использования в анализе сейсмичности методов нелинейной динамики и соответственно перехода к непрерывному временному ряду, возможно использование кумуля-

тивного ряда параметра сейсмической энергии [Черепанцев, 2018].

Для анализа данных каталогов принято использовать аппарат статистических методов анализа точечных процессов. Именно данный подход позволил выделить фундаментальные эмпирические закономерности энергетического распределения землетрясений, их пространственной и временной организации. Рассмотрение сейсмического процесса как дискретного потока событий позволяет не только описать статистические закономерности, но и перейти к моделированию такого потока. В качестве примера можно привести статистическую модель ветвления землетрясений ETAS [Ogata, 1988; Helmstetter, Sornette, 2003; Holliday et al., 2008]. Она, в частности, используется для описания фундаментальной закономерности степенного спада частоты землетрясений во времени. В соответствии с ней каждое землетрясение сопровождается афтершоковой последовательностью. Первичное землетрясение является материнским. Оно генерирует дочерние землетрясения — афтершоки. В свою очередь, каждое из дочерних афтершоков становится родительским землетрясением, которое может генерировать второе поколение дочерних афтершоков более высокого порядка. На основе расчетов, проведенных авторами, делается вывод, что модель ETAS отражает наблюдаемые закономерности афтершоковых последовательностей землетрясений при включении в нее закономерностей повторяемости и времени возникновения землетрясений. Однако в ряде последующих работ указывается на неадекватность предположения о том, что интенсивность порождаемого потока афтершоков после главных толчков и после афтершоков зависит лишь от магнитуды “порождающего” события [Баранов, Шебалин, 2019; Shebalin et al., 2020]. На основе обработки большого объема афтершоковых последовательностей, авторы показывают, что продуктивность землетрясений, определяющая, в частности, количество афтершоков, является случайной величиной с экспоненциальным распределением.

Другой подход для описания наблюдаемых закономерностей основан на представлении сейсмического процесса как нелинейной динамической системы. В этом случае модель строится на понятных физических принципах непрерывной во времени эволюции напряженно деформированного состояния геологической среды, включающей явление землетрясений. Хотя динамика землетрясений представляет собой сложный процесс, существует несколько простых фактов, которые должны входить в модель, описывающую сейсмический режим.

1. Возникновение землетрясения носит квазипериодический характер. Оно возникает, когда

некоторая область среды не может больше выдерживать действующие напряжения.

2. Есть две шкалы времени, участвующие в процессе. Одна связана с накоплением напряжений, а другая — на порядки меньшая величина связана с продолжительностью резких сбросов напряжений.

Один из подходов к моделированию динамики землетрясений заключается в физико-математическом описании сложной геологической системы, задание временного поля приращения напряжений и исследование полученной пространственно-временной структуры. Более современный и успешный подход предложен в работе [BurrIDGE, Knopoff, 1967]. В нем рассмотрена внутренняя динамика отдельной плиты как системы упруго-связанных блоков на основании с трением. Основным результатом такой эволюционной модели является получение степенного распределения размеров сбросов, подобного наблюдаемому закону повторяемости землетрясений. Клеточное приближение данной эволюционной модели — диссипативная модель OFC [Olami et al., 1992] — привлекло интерес не только специалистов в области геофизики, но и статистической физики как пример простой диссипативной системы, демонстрирующей достижение предельного самоорганизованного критического состояния.

В модели OFC рассматривается кубическая решетка заданной размерности. Основная часть исследований модели посвящена  $2d$ -моделированию. Пусть размер решетки  $L \times L$  элементов. Каждой  $i$ -й ячейке ставится в соответствие некоторый динамический параметр  $\sigma_i$ . В простейшем случае пусть  $\sigma_i$  — накопленные напряжения. Будем предполагать, что в единицу времени все ячейки получают одну и ту же добавочную величину приращения напряжения. Для двумерной решетки:

$$\sigma_{i,j} \rightarrow \sigma_{i,j} + \Delta\sigma, \quad i, j = 1, \dots, L. \quad (1)$$

Рост напряжения любого отдельного элемента при отсутствии влияния соседних элементов происходит до тех пор, пока  $\sigma_{i,j} < \sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  — некоторое пороговое максимальное значение напряжения, при превышении которого элемент сбрасывает накопленное напряжение, часть из которого передается соседним ячейкам:

$$\sigma_{i,j} \geq \sigma_{\max} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{i,j} \rightarrow 0 \\ \sigma_{i\pm 1,j} \rightarrow \sigma_{i\pm 1,j} + \alpha\sigma_{i,j} \\ \sigma_{i,j\pm 1} \rightarrow \sigma_{i,j\pm 1} + \alpha\sigma_{i,j} \end{cases} \quad (2)$$

где: индексы  $(i \pm 1, j)$ ,  $(i, j \pm 1)$  определяют четыре соседних элемента,  $0 < \alpha < 1/4$ .

После возникновения сброса напряжения (2) часть внутренней энергии системы теряется. Дан-

ная система является диссипативной при выполнении условия:

$$(1 - 4\alpha)\sigma_{i,j} > 0. \quad (3)$$

Дальнейшая эволюция элемента определяется (1) до тех пор, пока она снова не достигнет критического состояния (2). В зависимости от состояния системы, достижение одним из элементов критического значения  $\sigma_{i,j} \geq \sigma_{\max}$  может слабо отразиться на состоянии системы в целом, а может вызвать лавинный процесс сброса напряжений, когда переданная добавка  $\alpha\sigma_{i,j}$  соседнему элементу в (3) приводит к достижению критической величины и соответственно сбросу.

Как показано в большом числе работ, в случае задания произвольного распределения начальных значений  $\sigma_{i,j}$ , данная модель демонстрирует сходимость к некоторому устойчивому состоянию, определяемому степенным распределением сбросов по размеру. Размер сброса принято определять количеством пространственно связанных ячеек, участвующих в лавинообразном сбросе. Расчеты показывают, что стационарное состояние достигается очень медленно. Так требуется около  $10^8 - 10^9$  сбросов в системе для достижения критического состояния на двумерной сетке размером  $L \sim 10^2$  [Cherепantsev, 2022]. Причем необходимое число итераций возрастает по мере уменьшения параметра связи  $\alpha < 1/4$  [Grassberger, 1994]. В настоящее время нет общего мнения о поведении системы при значениях  $\alpha$ , близких к 0. Критическое минимальное значение  $\alpha^*$ , при котором исчезает предельный степенной характер распределения, по разным данным варьируется от 0.05 до 0.16 [Christensen, Olami, 1992; Corral et al., 1995].

В работах [Hergarten, Neugebauer, 2002; Helmstetter et al., 2004] сделан вывод о наблюдении афтершоковых и форшоковых последовательностей после сбросов большой величины в OFC-модели. Данный результат требует дополнительных исследований. Наличие сбросов во временной окрестности макросброса между независимыми элементами вне кластера может быть следствием группировки сбросов во временной области. При этом очевидно, что элементы в “очаге” сброшенного кластера не участвуют в наблюдаемой последовательности, что не согласуется с имеющимися данными по реальной сейсмичности. При этом указанная афтершоковая последовательность сбросов не возникает при отсутствии внешних приращений напряжений. Это указывает на внешнюю причину возникновения данных сбросов. То есть макросброс не инициирует последовательность как релаксационный процесс.

Используя базовые принципы эволюции OFC-модели, рассмотрим возможность построе-

ния релаксационной модели сброса напряжений, определяемых начальным распределением напряжений на решетке элементов.

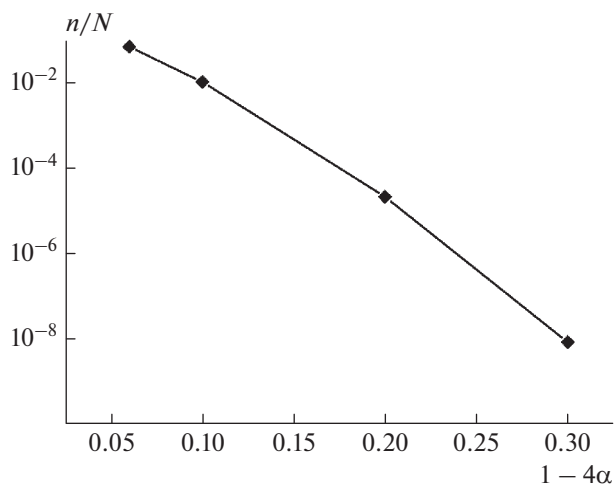
### МОДЕЛЬ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СБРОСОВОЙ АКТИВНОСТИ

OFC-модель предполагает, что на каждом шаге итерации каждый элемент в системе получает приращение внутреннего параметра напряжения на постоянную величину  $\Delta\sigma$ . При достижении напряжением величины  $\sigma_S$ , превышающей заданное предельное значение  $\sigma_{\max}$ , оно сбрасывается в нулевое значение. Особенностью данной модели, определяющей границы ее применимости, является выбор в качестве единицы временного отсчета итерации, за которую заданная величина добавки напряжений  $\Delta\sigma$  поступает в элементы решетки. Такое приближение может описывать процессы фоновой сейсмичности. Сбросы-землетрясения в следующую итерацию-отсчет времени не вызваны событиями на предыдущей итерации.

Сброс напряжений в OFC-модели является мгновенным событием, протекающим в течение одной итерации. То есть временной масштаб длительности землетрясения и связанная с землетрясением релаксация возникших напряжений пренебрежимо малы по сравнению с масштабом значимого приращения напряжений  $\Delta\sigma$  в системе от внешнего источника. В связи с этим при построении распределения размеров сбросов нет необходимости учитывать события, связанные с отдельными сбросами. Необходимость подобной процедуры для реальной сейсмичности обусловлена наличием афтершоков и их искажающим влиянием на параметры закона повторяемости. Связь афтершоковой последовательности с релаксационным процессом отклика на сильное землетрясение впервые была предложена в работе [Benioff, 1951]. Концепция предполагает, что причиной афтершоков является статическая усталость горных пород в области разлома. Как было выше отмечено, модель OFC является нечувствительной к процессу релаксации на временных итерациях.

Считая, что релаксация напряжений при макросбросе в модели OFC определена как мгновенное событие, в работе [Cherепantsev, 2021] на основе оценки распределения напряжений в кластере сбросов, показано, что при  $\alpha > 0.2$  возможно появление повторных сбросов в одном и том же элементе. Они происходят, когда в уже сброшенный элемент при сбросах соседних элементов передается напряжение, суммарно, превышающее значение  $\sigma_{\max}$  – рис. 1.

В этом случае возникает вопрос об определении размера макросброса – либо как числа сосед-

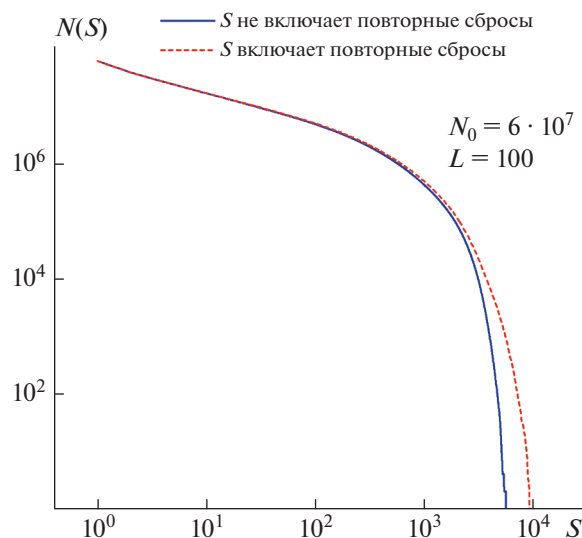


**Рис. 1.** Доля повторных сбросов при различной величине диссипации ( $1 - 4\alpha$ );  $n$  – число повторных сбросов;  $N$  – общее число сброшенных элементов.

них элементов участвующих в сбросе, либо как общее число сбросов в соседних элементах. В последнем случае размер сброса учитывает и повторные сбросы. При значениях  $\alpha$ , близких к консервативному пределу  $\alpha = 1/4$ , данная особенность приводит к существенному искажению вида распределения сбросов по размеру в двойном логарифмическом масштабе.

На рис. 2 показано расхождение распределений для указанных определений размеров сбросов. Как отмечено выше, механизм сброса напряжений при значениях  $\alpha$ , близких к консервативному пределу может происходить путем серии повторных сбросов одного и того же элемента. Они представляют собой затухающую последовательность числа двукратных, трехкратных и т.д. сбросов одного и того же элемента и происходят в области основного сброса. Аналогия с затухающей последовательностью афтершоков в очаговой зоне землетрясения как процесса релаксации избыточной энергии в локальных участках очаговой зоны носит условный характер. Это связано, прежде всего, с невозможностью выделения в OFC-модели параметра времени развития данного процесса. Повторные события происходят на одной и той же итерации и, соответственно, в один и тот момент времени.

Возможность модификации модели для учета динамики релаксационных процессов предполагает необходимость введения параметра времени и, соответственно, рассмотрения младшего масштаба, пропускаемого в OFC-модели. Уменьшение временного масштаба рассмотрения означает, что в отличие от OFC-модели, поступление внешнего напряжения на каждом временном интервале рассмотрения сколь угодно мало. Если в



**Рис. 2.** Закон повторяемости сбросов с учетом и без учета повторных сбросов при  $\alpha = 0.235$ . Размер решетки  $L \times L = 100 \times 100$ , размер выборки  $N_0 = 6 \times 10^6$  сбросов.

OFC-модели именно внешнее постоянное приращение является источником эволюции системы, то можно предположить, что на младшем временном масштабе процесс качественно иной и источником эволюции системы являются внутренние параметры элементов, представляющих механические, гидрологические, термические, прочностные свойства горных пород.

В качестве источника изменения состояния рассмотрим эффект статической усталости. Условие разрушения определим эмпирическим соотношением

$$\tau = ae^{\frac{C-\sigma}{b}}, \quad (4)$$

где:  $\tau$  – среднее время разрушения элемента при напряжении  $\sigma$ ; константы  $C$ ,  $a$  и  $b$  определяются свойствами материала, температурой и внешними параметрами. Соотношение (4) в кинетической теории прочности эквивалентно соотношению [Журков, 1968], определяющему время механического разрыва связей под действием тепловых колебаний атомов решетки при действии одноосного растяжения. В работе [Scholz, 1968] рассмотрена модель неоднородного материала с различным действующим на отдельные области локальным напряжением  $\sigma_i$ . В случае представления  $\sigma_i$  как случайного независимого марковского процесса с начальным равномерным распределением значение кумулятивной частоты микроразрывов подчиняется соотношению  $N = Mb \lg(t) + \text{const}$ , где  $M$  – параметр амплитуды начального равномерного распределе-

ния. Данное соотношение повторяет эмпирический закон Омори для афтершоков.

При этом данная модель не учитывает связь элементов и влияние этого эффекта на процесс релаксации напряжений. Указанное в работе наличие областей повышенных напряжений непосредственно после главного события по сравнению с значением до главного события может служить основанием для предположения о повышенном уровне связи элементов на начальной стадии релаксации.

Учет взаимодействия элементов реализован в OFC-модели. Именно параметр  $\alpha$  модели определяет характер протекающих процессов. Заданная в модели связь соседних ячеек определяет характеристики степенных распределений. Изменяя данный параметр, можно получить качественно различное поведение системы: от консервативной модели при значении параметра связи  $\alpha = 1/4$  до системы несвязных элементов при  $\alpha \rightarrow 0$  [Christensen, 1992].

Предполагая, что связь элементов блоковой среды изменяется с изменением среднего напряжения и всестороннего равномерного сжатия, анализ влияния связи между элементами модели на ее характеристики представляется интересным. Так чувствительность характеристик организации сейсмического режима к величине напряжений в геологической среде показана в работе [Schorlemmer, Wiemer, 2005]. Отмечено уменьшение наклона  $b$  в законе повторяемости с ростом средней величины напряжений для различных механизмов землетрясений. А анализ OFC-модели [Christensen, 1992] показывает зависимость уменьшения наклона  $b$  с ростом параметра связи  $\alpha$ .

Изменим механический критерий прочности (2) OFC-модели путем перехода к кинетическому критерию прочности. Определим непрерывную шкалу времени из условия сброса элемента в соответствии с соотношением (4) для эффекта статической усталости.

Будем предполагать, что временной масштаб процесса релаксации конечен, но много меньше масштаба накопления внешнего напряжения, присущего масштабу в модели OFC  $\tau \ll T$ , где  $T = \frac{\sigma_{\max}}{\Delta\sigma}$  – время между сбросами элемента при  $\alpha = 0$ . В этом случае можно считать, что внешнее приращение напряжений на масштабе  $\tau$  пренебрежимо мало.

Предполагая возможность наличия локальных областей повышенного значения напряжений после главного события, рассмотрим в дальнейшем два типа начального распределения напряжений в элементах решетки- экспоненциальное (высокий уровень среднего напряжения) и рав-

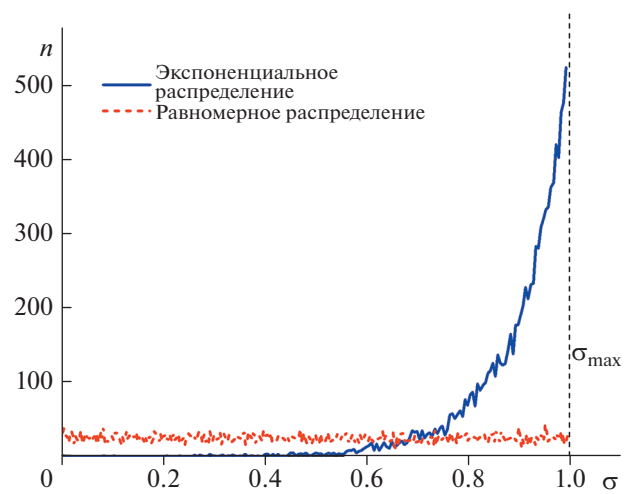


Рис. 3. Гистограммы распределений начальных напряжений на сетке элементов  $L \times L = 10^4$ .

номерное (рассмотренное в модели [Scholz, 1968] при  $\alpha = 0$ ) – рис. 3.

Условие сброса определяется соотношением (4). Величина  $C$  задает пороговое напряжение разрушения для элемента, не подвергавшегося воздействию “бездефектного” элемента. С учетом того, что параметр  $a$  представляет время сброса элемента в случае приложения напряжения  $\sigma = C$ , будем рассматривать интервал дискретизации в модели в относительных единицах  $a$ :  $t_i = ai$ , где  $i$  – номер временной итерации счета. Константу  $b$  в рассматриваемой модели определим исходя из расчетной модели распределения времен возникновения сбросов для заданного начального распределения напряжений  $T_{\text{счета}} \approx \tau(0)$ . На рис. 4 показано распределение  $\tau$  для выбранных начальных напряжений (рис. 3) и  $\tau(0) = 3 \times 10^5$ .

С учетом того, что в процессе эволюции системы происходит изменение напряжения в элементах системы при соседних сбросах, в модели использован принцип Бейли суммирования времен [Bailey, 1939]. Он учитывает различную скорость накопления дефектов при изменении напряжения в элементе и соответствующим образом изменяет время сброса  $\tau$ . Условие сброса в этом случае представляется в виде:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta t_i}{\tau(\sigma_i)} \geq 1, \quad (5)$$

где:  $i = 1, \dots, k$  – номер временной итерации;  $k$  – итерация, на которой происходит сброс.

Предлагаемый критерий сброса позволяет снять противоречие, которое было присуще стандартной OFC-модели с заданным предельным

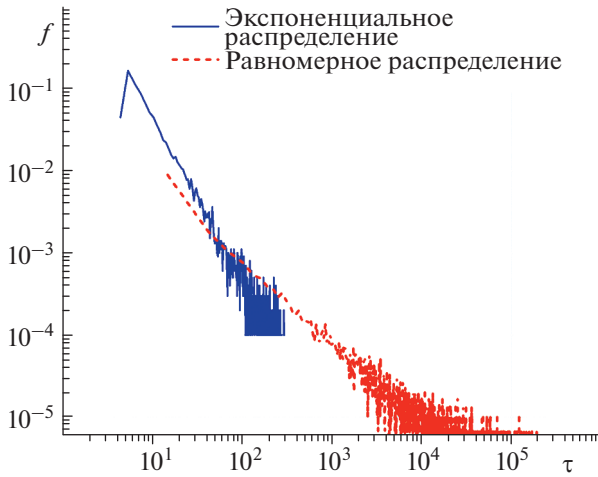


Рис. 4. Гистограммы распределения времени сброса для заданных начальных распределений напряжений. Параметры модели  $a = 1$ ,  $C = 1.00892$ ,  $b = 0.08$ .

уровнем  $\sigma_{\max}$  напряжения в элементе. В OFC-модели логарифм размера сброса соответствует магнитуде землетрясения в законе повторяемости. Он определяется как число соседних элементов, сброшенных одновременно. Это справедливо в предположении линейной зависимости величины сброшенного напряжения и числа элементов, включенных в кластер сбросов. Однако условие (2) предполагает, что с ростом размера кластера сбросов передаваемая соседним элементам часть напряжения растет [Cherapantsev, 2022]. То есть сброшенное напряжение кластером, состоящим из  $n$  элементов, превышает суммарное сброшенное напряжение  $n$  одиночных элементов. В случае же определения сброса постоянной величиной:

$$\sigma_{i,j} \geq \sigma_{\max} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{i,j} \rightarrow 0 \\ \sigma_{i\pm 1,j} \rightarrow \sigma_{i\pm 1,j} + \alpha \sigma_{\max} \\ \sigma_{i,j\pm 1} \rightarrow \sigma_{i,j\pm 1} + \alpha \sigma_{\max} \end{cases}$$

модель перестает демонстрировать самоорганизованное критическое состояние со степенным распределением сбросов по размеру.

В критерии прочности на основе эффекта статической усталости отсутствует ограничение на возможную величину напряжения в элементе. Значение напряжения в элементе определяет число временных итераций до сброса при заданном временном шаге расчета. Величина возможного напряжения в элементе определяется лишь интервалом временной дискретизации.

## ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И СБРОСОВ В РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Временной ход амплитуд сбросов  $S(t)$  и среднего напряжения  $\sigma(t)$  на решетке элементов раз-

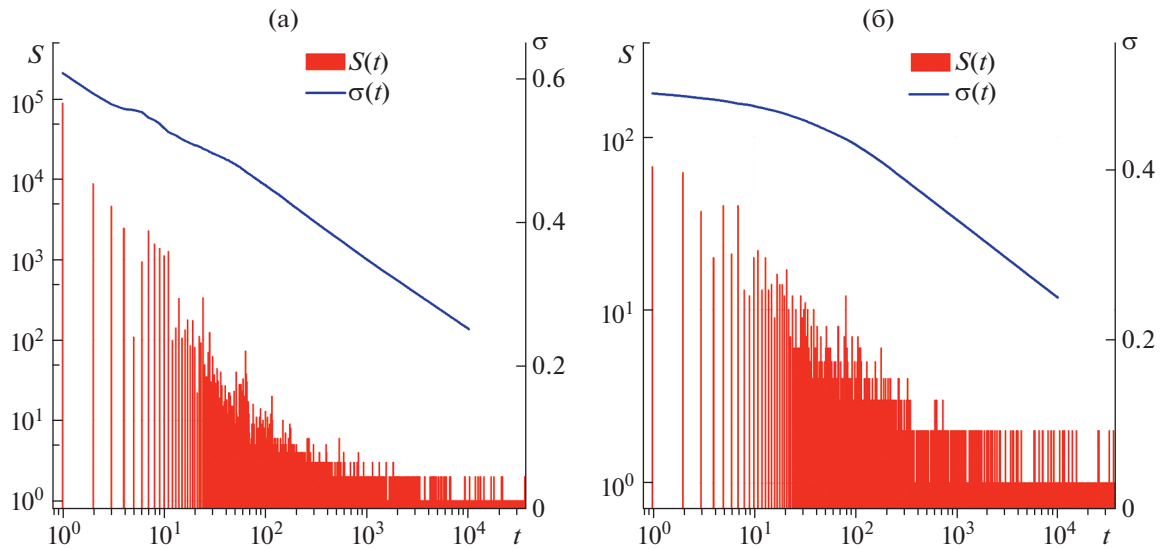
мером  $L \times L = 100 \times 100$  для различных начальных распределений напряжений (рис. 4) показан на рис. 5. Высокое значение параметра связи  $\alpha = 0.245$  предполагает возникновение повторных сбросов отдельных элементов при образовании кластеров больших размеров. Экспоненциальное начальное распределение напряжений соответствует начальному состоянию с большим числом элементов с временем сброса  $\tau \leq 1$ . Число сброшенных элементов с учетом повторных на первом шаге по времени  $t = 1$  оказывается выше на порядок числа элементов решетки  $L \times L = 10^4$ , что указывает на возникновение многократных сбросов одних и тех же элементов для заданной временной шкалы счета. Такой “сверхкритичный” сброс напряжений продолжается до  $t \approx 10$ . Последующие сбросы содержат лишь единичные повторные события.

Особенность временного ряда сбросов обусловлена тем, что сброс может осуществляться с временной задержкой и в элементе с напряжением малой величины. В этом случае в отличие от условия сброса, определяемого предельным напряжением  $\sigma_{\max}$ , количество соседних элементов определяет пространственный размер сброса, но не величину сброшенного напряжения. Поэтому представленные на рис. 5 зависимости  $S(t)$  соответствуют временному ходу пространственных размеров сбросов.

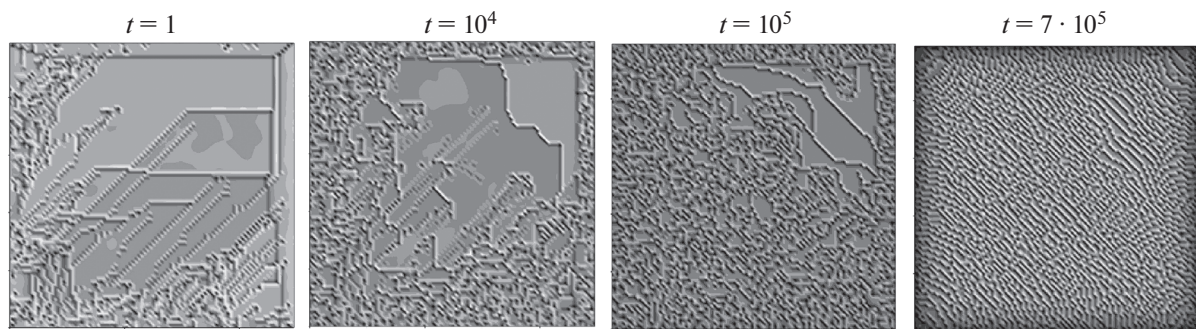
Временной ряд релаксации напряжений  $\sigma(t)$  для различного распределения напряжений указывает на наличие начального переходного временного участка  $t = 1-100$  и дальнейшего при  $t > 100$  линейного спада в логарифмической временной шкале. Для выбранных параметров механизма сброса (4):  $a = 1.0$ ,  $C = 1.00892$ ,  $b = 0.08$ , величина наклона для экспоненциального и равномерного начальных распределений составляет  $\sigma(t) \propto -0.095 \lg(t)$ ,  $\sigma(t) \propto -0.11 \lg(t)$  соответственно. Полученные зависимости близки к спаду напряжений с равномерным начальным распределением [Scholz, 1968] при отсутствии взаимодействия между соседними элементами ( $\alpha \rightarrow 0$ ):  $\sigma = b \lg a + C - b \lg t$ .

Полученная зависимость  $\sigma(t)$  соответствует дискретной модели среды, релаксация напряжений в которой осуществляется путем сброса напряжений и передачи части сброшенного напряжения соседним элементам. Для данного механизма релаксации  $t \propto e^{-\gamma \sigma}$ , что является обратной зависимостью по отношению к  $\sigma \propto e^{-\eta t}$  для релаксации в реологической модели тела Максвелла с заданной вязко-упругой ползучестью.

Экспоненциальное начальное распределение напряжений приводит к лавинному росту сбросов



**Рис. 5.** Зависимость сбросов  $S$  и средней величины напряжения  $\sigma$  от времени  $t$  в элементах решетки в релаксационной модели с параметрами  $a = 1.0$ ,  $C = 1.00892$ ,  $b = 0.08$ , параметре связи  $\alpha = 0.245$  и различных начальных распределениях напряжений; (а) – экспоненциальное начальное распределение; (б) – равномерное начальное распределение.

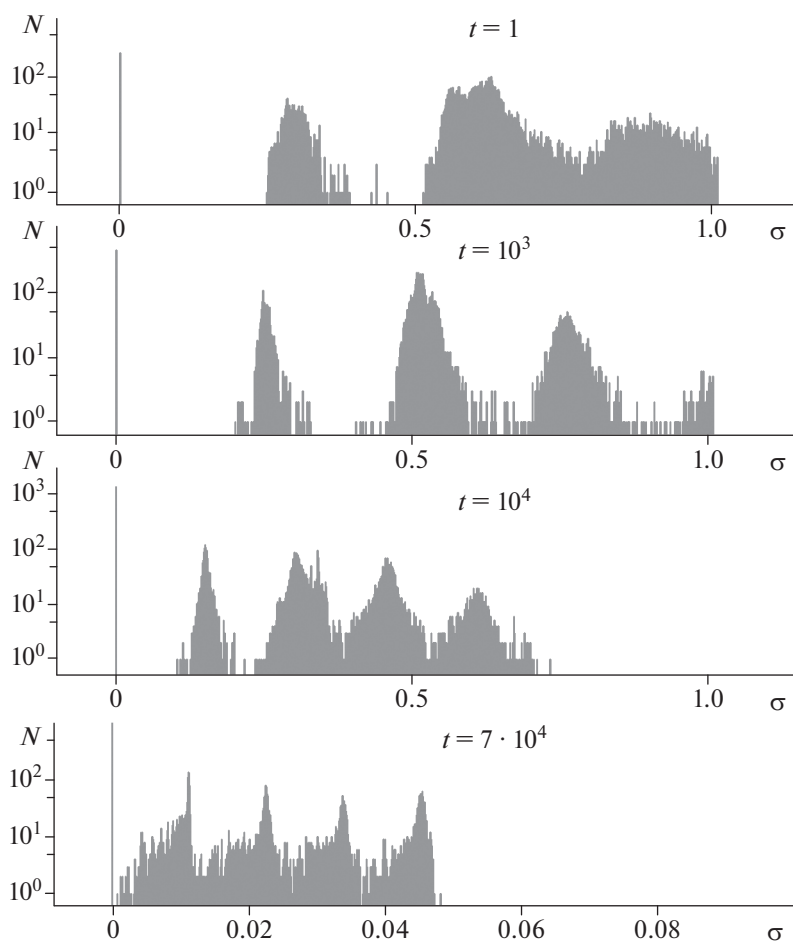


**Рис. 6.** Пространственное распределение напряжений на решетке в различные времена релаксации в модели при экспоненциальном начальном распределении (рис. 3) при  $\alpha = 0.245$ .

на начальном этапе релаксационного процесса. При наличии значительной связи между элементами это приводит к формированию пространственной структуры иерархически образованных кластеров элементов с близкими значениями напряжений. Такое поведение аналогично предельному состоянию эволюции модели OFC со степенным распределением размера сбросов. Дальнейший релаксационный процесс приводит к постепенному разрушению такой начальной пространственно-амплитудной организации сбросов. На рис. 6 показано изменение пространственной структуры напряжений в различные моменты времени.

Характерное временное изменение распределения напряжений в элементах решетки представлено на рис. 7. По мере развития релаксационного процесса исходное экспоненциальное

распределение переходит в пятимодальное распределение, определяемое нулевой амплитудой после сброса  $\sigma_i^s = 0$ , амплитудой после сброса и добавленными приращениями после сброса одного, двух, трех, четырех соседних элементов. Минимальное напряжение сброса соответствует  $C = 1.00892$ . По мере релаксации и соответственно уменьшению напряжений в элементах решетки (рис. 7) ( $t = 10^3, t = 10^4, t = 7 \times 10^4$ ), даже приращения от всех соседних (четырех) элементов не приводят к сбросу элемента. Подобная структура распределения напряжений наблюдается и в случае равномерного начального распределения. При этом отсутствие повышенного уровня начальных напряжений и соответственно высокой активности сбросов в начальный момент приводит к отсутствию начальной структурной про-



**Рис. 7.** Гистограмма распределения амплитуд напряжений в различные времена релаксации в модели при экспоненциальном начальном распределении (рис. 3) при  $\alpha = 0.245$ .

странственной организации напряжений и появлению более явной временной задержки начала линейного спада  $S(t)$  в логарифмическом масштабе времени (рис. 5б).

### ВРЕМЕННОЙ ХОД ЧАСТОТЫ СБРОСОВ

Спад числа сбросов  $n(t)$  во временном окне постоянной величины  $\Delta t = 20$  для рассматриваемых начальных распределений напряжений показан на рис. 8. Кривые для двух рассматриваемых начальных распределений напряжения при  $t > 100$  имеют степенной вид  $n(t) \propto t^{-0.85}$

Временная задержка возникновения степенного спада частоты сбросов  $t \approx 100$  соответствует начальному переходному участку зависимостей  $\sigma(t)$  (рис. 5). Степенной участок релаксации имеет устойчивый характер и продолжается значительное время  $t = 10^2 - 10^6$ . Значение показателя степени  $p = 0.85$  оказывается в диапазоне наблю-

даемых значений  $0.6 \leq p \leq 2.5$  [Смирнов, Пономарев, 2020] в законе Омори для частоты афтершоковой активности. Величина  $p = 0.85$  для рассматриваемой модели с взаимодействием элементов ( $\alpha = 0.245$ ) оказывается ниже значения  $p = 1$  для равномерного начального распределения напряжений при  $\alpha = 0$  [Scholz, 1968]. Можно предположить, что наличие связи элементов приводит к замедлению релаксации напряжений. Лишь часть сбрасываемого напряжения теряется, а остальная часть передается соседним элементам.

Рассмотрим влияние параметра связи  $\alpha$  на наблюдаемый в модели временной ход  $n(t)$ . Расчетные зависимости для тех же начальных распределений напряжений (рис. 3) и параметров модели  $a, b, C$  (4) представлены на рис. 9.

Рис. 9а соответствует  $\alpha = 0.2$ , рис. 9б соответствует  $\alpha = 0.125$ . Зависимость  $n(t)$  при  $\alpha = 0.2$  для экспоненциального начального распределения напряжений (черная кривая) соответствует



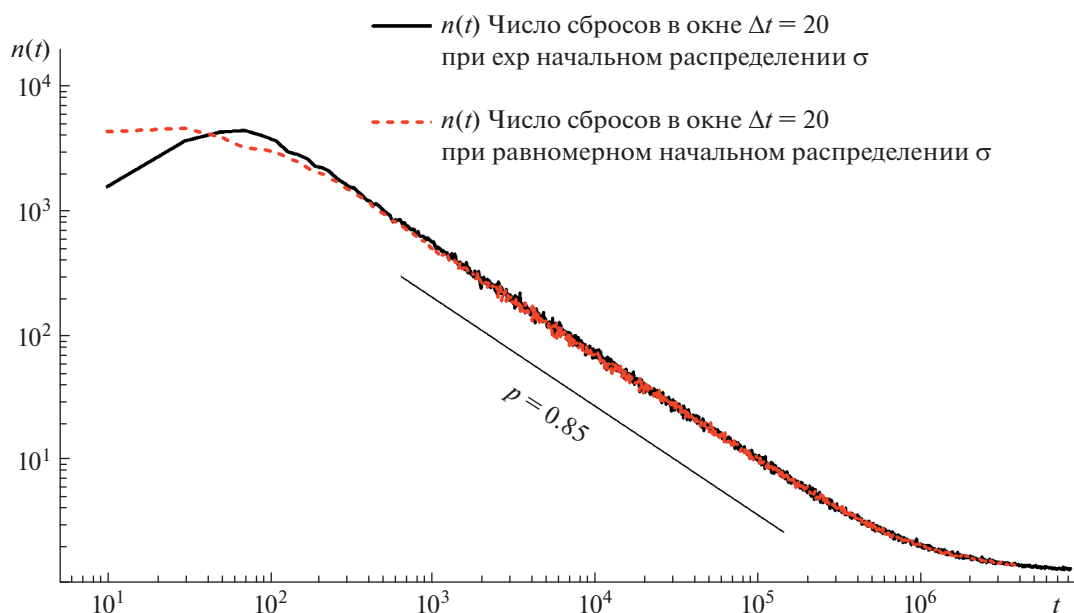


Рис. 8. Временной ряд числа сбросов  $n(t)$  во временном окне  $\Delta t = 20$  в релаксационной модели при параметре связи  $\alpha = 0.245$  и различных начальных распределениях напряжений.

промежуточному режиму влияния связи, когда присутствует как убывание по степенному закону, так и наложенные на данный процесс всплески повышения частоты сбросов через увеличивающиеся интервалы времени. В данном случае подъемы активности частоты сбросов связаны с характерным начальным распределением амплитуд напряжений (рис. 7), когда время наступления повышенной активности определяется временем сброса значения пика в распределении напряжений в соответствии с (4). При этом компонента плавного степенного спада может быть связана с эффектом сглаживания за счет взаимодействия между элементами. Величина  $\alpha = 0.2$  оказывается недостаточной для осуществления “сглаживающего” эффекта взаимодействия элементов, подобного наблюдаемому при  $\alpha = 0.245$ .

При слабом взаимодействии  $\alpha = 0.125$  доминирующим механизмом релаксации начальных напряжений являются повторные процессы статической “усталости” при экспоненциальном распределении начальных напряжений. При равномерном начальном распределении данная модель приближается к гиперболической зависимости  $n(t)$ , справедливой при  $\alpha = 0$  [Scholz, 1968].

Рассмотрим влияние параметра  $b$  в законе статической усталости (4) на характер временного хода частоты сбросов. Параметр  $b$  определяет чувствительность времени разрушения  $\tau$  к приложенному напряжению  $\sigma$ . В качестве модели зависимости времени сброса от величины напряжения выбраны показательные зависимости стати-

ческой усталости с различными основаниями степени  $k$ , что эквивалентно выбору различных значений  $b$ :

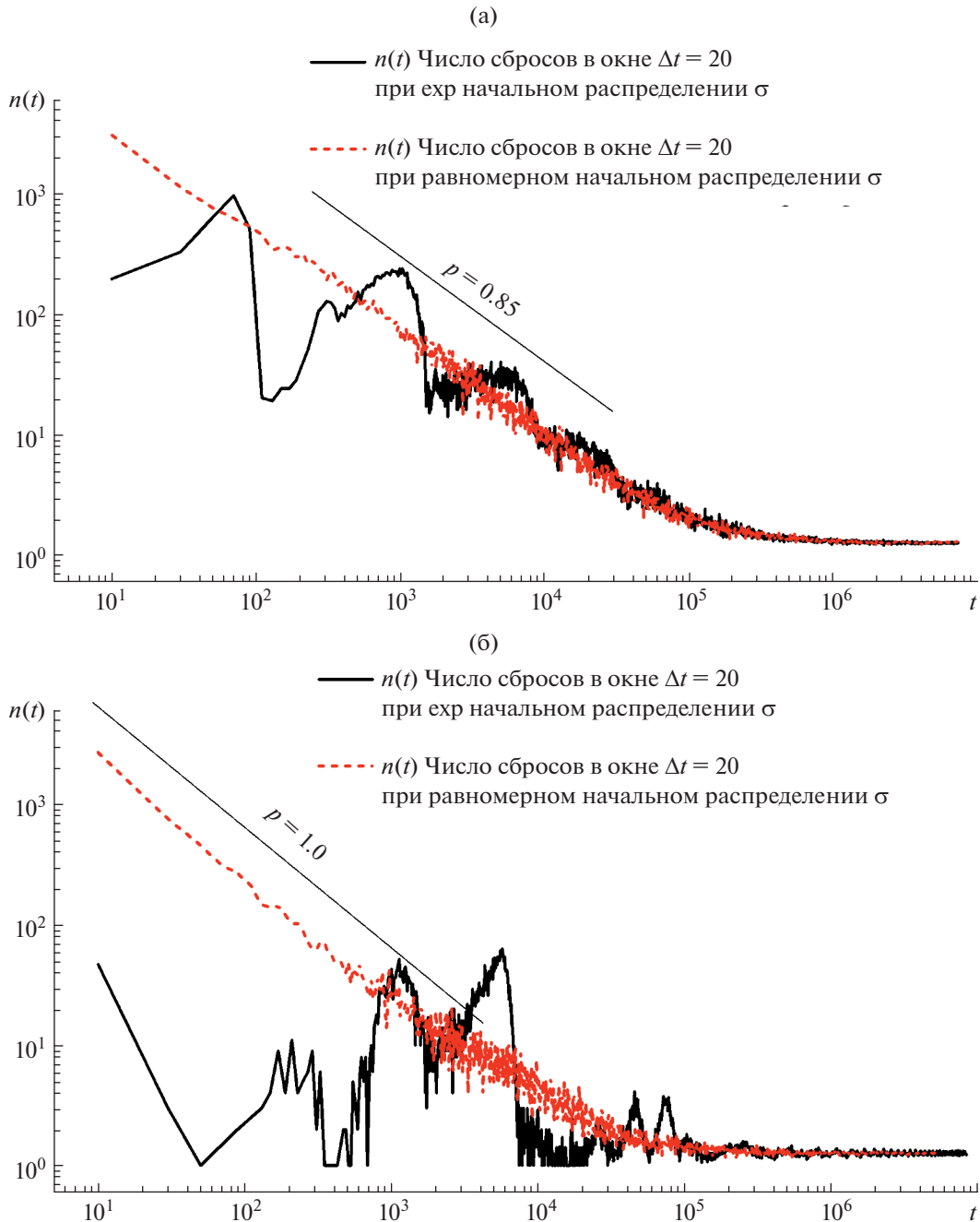
$$\tau = ak^{\frac{C-\sigma}{b}} = ae^{b^* \frac{C-\sigma}{b}}, \quad (6)$$

где  $b^* = b/\ln k$ .

На рис. 10 показаны рассмотренные зависимости. Параметры констант  $a, b, C$  остаются неизменными для всех зависимостей:  $a = 1.0$ ,  $C = 1.00892$ ,  $b = 0.08$ . Выбранные значения констант определяют диапазон напряжений, при которых не происходит мгновенного сброса. Он составляет  $\sigma \in [0; 1)$ . Рост значения  $\tau|_{\sigma=0}$  с ростом основания степени  $k$  приводит к уменьшению числа элементов решетки, участвующих в релаксационном процессе на временах счета  $T < 10^6$ . В этом случае при слабой величине связи  $\alpha$  отдельный элемент за время счета может быть сброшен только один раз.

Результаты расчета временного хода частоты сбросов  $n$  в единичном временном окне для слабой связи между элементами  $\alpha = 0.12$  и сильной связи  $\alpha = 0.24$  показаны на рис. 11. В качестве начального распределения напряжений выбрано экспоненциальное распределение (рис. 3).

Анализ зависимостей  $n(t)$  при слабой связи между элементами (рис. 11а) показывает отсутствие степенного спада во времени частоты сбросов. При малом временном масштабе  $k = 1.5$  и ин-



**Рис. 9.** Временной ряд числа сбросов  $n(t)$  во временном окне  $\Delta t = 20$  при различных значениях  $\alpha$ ; (а) –  $\alpha = 0.2$ ; (б) –  $\alpha = 0.125$ .

тервале времени сбросов  $\tau(\sigma) = 0-200$  (рис. 10) число сбросов представляет собой периодические вариации уменьшающейся амплитуды. В этом случае релаксационный процесс приводит к периодическим сбросам элементов с уменьшающейся

амплитудой и асимптотой  $n(t) = \frac{LL}{\tau_{\max}} = \frac{10^4}{200} = 50$ .

Увеличение значения  $k$  соответствует расшире-

нию временного масштаба  $\tau(\sigma)$  (рис. 10). При времени расчета эволюции модели  $t \approx 10^5$  происходит единичный повторный сброс ячеек для  $k = e$  ( $\tau_{\max} \approx 3 \times 10^5$ ). При  $k = 4$ ,  $k = 7$  сброс происходит однократно.

Вид начального напряжения при малом  $\alpha$  существенно влияет на характер  $n(t)$ . При малом значении  $\alpha$  эффект передачи напряжений между

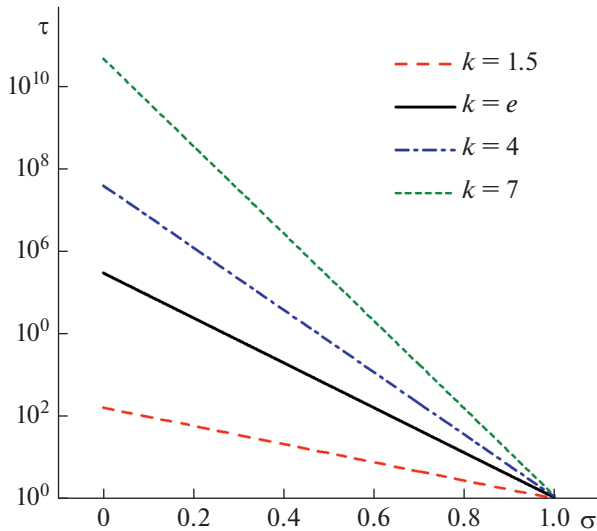


Рис. 10. Зависимость времени сброса от напряжения при различных значениях основания степени.

соседними элементами и возникающее уменьшение потерь напряжений в системе выражены слабо. В этом случае повторяющаяся кривая частоты сбросов отражает вид начального распределения. При этом в случае заданий равномерного начального распределения напряжений и экспоненциальной зависимости  $\tau(\sigma)$ ,  $n(t)$  демонстрирует гиперболический спад при любом  $k$ .

Увеличение параметра связи  $\alpha$  приводит к существенному изменению зависимости  $n(t)$  (рис. 11б). Взаимодействие между элементами приводит к активизации сбросовой активности, проявляющейся как в длительности релаксационного процесса, обусловленного замедлением потери на-

пряжений в системе элементов, так и в росте величины числа сбрасываемых элементов в единицу времени за счет получаемых добавок напряжения от соседних элементов и соответственно сокращения времени повторного сброса.

Для  $k = e$  временной спад частоты сбросов, начиная с  $t = 100$ , носит степенной характер с показателем  $p \approx 0.86$ . Сжатие временного масштаба при  $k = 1.5$  приводит к росту фактора повторных сбросов и выхода на асимптотическое значение  $n(t) \approx 60$  при малой величине напряжений в системе. При растяжении временного масштаба и значениях  $k > e$  уменьшение сбросовой активности  $n(t)|_{k=7} < n(t)|_{k=4} < n(t)|_{k=e}$  указывает на исключение большого числа точек с малым напряжением из сбросов, обусловленных взаимодействием соседних элементов. С учетом того, что начальные сбросы приводят к пространственной структуре с обширными областями постоянных напряжений (рис. 6,  $t = 1$ ), взаимодействие элементов на растянутом временном масштабе не достигает устойчивого характерного распределения напряжений (рис. 7). Это связано с уменьшением напряжений элементов после сбросов и достижением такого состояния, когда напряжение в элементе после приращений даже от сброса всех соседних элементов определяет время сброса, значительно превышающее единицу.

Расчетные зависимости  $n(t)$  при различных значениях  $b$  (5) для экспоненциального начального распределения напряжений показывают, что  $b = 0.08$  соответствует временному масштабу  $\tau(\sigma)$ , при котором временная зависимость частоты сбросов является наилучшим приближением к степенной функции

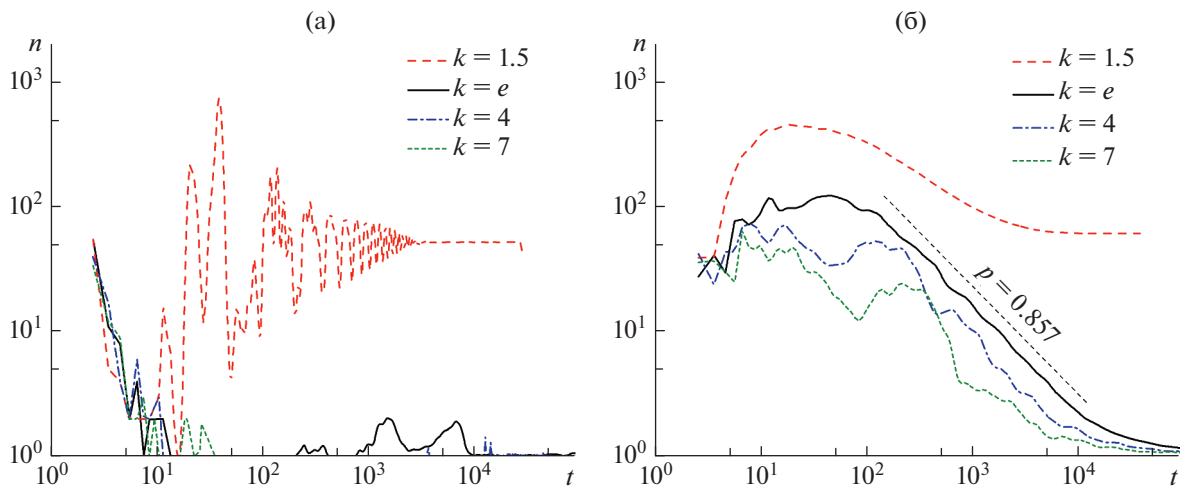
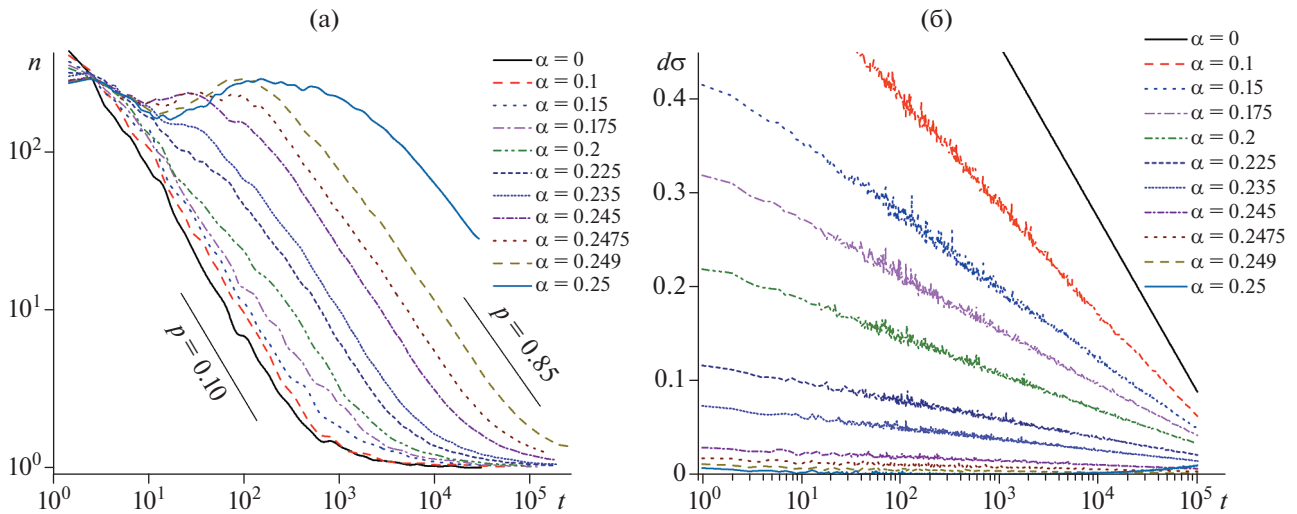


Рис. 11. Изменение во времени числа сбросов в единичном временном окне при различных временных масштабах статической усталости: (а) — параметр связи  $\alpha = 0.12$ ; (б) — параметр связи  $\alpha = 0.24$ .



**Рис. 12.** Временной ход частоты сбросов (а) и средней величины сброшенного напряжения отдельным элементом (б) при различных значениях  $\alpha$  и равномерном начальном распределении начальных напряжений. Параметры модели  $L \times L = 100 \times 100$ ,  $a = 1.0$ ,  $C = 1.00892$ ,  $b = 0.08$ .

$$\tau = \frac{K}{(c+t)^p} \quad (7)$$

со значением  $p \approx 0.85-0.86$ .

При значении  $\alpha = 0.24$  степенной спад частоты сбросов наблюдается с временной задержкой, задаваемой параметром  $c$  в (6) – рис. 11б. Влияние значения  $\alpha$  на длительность временной задержки показано на рис. 12а. При  $\alpha = 0$  связь элементов отсутствует; при  $\alpha = 0.25$  система является консервативной, когда соседним неограниченным элементам передается напряжение, равное сброшенному. Следует заметить, что в данном случае система является “условно консервативной”, так как существуют потери напряжения, обусловленные открытыми граничными условиями.

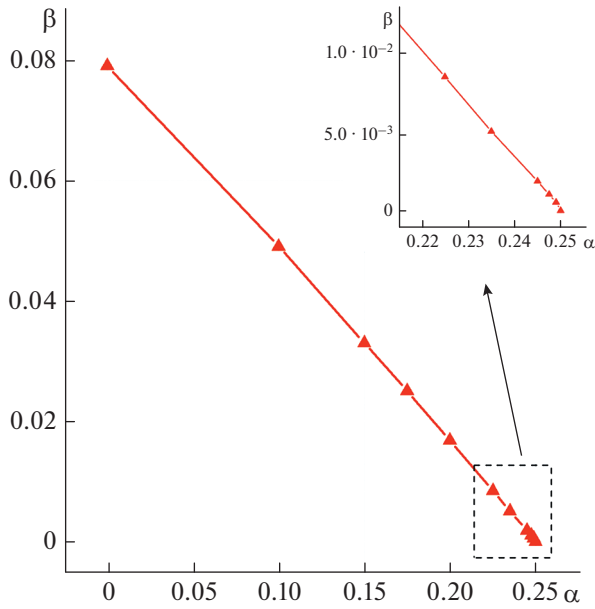
Полученные зависимости  $n(\alpha, t)$  показывают универсальный характер степенной зависимости спада частоты сбросов во времени с незначительным изменением показателя  $p$ : от  $p = 1.0$  при  $\alpha = 0$  до  $p = 0.85$  при  $\alpha = 0.25$ .

Как следует из расчетных зависимостей, рост параметра связи  $\alpha$  сопровождается ростом времени задержки возникновения степенной зависимости и соответственно параметра  $c$  в (6). При  $\alpha = 0$  переходной начальный участок отсутствует, а при  $\alpha = 0.25$  достигает  $c \approx 2 \times 10^3$ .

Для анализа причин возникновения задержки степенного спада зависимости  $n(t)$  при наличии связи соседних элементов, рассмотрим характерное изменение во времени размеров сбросов. На рис. 8, рис. 5б для  $\alpha = 0.245$  показаны соответственно временной ход частоты сбросов  $n(t)$ , релаксация среднего значения напряжения  $\sigma(t)$  в

элементах решетки и временной ряд сбросов  $S(t)$ . Логарифмическая зависимость релаксации напряжений в системе  $\sigma(t)$  возникает с задержкой  $\zeta \approx 100$ . Данная величина соответствует задержке степенной зависимости  $n(t)$ . На начальном временном участке  $t < \zeta$  присутствует достаточное число элементов со значениями напряжений  $(1-\alpha)C < \sigma < C$ , позволяющих формировать единый сброс, включающий сбросы соседних элементов. С течением времени процесса релаксации вероятность такой синхронизации уменьшается, так как снижается среднее напряжение в системе. На это указывает временной ход амплитуд сбросов, определяемых числом соседних синхронно сброшенных элементов  $S(t)$  (рис. 5б). Именно на начальном временном участке процесса релаксации  $t < \zeta$  наблюдается активизация сбросов большой амплитуды. Таким образом релаксация напряжений на начальном участке происходит за счет сбросов большой амплитуды. Это приводит и к уменьшению параметра числа сбросов в единицу времени  $n$ .

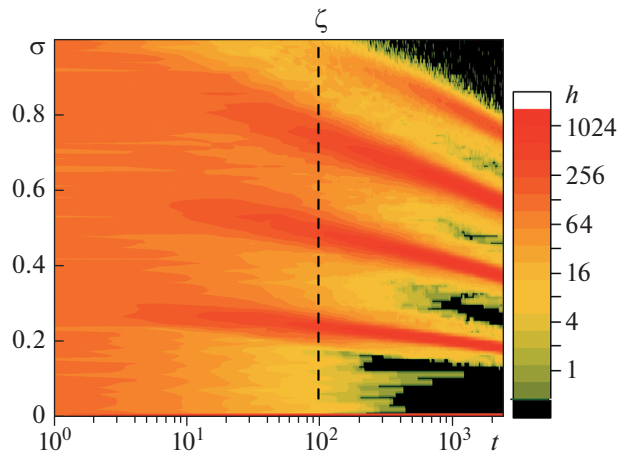
Наклон начального участка  $n(t)$  увеличивается в случае рассмотрения временного хода числа сброшенных отдельных элементов (включенных в большой сброс) в единицу времени. В этом случае спад частоты сбросов отдельных элементов  $N_S(t)$  возникает с начального времени релаксации. Однако наблюдаемый временной спад зависимости  $N_S(t < \zeta)$  имеет заниженное значение по сравнению с дальнейшим степенным спадом при  $t > \zeta$ . Предполагая, что заниженное значение  $N_S(t < \zeta)$  определяет и заниженное значение  $\sigma(t < \zeta)$ , рассмотрим их отношение – средний



**Рис. 13.** Наклон логарифмической зависимости удельного сброса напряжения во времени при различном параметре связи  $\alpha$ .

сброс напряжения отдельным элементом  $d\sigma(t)$ , рис. 126. С ростом  $\alpha$  значение данного параметра уменьшается, стремясь к нулю при  $\alpha \rightarrow 0.25$ . При этом временной ход  $d\sigma(t)$  соответствует логарифмическому спаду величины сброса с начального момента времени  $d\sigma(t) \propto -\beta \ln(t)$ . Временная задержка отсутствует при любом значении  $\alpha$ . Линейная зависимость наклона  $\beta(\alpha)$  показана на рис. 13. При этом значение величины сброса  $\Delta\sigma = \sigma_{\max}(1 - 4\alpha) = C(1 - 4\alpha)$ , соответствующее значению напряжения  $\sigma = C = 1.00892$  достигается при  $t \approx \zeta$ . При  $t < \zeta$  сбрасывается напряжение превышающее порог сброса  $C$ . Эта возможность обусловлена начальной стадией релаксации при которой для высоких значений  $\alpha$  возникают большие кластеры связанных сбросов. Как было выше указано, при сбросе такого кластера величина сброшенного удельного напряжения превышает сброшенное удельное напряжение малых кластеров. При  $t > \zeta$  сброс напряжений происходит единичными элементами при условии уменьшающегося напряжения в элементах и соответственно возникновения временного интервала до сброса за счет эффекта статической усталости (4). Данный участок характеризуется степенным спадом частоты сбросов во времени.

Для иллюстрации переходного режима перед возникновением устойчивых характеристик структуры распределения напряжений в элементах решетки на рис. 14 представлено изменение во времени гистограммы распределения напряжений



**Рис. 14.** Диаграмма временного хода гистограммы распределения напряжений в элементах решетки в релаксационной модели. Начальное время  $t_0 = 1$  соответствует равномерному распределению напряжений.

жений  $h(\sigma, t)$  по элементам решетки при  $\alpha = 0.245$  с начального момента времени  $t_0 = 1$  до  $t_1 = 2500$  ( $t_1$  соответствует времени наблюдаемого устойчивого степенного распределения  $n(t)$ ).

Представленное изменение распределения напряжений во времени повторяет закономерности изменения для экспоненциального распределения (рис. 7). Общей закономерностью эволюции распределения является их приближение к набору пяти максимумов, определяемых величинами добавки при сбросе соседних элементов. Диаграмма на рис. 14 позволяет оценить время  $t$ , за которое формируется устойчивое распределение, состоящее из пяти максимумов. При этом, при  $t \approx \zeta$  старший максимум, соответствующий приращениям от всех четырех соседних элементов, перестает достигать величины предельного напряжения  $\sigma_{\max} = C = 1.00892$ . Дальнейшее логарифмическое уменьшение максимумов гистограммы соответствует временным участкам логарифмического спада среднего напряжения при релаксации (рис. 5б) и степенного спада частоты сбросов (рис. 8).

На непротиворечивость полученной модельной зависимости  $c(\alpha)$  указывают имеющиеся экспериментальные результаты. Лабораторные эксперименты по анализу возникающих афтершоковых последовательностей при нагружении образцов горных пород [Smirnov et al., 2019] указывают на рост задержки  $c$  при росте всестороннего сжатия и повышении прочностных характеристик среды. При этом можно предположить, что рост консолидации элементов блочной среды приводит и к росту параметра связи  $\alpha$  соседних элементов блочной среды.

Проведенные модельные расчеты показывают, что величина задержки  $c$  не зависит от размера решетки  $L$  и соответственно числа участвующих в релаксации элементов  $L \times L$ . В рассмотренной модели релаксации величина параметра  $c$  связана со скоростью сброса напряжений в системе и соответственно с параметром  $\alpha$ , определяющим эту скорость.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. С целью анализа влияния фактора взаимодействия элементов системы при релаксационном процессе сброса напряжений рассмотрена модифицированная OFC-модель. Она представляет собой  $2d$ -систему  $L \times L$  элементов с открытыми граничными условиями. При выполнении условия сброса для параметра напряжения  $\sigma_i^*$  в некотором  $i$ -м элементе, он сбрасывается в 0. При этом часть сбрасываемого напряжения  $\alpha\sigma_i^*$  передается соседним элементам ( $0 < \alpha < 1/4$ ). В качестве условия сброса рассмотрено условие статической усталости (4), определяющее длительность нахождения элемента в “неразрушенном” состоянии в зависимости от действующего на элемент напряжения. Исходное состояние системы в начальное время  $t = 0$  определяется случайным распределением напряжений в элементах с заданным амплитудным распределением.

2. Как следует из расчета релаксации напряжений, при различном начальном распределении напряжений, зависимость частоты сбросов от времени  $n(t)$  зависит от величины параметра связи  $\alpha$ . При высокой уровне связи и соответственно значениях  $\alpha$ , близких к консервативному пределу  $\alpha = 1/4$ , частота сбросов  $n(t)$  имеет степенную зависимость с параметром  $p \approx 0.85$ . При этом вид начального распределения напряжений на решетке элементов не влияет на характеристики степенной зависимости. По мере уменьшения  $\alpha$  происходит разрушение степенной зависимости  $n(t)$ . В этом случае характер зависимости  $n(t)$  определяется исходя из начального распределения напряжений в элементах и соответствующего распределения времени их сбросов.

3. Сравнительный анализ результатов расчета зависимости  $n(t)$  для различных показательных функций, моделирующих статическую усталость  $\tau(\sigma)$ , показывает существование временного масштаба релаксации при котором частота сбросов хорошо описывается соотношением Омори–Утсу  $n(t) = \frac{K}{(c+t)^p}$ . При этом рост параметра связи между элементами  $\alpha$  влияет на параметры закона Омори–Утсу. Увеличение  $\alpha$  приводит к росту параметра  $K$  и увеличению длительности релаксаци-

онного процесса, незначительному уменьшению  $p$ , и росту длительности параметра задержки  $c$ .

4. Фоновая сейсмичность и афтершоковый режим являются проявлением единого сейсмического процесса. Стандартная OFC модель описывает основные закономерности фоновой сейсмичности. Рассмотренная модель описывает релаксационный отклик, близкий к афтершоковой последовательности сбросов. Интересным продолжением исследований может стать построение модели, объединяющей эти процессы. Указанные активные режимы характеризуются различными временными масштабами, плотностью сбросов во времени, критериями условий сброса. Одним из возможных подходов для решения этой задачи является задание единого критерия сброса – условия (4) статической усталости. При этом, параметр  $b$ , определяющий временной масштаб процесса, должен иметь различные значения в режимах фоновой и афтершоковой сейсмичности. Одним из возможных управляющих параметров может быть температура. Малое значения  $b$  соответствует большому временному масштабу (5) и условие сброса достигается при значениях  $\sigma \approx C(4)$ . Источником роста  $\sigma$  на больших временных масштабах является внешнее приращение, аналогичное предположению OFC модели. Увеличение  $b$  соответствует сжатию временного масштаба, включению в процесс активных сбросов элементов решетки с напряжениями существенно меньших величины  $C$  при малом значении приращения внешнего напряжения.

Рассмотренная модель предполагает, что в процессе релаксации  $b = \text{const}$  и полученные значения  $p = 0.85 - 1.0$  соответствуют данному условию. При этом релаксационный процесс должен сопровождаться постепенным уменьшением значения  $b$  до исходного “фонового” значения. В этом случае учет зависимости  $b(t)$  может привести к увеличению параметра спада частоты сбросов  $p > 1$ . Наблюдения реальных афтершоковых последовательностей показывают, что наклон спада частоты землетрясений часто превышает единицу и данный механизм надо учитывать. Обоснование подобного механизма требует дальнейших исследований и сопоставления экспериментальных данных в очаге землетрясения и модельных данных по параметрам теплового режима, изменчивости поля напряжений, характера связности блоковых структур.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Баранов С.В., Шебалин П.Н. Глобальная статистика афтершоков сильных землетрясений: независимость времен и магнитуд // Вулканология и сейсмология. 2019. № 2. С. 67–76.
- Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности // Вестн. АН СССР. 1968. Вып. 3. С. 46–52.

- Смирнов В.Б., Пономарёв А.В. Физика переходных режимов сейсмичности. М. 2020. 412 с.
- Черепанцев А.С. Временные вариации параметров динамических систем геодинамических процессов // Физика Земли. 2018. № 45. С. 20–38.
- Bailey J. Attempt to correlate some strength measurements of glass // Glass Industry. 1939. V. 20 (№ 1. P. 21–25; № 2. P. 59–65; № 3. P. 95–99; № 4. P. 143–147).
- Benioff H. Earthquakes and rock creep // Bull. Seism. Soc. Am. 1951. V. 41. P. 31–62.
- Burridge R., Knopoff L. Model and Theoretical Seismicity // Bull. Seism. Soc. Am. 1967. V. 57. P. 341–371.
- Cherepantsev A.S. The Mechanism of the Faults Genesis and Synchronization in the Dissipative Cellular Model of Earthquakes // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2022. V. 18. № 1
- Christensen K., Olami Z. Scaling, phase transitions, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model // 1992. Phys. Rev. A. V. 46. P. 1829.
- Christensen K. Self-organization in models of sandpiles, earthquakes and flashing fireflies. University of Aarhus. Denmark. Ph. D. Thesis. 1992. 64 p.
- Corral A., Perez C.J., Diaz-Guilera A., Arenas A. Self-organized criticality and synchronization in a lattice model of integrate-and-fire oscillators // 1995. Phys. Rev. Lett. V. 74. P. 118.
- Grassberger P. Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 2436–2444.
- Helmstetter A., Sornette D. Foreshocks Explained by Cascades of Triggered Seismicity // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. P. 2457.
- Helmstetter A., Hergarten S., Sornette D. Properties of foreshocks and aftershocks of the nonconservative self-organized critical Olami-Feder-Christensen model // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046120.
- Hergarten S., Neugebauer H.J. Foreshocks and aftershocks in the Olami-Feder-Christensen model // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 238501
- Holliday J.R., Turcotte D.L., Rundle J. Self-similar branching of aftershock sequences // Physica A. 2008. V. 387. P. 933–943.
- Kostrov B.V., Das S. Principles of Earthquake Source Mechanics. Cambridge University Press, Applied Mathematics and Mechanics Series. 1988. 286 p.
- Ogata Y. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes // J. Am. Stat. Assoc. 1988. V. 83. P. 9–27.
- Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 1244–1247.
- Scholz C. Microfractures, aftershocks, and seismicity // Bull. Seism. Soc. Am. 1968. V. 58. P. 1117–1130.
- Scholz C.H. Microfractures, aftershocks and seismicity // Bull. Seismol. Soc. Am. 1968. V. 58. P. 1117–1130.
- Schorlemmer W.M.D., Wiemer S. Variations in earthquake-size distribution across different stress regimes // Nature. 2005. № 437. P. 539–542.
- Shebalin P.N., Narteau C., Baranov S.V. Earthquake Productivity Law // Geophys. J. Int. 2020. V. 222(2). P. 1264–1269.
- Smirnov V.B., Ponomarev A.V., Stanchits S.A., Potanina M.G., Patonin A.V., Dresen G., Narteau C., Bernard P., Stroganova S.M. Laboratory modeling of aftershock sequences: stress dependences of the Omori and Gutenberg–Richter parameters // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2019. V. 55. № 1. P. 124–137.

## Stress Relaxation in a Cellular Model of Elements with Nonlinear Interaction

A. S. Cherepantsev\*

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

\*e-mail: s6319a@mail.ru

A model of stress relaxation in a system of discrete elements is analyzed. The model suggests analyzing a small-time scale of the process when external supply of additional stresses in the system are negligibly small. The nonlinear interaction of elements is similar to the interaction of elements in the open dissipative OFC model. Toppling conditions are determined by the static fatigue effect. It is shown that at a high level of element coupling, the model is characterized by a power-law decay of the drop frequency in time, similar to that observed in aftershock sequences of earthquakes. This regularity slightly depends on the initial distribution of stresses in the system, its exponent is  $p = 0.85–10$  for the element coupling parameter  $\alpha = 0–0.25$ . The analysis of the value of the time delay  $c$  for the formation of a power-law drop frequency decay shows that this parameter correlates with the duration of large-amplitude drops at the initial step of the relaxation process. The value  $c$  is defined in this case by the parameter  $\alpha$ . Calculations also shows that relaxation of the mean stress  $\sigma(t)$  in the system of elements follows the relation  $t \propto e^{-\gamma\sigma}$  with a time delay corresponding to the value for the drop frequency dependence. At the same time, there is no delay in the time series of the mean stress decrease during the drop of an individual element  $d\sigma$ . The dependence  $d\sigma(t)$  is defined by the relation  $t \propto e^{-\beta\Delta\sigma}$  in the entire temporal interval of the relaxation process. The value  $\beta$  linearly decreases with the increase of element coupling  $\alpha$  in the model.

**Keywords:** OFC model, static fatigue effect, earthquake aftershock sequence, Omori-Utsu law