

УДК 550.83.015

ИСТОРИЯ МЕТОДА ИСТОКООБРАЗНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. А. С. Долгаль¹, *, А. В. Пугин¹, П. Н. Новикова¹¹Горный институт Уральского отделения РАН, г. Пермь, Россия

*E-mail: dolgal@mi-perm.ru

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

После доработки 26.07.2021 г.

Принята к публикации 27.07.2021 г.

Представлена история метода аппроксимации дискретно заданных значений гравитационного и магнитного полей истокообразными функциями, с физической точки зрения отвечающими аномальным эффектам эквивалентных источников. Метод широко используется в прикладной геофизике с целью трансформации, трехмерной интерполяции и фильтрации на этапах обработки и качественной интерпретации данных. Он является эффективным инструментом для построения глобальных, региональных и локальных цифровых моделей геопотенциальных полей. Возникновение метода связано с задачей определения фигуры Земли, выделено три эпохи его развития: докомпьютерная (1960–1980 гг.), ранняя компьютерная (1980–2000 гг.) и эпоха компьютерных технологий (с 2000 г. по настоящее время). Выполнен анализ основных работ отечественных и зарубежных исследователей. Зафиксировано во многом “параллельное” развитие отечественных и зарубежных технологий, преимущественно обусловленное недостаточным обменом информацией. Выявлены основные тенденции развития метода истокообразной аппроксимации. Отмечено неуклонно возрастающее количество публикаций в области практического применения метода.

Ключевые слова: гравитационное поле, магнитное поле, аномалия, истокообразная аппроксимация, эквивалентный источник, трансформация, интерполяция, алгоритм, компьютерная технология.

DOI: 10.31857/S0002333722020028

СТАНОВЛЕНИЕ МЕТОДА

Суть метода истокообразной аппроксимации состоит в приближении гравитационного и магнитного полей аномальным эффектом эквивалентных источников, расположенных ниже поверхности наблюдений. Используется фиксированное пространственное расположение источников (достаточно часто – сеточная модель, отвечающая сети задания поля), их неизвестные физические параметры, как правило, определяются в результате решения линейной обратной задачи. Аппроксимационная конструкция – эквивалентная физико-математическая интерпретационная модель (по классификации В.Н. Страхова) обеспечивает лишь требуемую степень близости наблюдаемого и модельного полей. Поэтому она не используется в качестве модели распределения петрофизических свойств в изучаемом объеме среды для получения геологической информации¹.

Истокообразные аппроксимации являются эффективным инструментом трансформации и

интерполяции геопотенциальных полей. Аналитическое приближение дискретных измерений позволяет достаточно точно выполнять различные математические преобразования для цифровых моделей полей. Использование в качестве базисных функций аномалий для элементарных источников, относящихся к тому же классу, что и измеренные поля, придает этим преобразованиям физический смысл. К несомненным достоинствам метода следует отнести высокую точность результатов, учет различий в высотах точек наблюдений, подавление негармонической составляющей поля (помехи), возможность выполнения 3D-интерполяции и трансформации данных в одном цикле расчетов.

Если рассматривать истокообразные аппроксимации как средство моделирования и исходить из принципов классификации математических моделей гравитационного поля Земли, приведенных в работе [Гравиметрия и геодезия, 2010], то в данной статье речь пойдет преимущественно о детерминированных, дискретных, 2D- (площадных) компьютерных моделях наблюдаемых аномальных полей. Эти модели предназначены для проведения вычислительных экспериментов, сжатия и отображения информации. Они реали-

¹ В редких случаях сеточные аппроксимационные модели используются для выделения и оконтуривания аномалиеобразующих тел и оценки петрофизических свойств, что будет рассмотрено далее.

зуются в виде комплекса программных средств и связанных с ним баз данных [Непоклонов, 1998]. Область действия рассматриваемых моделей может быть различной: для глобальных моделей – 10^9 км² и более; для региональных моделей – от 10^8 до 10^6 км²; для локальных моделей – от 10^5 до 10^2 км² и менее.

Исторически возникновение метода истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей относится ко времени проведения активных исследований для задачи определения фигуры Земли по наблюдаемым значениям силы тяжести, с 30-х по 50-е годы XX столетия. Концептуальная основа буквально всех существующих методов истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей во многом заимствована из этой задачи геодезической гравиметрии. Однако, по мнению В.М. Гордина и С.А. Тихоцкого [Гордин, Тихоцкий, 1999], сами идеи, связанные с истокообразной аппроксимацией полей, появились в физике гораздо раньше, еще в XVII–XVIII веках.

М.С. Молоденский, подводя итоги исследований по определению фигуры Земли, рассматривал возмущающий потенциал W на поверхности реальной (нерегуляризованной, не редуцированной к уровню геоида) Земли в виде суммы

$$W = U + T, \quad (1.1)$$

в которой первое слагаемое U представляет собой потенциал теоретической Земли (сфероида или референц-эллипсоида) и определяется обобщенной формулой Стокса, а второе – возмущающий потенциал T – приближается потенциалом простого слоя [Молоденский, 1945]. Продифференцировав обе части выражения (1.1), его можно переписать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} = -\Delta g \quad (1.2)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\Delta g, \quad (1.3)$$

где: n – нормаль к поверхности референц-эллипсоида из заданной точки P_i на поверхности Земли; $\Delta g = g - \gamma$ – аномальное значение силы тяжести; g – наблюдаемое значение силы тяжести; γ – нормальное значение силы тяжести [Молоденский, 1948; 1949].

Перефразируя М.А. Алексидзе [Алексидзе, 1987, с. 58], можно сказать, что М.С. Молоденский концептуально сформулировал подход к решению задачи истокообразной аппроксимации возмущающего потенциала T в виде вопроса: “Нельзя ли подобрать такие значения аномалий возмущающего потенциала на сфере внутри геоида, чтобы, будучи продолженными на поверхность реальной Земли, они полностью совпали с измеренными значениями потенциала?”. Поло-

жительный ответ на этот вопрос дал сам М.С. Молоденский в работе [Молоденский, 1945] в виде сложного линейного интегрального уравнения типа Фредгольма, при этом оставив его решение другим исследователям. Впрочем, несколько позже, вводя понятие “квазигеоида”, М.С. Молоденский приводит приближенный способ решения полученного уравнения [Молоденский, 1948; 1949].

В обозначенный период задачу М.С. Молоденского в основном пытались решить путем прямого продолжения (проецирования) гравитационного поля с поверхности Земли на внутреннюю сферу, в результате получив некую гармоническую функцию φ . Несмотря на то, что φ иногда называли поверхностной плотностью, ее рассматривали лишь как проекцию на сферу гармонической функции V_z или Δg , заданной измеренными значениями на физической поверхности Земли. Большой цикл работ на данную тему опубликовал выдающийся норвежский ученый А. Вьерхаммаг, ссылки на некоторые из них приводятся в списке литературы [Вьерхаммаг, 1962; 1963; 1965; 1969a; 1969b; 1975; 1985]. Однако выполненные им исследования, как и у М.С. Молоденского, лежали в области геодезической гравиметрии, а не прикладной (разведочной) геофизики, и были также посвящены задаче определения фигуры Земли.

Бесспорно, А. Вьерхаммаг является одним из основоположников метода истокообразной аппроксимации. М. Нотин в своей вышедшей посмертно монографии [Нотин, 1969, с. 323] так описывает суть предложенного подхода: “Реализующий существенную простоту классического подхода, А. Вьерхаммаг в одном из самых современных методов использует сферическую поверхность относимости, полностью расположенную внутри Земли. Затем он использует интеграл продолжения поля вверх... Во-первых, чтобы определить значения гравитационной аномалии на поверхности относимости по ее значениям, измеренным на топографической поверхности, и во-вторых, чтобы определить значения внешнего поля по значениям на поверхности относимости. Метод применим без изменений для редуцирования силы тяжести или любой другой производной интеграла Пуассона...”.

Существенный вклад в решение внутренней краевой задачи Дирихле – определение значений потенциальной функции на некоторой внутренней поверхности в теле Земли по ее значениям на поверхности Земли – внесли работы В.Д. Купрадзе и М.А. Алексидзе [Купрадзе, 1967; Алексидзе, 1966; 1987; Купрадзе, Алексидзе, 1964]. В них приводится доказательство возможности существования приближенного решения задачи М.С. Молоденского со сколь угодно малой погрешностью, которое послужило впоследствии отправной точкой для теории метода истокообразной аппроксимации. В 1968 г. М.А. Алексидзе в соавторстве с Г.И. Санадзе представляют вер-

сию метода истокообразной аппроксимации с использованием точечных источников, распределенных в некоторой замкнутой области внутри Земли, но не предлагаю при этом конкретной вычислительной схемы [Алексидзе, Санадзе, 1968]. Также еще в 1963 г. И.Д. Савинским были получены теоретические результаты, которые также можно считать прообразом современных методов истокообразной аппроксимации [Савинский, 1963].

В своей работе [Молоденский, 1967, с. 287] М.С. Молоденский писал: “Итак, основная геодезическая задача (изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли) четко отделяется от основной геофизической задачи (изучение внутреннего строения Земли)”. Однако следует заметить, что еще в 1956 г. В.А. Кузивановым было высказано предложение об использовании результатов М.С. Молоденского в области развездочной геофизики [Кузиванов, 1956]. Подход, который развивали в своих работах М.С. Молоденский и А. Vjerhammar, а также в общем виде обозначаемый в работе других авторов, был прообразом метода аппроксимации геопотенциального поля потенциальными гармоническими функциями, названный позднее истокообразной аппроксимацией.

В отличие от предшественников, В.И. Аронов разглядел в этом подходе предпосылки для создания принципиально нового метода трансформации геопотенциальных полей, но применительно к решению задач прикладной геофизики, и в частности – гравиразведки. Изучая особенности интерпретации данных гравиметрической съемки в горной местности, связанные с влиянием резко расчлененного рельефа земной поверхности², В.И. Аронов [Аронов, 1963], опираясь на ранние работы М.С. Молоденского, В.А. Кузиванова, Б.А. Андреева, В.Н. Страхова, предлагает новый способ редуцирования гравитационных аномалий с земной поверхности на горизонтальную плоскость относимости, проходящую через максимальную высотную отметку рельефа. В этой [Аронов, 1963] и последующих работах [Аронов, 1965а; 1965б] приводится не только сам способ, но и реализующая его вычислительная схема, где в качестве базового эквивалентного источника используется участок простого слоя в виде квадратной площадки (трехмерный случай) либо пластинки (двумерный случай). Как пишет сам В.И. Аронов [Аронов, 1970, с. 79]: “Идея метода заключается в том, что на внутренней плоскости z' подбирается такая функция $U_z(\xi, z')$, ко-

торая при аналитическом продолжении в узлы расчетной сети будет совпадать с заданными значениями $U_z(\xi, z)$ сколь угодно точно. Дальнейшие расчеты ведутся по обычным формулам, основанным на использовании интеграла Пуассона для решения внешней задачи Дирихле”. И далее [Аронов, 1970, с. 80]: “Фактически решение сводится к аппроксимации исходной функции системой гармонических функций. ... С физической точки зрения это решение может быть интерпретировано как подбор на плоскости z' эквивалентного простого слоя с кусочно-непрерывной плотностью (постоянной на элементарном отрезке интегрирования Δx), который создает на физической поверхности наблюдаемые аномалии³”.

В работе В.И. Аронова совместно с В.М. Гординым [Аронов, Гордин, 1971, с. 1] прослеживается эта же логика: “Основная идея метода заключается в замене реального распределения возмущающих масс простым слоем с кусочно-постоянной плотностью, расположенным на внутренней плоскости z' и создающим в гравиметрических пунктах наблюдаемые аномалии Δg . Исходное поле при этом фактически интерполируется системой гармонических функций – аномалий от элементарных квадратов с площадями $h \times h$, залегающих на глубине z' ”.

Казалось бы, метод создан, имеется достаточно простая вычислительная схема с использованием сеточной модели, то есть состоялся переход от интегрального представления к сумме и решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Что еще нужно? Чего не хватает? Как оказалось, не хватает простоты. Аномальные гравитационные эффекты квадратных пластинок – тех самых “простых” потенциальных гармонических функций, суммой которых предполагалось аппроксимировать аномальное поле – имеют довольно сложное аналитическое выражение, содержащее трансцендентную функцию \arctg . Легко представить, насколько трудоемким было построение аппроксимации с многократным использованием подпрограммы расчета функции \arctg даже для небольшого числа точек задания поля, учитывая, что происходило это в эпоху ранних вычислительных машин, не обладающих большой производительностью. Возможно, что работа [Алексидзе, Санадзе, 1968] прошла для остальных исследователей незамеченной или В.И. Аронов с коллегами считали оправданным применение в качестве эквивалентного источника именно пластинки для решения своих задач.

В книге [Аронов, 1977] В.И. Аронов уже рекомендует использовать при аппроксимации более простые гармонические функции. Сложно отследить тот момент, когда он обратил внимание на ано-

² Имеется в виду не проблема учета топографических масс, которая решается вводом в наблюдаемые значения силы тяжести поправки за влияние рельефа, а проблема разновысотности наблюдений, проявляющаяся искажениями аномалий силы тяжести вследствие совместного влияния криволинейного характера рельефа поверхности наблюдений и аномального вертикального градиента силы тяжести, которая не решается вводом поправок.

³ Имеется в виду поверхность наблюдений z , на которой измерены значения силы тяжести.

мальный эффект точечной массы как на самый практичный для использования в роли истокообразной функции. Еще в работе [Гордин и др., 1980] ее авторы в качестве эквивалентного источника использовали притяжение горизонтальной вещественной линии. Однако в наиболее полной монографии В.И. Аронова [Аронов, 1990], посвященной, в том числе, истокообразной аппроксимации потенциальных полей, в качестве аппроксимирующей функции уже фигурирует поле точечного источника.

Точечные источники также начали использоваться в геодезической гравиметрии. Дж. Бальмино представил аномальную часть гравитационного потенциала шарообразной Земли потенциалом притяжения 126 точечных масс, расположенных на глубинах от 1000 до 2000 км [Бальмино, 1975]. Пространственное расположение этих масс согласовано с наиболее интенсивными аномалиями силы тяжести, зафиксированными на земной поверхности.

По всей видимости, из-за “железного занавеса”, препятствующего регулярному обмену знаниями и опытом между зарубежными и советскими учеными, незамеченными для российских геофизиков того времени прошли работы [Dampney, 1966a; 1966b; 1969], австралийского геофизика C.N.G. Dampney, и в особенности его магистерская диссертация [Dampney, 1966b], представленная к защите в ноябре 1966 г. и защищенная им в 1967 г. в Университете Тасмании. В ней он впервые предлагает использовать сеточное распределение точечных источников в качестве эквивалентной модели для аппроксимации потенциального поля и приводит полное теоретическое обоснование метода, а кроме того – рабочий алгоритм, программу для ЭВМ “Эллиот-503” и пример ее практического применения для продолжения гравитационного поля в верхнее полупространство. Позднее, в 1969 г., выходит его наиболее известная работа по этой теме – “The equivalent source technique” [Dampney, 1969]. Именно на нее, как на первоисточник, ссылаются все зарубежные геофизики, имеющие отношение к развитию или применению метода истокообразной аппроксимации.

Нет оснований считать, что зарубежные геофизики не были знакомы с трудами советских коллег. Работы C.N.G. Dampney изобилуют ссылками на ранние работы В.А. Романюка [Romanjuk, 1959], В.Н. Страхова [Strakhov, 1961], в том числе в соавторстве с М.И. Лапиной [Strakhov, Lapina, 1963], А.В. Тархова и А.А. Сидорова [Tarkhov, Sidorov, 1960], но, к сожалению, не содержат ни одного упоминания работ В.И. Аронова. C.N.G. Dampney занимался этой тематикой в то же время, что А. Вjerhamмаг и В.И. Аронов, но развивал свою линию исследования, опираясь в основном на работы англоязычных авторов, среди которых, в частности – Е.С. Bullard, Р.И.В. Cooper [Bullard, Cooper, 1948], Р.А. Smith [Smith, 1960] и др. В ранней работе [Dampney, 1966a] он, как и

В.И. Аронов, еще использует в качестве базисной функции при аппроксимации поле горизонтальной пластинки. Однако именно ему принадлежит первенство в переходе к более простой в вычислительном плане сеточной модели точечных эквивалентных источников, которая по сей день является самой популярной у геофизиков при решении прикладных задач [Dampney, 1966b].

И все же нельзя сказать, что идея истокообразной аппроксимации применительно к трансформациям аномалий геопотенциальных полей возникла только в 60-х годах XX века. Еще в 1956 г., опередив В.И. Аронова и C.N.G. Dampney на целое десятилетие, А.К. Маловичко в своей книге [Маловичко, 1956, с. 67] отмечал: “Любое аномальное поле можно интерпретировать одним или несколькими аномальными телами с центрами на соответствующих глубинах. Если такая интерпретация лишена геологического смысла, то результаты ее с большим эффектом могут быть использованы в качестве подсобного решения. При помощи найденных выпуклых тел можно вычислить значения вертикальной составляющей притяжения в точках вспомогательной плоскости и тем самым найти аналитически продолженные значения аномалий. Точность такого решения зависит всецело от точности аппроксимации наблюдаемого аномального поля действием подобранных выпуклых тел. ... Из обширного списка тел, для которых решена обратная задача и которые могут быть использованы в качестве подсобных решений, в практическом отношении оправданным будет применение только самых простых тел, вроде шара, горизонтальной полосы и пр. ... Разумеется, наибольшего внимания заслуживает шар”.

А.К. Маловичко не представил простой вычислительной схемы для подбора параметров подсобных тел при построении аппроксимации, но его идея была своевременной. Ее возникновение было предопределено развитием аппаратной базы и появлением первых гравиметров, заменивших вариометры и градиентометры и существенно увеличивших производительность и объемы выполнения гравиметрических съемок. Гравиметрия как метод перестала ассоциироваться только с решением геодезической задачи об определении фигуры Земли и постепенно эволюционировала в гравиметрический метод, применяющийся для геокартирования, поисков и разведки полезных ископаемых – в гравиразведку [Сорокин, 1953]. Очевидно, что идея использования подсобных тел для продолжения аномалий силы тяжести в верхнее полупространство в то время “витала в воздухе” и материализовалась не только в работах А.К. Маловичко, но и других отечественных и зарубежных геофизиков. К сожалению, многие из этих работ были вскоре забыты.

Что касается C.N.G. Dampney, то отвечая на вопросы, которые задавал А. Роу в дискуссион-

ном разделе журнала “Geophysics” [Roy, 1970], он на первый план он поставил работу [Zidarov, 1965] в качестве основной предпосылки для разработки его “The equivalent source technique”. Действительно, именно в этой работе D. Zidarov показал принципиальную возможность подбора физических параметров совокупности фиксированных в пространстве точечных масс, суммарное поле которых отвечает наблюдаемому полю реальных геологических тел. Сама процедура подбора, представляющая собой по сути решение обратной задачи гравиметрии, сводится к решению СЛАУ. Причем, D. Zidarov распространил задачу на случай магнитного и электрического полей, предложив для этой цели соответствующие типы элементарных источников.

Если попытаться разобраться в том, кому принадлежит авторство отдельных аспектов теории, то, на наш взгляд, в некоторых вопросах С.N.G. Dampney опередил В.И. Аронова, например, раньше исследовав и опубликовав теоретические результаты, касающиеся оптимальной глубины расположения эквивалентных источников, связав эту глубину с обусловленностью решаемой СЛАУ. Однако позднее В.И. Аронов не только дал развернутое изложение теоретической составляющей метода истокообразной аппроксимации, но и подробно осветил многие прикладные аспекты его применения [Аронов, 1990].

В работе А.К. Маловичко [Маловичко, 1956, с. 139] выдвигается другая, не менее революционная идея, относящаяся к методу подсобных тел: “При решении задачи практически используется аномальное поле только в радиусе пяти–шести значений z_0 вокруг данной точки⁴. Это, очевидно, и определяет размеры области, в точках которой измеренные значения поля должны быть аппроксимированы полем подобранного тела”. Идея А.К. Маловичко впоследствии будет отмечена другими геофизиками и с развитием компьютеров приведет к существенному сокращению вычислительных затрат и ускорению решения СЛАУ путем разрежения матрицы коэффициентов (значений истокообразной функции) за счет выделения ленточной части. Такой подход использован в диссертационной работе [Пугин, 2007] при решении задачи истокообразной аппроксимации большой размерности.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ИСТОКООБРАЗНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ. АНАЛИЗ РАБОТ СОВЕТСКИХ (РОССИЙСКИХ) И ЗАРУБЕЖНЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Вследствие затрудненного обмена информацией между советскими и зарубежными учеными

⁴ Имеется в виду глубина залегания центра подсобного тела – шара.

почти до конца прошлого столетия развитие метода истокообразной аппроксимации в СССР (позднее в России) и за рубежом протекало параллельно, независимо друг от друга. Поэтому целесообразно рассмотреть не только ключевые моменты его эволюции, исторически связанные с различными временными периодами, что мы частично попытались сделать выше, но и в привязке к каждой, геополитически дифференцированной ветви развития метода: советской (российской) и иностранной. Кратко основные вехи, сыгравшие определяющую роль в становлении и развитии метода истокообразной аппроксимации, представлены на привязанной к хронологической шкале схеме (рис. 1).

Применительно к истории развития истокообразных аппроксимаций вторую половину XX века условно можно разделить на следующие временные периоды:

1) ориентировочно с 1960 по 1980 гг. – докомпьютерная эпоха или эпоха ручного счета, которая характеризуется отсутствием персональных компьютеров и необходимостью обрабатывать геофизические данные вручную. Это процесс лишь частично был автоматизирован с применением электронных калькуляторов или с использованием первых серийных ЭВМ, имеющих низкую производительность. В этот период в разумные сроки (от нескольких часов до суток) могли быть решены лишь задачи небольшой размерности и вычислительной сложности (массивы данных, содержащие от нескольких десятков до нескольких сотен значений поля);

2) с 1980 по 2000 гг. – ранняя компьютерная эпоха, время широкого внедрения первых персональных компьютеров, когда появляются возможности для автоматизированной обработки в те же сроки сравнительно больших массивов данных и задач средней размерности (массивы до нескольких тысяч или даже первых десятков тысяч значений поля);

3) с 2000 г. по настоящее время – эпоха компьютерных технологий, связанная с бурным ростом производительности вычислительной техники, позволяющей успешно решать задачи большой и сверхбольшой размерности (массивы, содержащие более сотни тысяч значений поля).

ПЕРВЫЙ ПЕРИОД – ДОКОМПЬЮТЕРНАЯ ЭПОХА ИЛИ ЭПОХА “РУЧНОГО СЧЕТА”

После того, как в 60-х годах XX века истокообразная аппроксимация аномалий силы тяжести выделилась в самостоятельный метод, основные пути ее развития были связаны с поисками возможностей ее применения для других геофизических методов и для восстановления геолого-геофизических признаков вне точек измерений. Десятилетие спустя появляются первые вычислительные схемы, ориентированные не на ручной счет, а на автоматизированную обработку

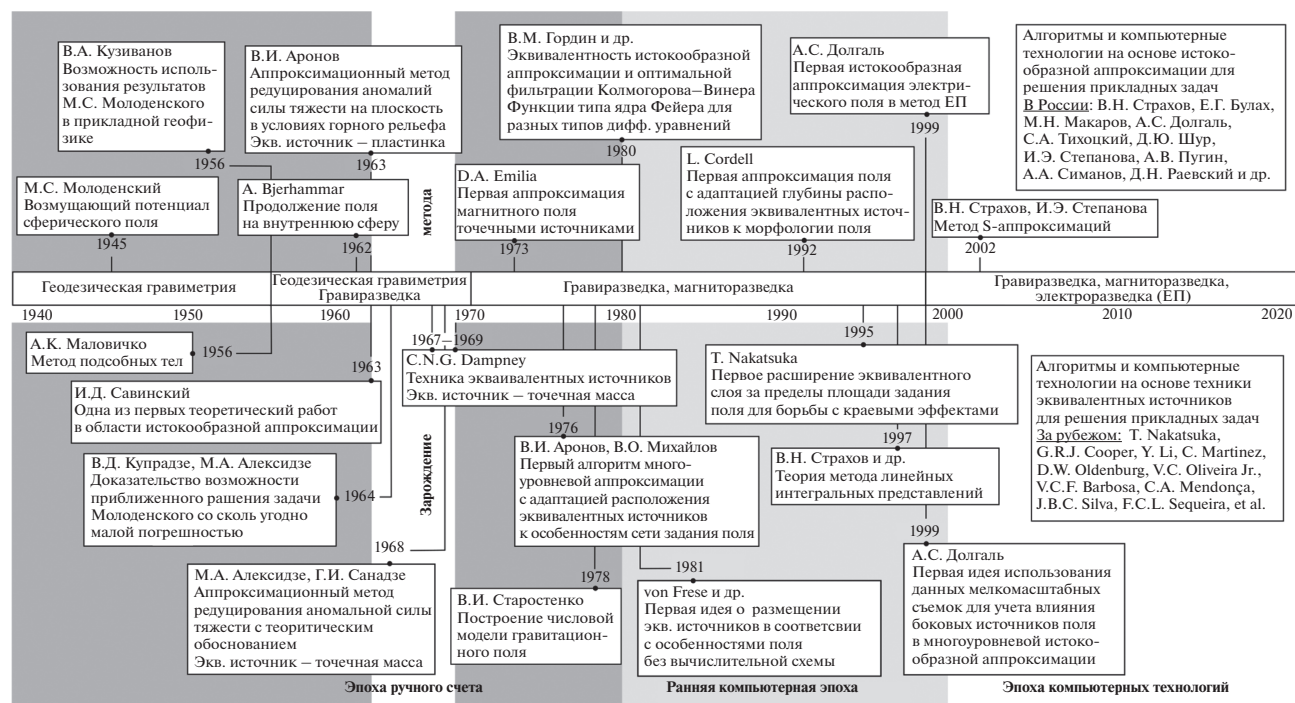


Рис. 1. Хронологическая шкала с основными вехами, определяющими становление и развитие метода истокообразной аппроксимации.

пусть пока и небольших массивов данных, а также соответствующее программно-алгоритмическое обеспечение.

Одним из первых практических приложений метода истокообразной аппроксимации, помимо аналитического продолжения потенциальных полей в верхнее полупространство, стало решение задачи интерполяции данных, без которой не удалось решить другую не менее важную задачу гравиметрии – вычисление гравиметрических уклонений отвеса. Именно этим задачам посвящена одна из первых совместных публикаций В.И. Аронова и С.М. Гордина [Аронов, Гордин, 1971]. Нужно отметить, что метод обеспечил погрешность вычислений составляющих уклонения отвесной линии $\sim 1''$ в центральной и ближней зоне [Гравиметрия и геодезия, 2010]. Позднее это приведет к целому циклу статей, посвященных трехмерной (учитывающей рельеф поверхности наблюдений) интерполяции методом истокообразной аппроксимации, в основу которой положено решение СЛАУ. Результат интерполяции представляет собой гармоническую функцию, а сама интерполяция осуществляет одновременно фильтрацию негармонической помехи.

Предложенное В.А. Кузивановым теоретическое решение задачи редуцирования гравиметрических измерений на горизонтальную плоскость было программно реализовано в 70-х годах XX века группой исследователей под руководством О.К. Литвиненко [Литвиненко и др., 1973]. В процессе вычислений

итерационно определялась плотность простого слоя, расположенного на поверхности Земли. По приведенным оценкам погрешность метода обычно составляет 1–1.5%, но при углах наклона поверхности измерений более 36° возрастает до 5%.

В 1976 г. В.И. Ароновым и В.О. Михайловым “при реализации метода интерполяции системой гармонических функций” окончательное решение рассматривалось “как сумма решений на ряде последовательных шагов, при каждом из которых решение является устойчивым” [Аронов, 1990, с. 88]. Это достигается путем размещения аппроксимирующих масс на ряде поверхностей, глубины до которых от поверхности измерений поля соизмеримы со средними расстояниями между точками в соответствующих выборках значений поля. Максимальное значение глубины в этом случае соответствует радиусу наибольшего “белого пятна” (лакуны) в области задания поля. Это действительно был революционный шаг, поскольку впервые было предложено адаптировать сеточное распределение эквивалентных источников к структуре исходных данных, что делало метод еще более гибким для решения прикладных задач.

Под обеспечением устойчивости интерполяции понималось, прежде всего, решение проблемы минимизации количества ложных высокочастотных аномалий (артефактов), возникающих между точками наблюдений. Данное явление также было описано С.N.G. Dampney и в зарубежной литературе называется “алиасингом” (*aliasing* – в

ориг.). В отечественной геофизике термин “алиасинг” употребляется преимущественно сейсмо-разведчиками.

За рубежом в эти же годы А. Bjerhammar продолжает развивать свой метод продолжения поля на внутреннюю сферу применительно к задаче определения фигуры Земли и вводит дискретное распределение потенциальной гармонической функции Δg на ней с использованием функции Дирака, по сути, переходя от континуального к сеточному распределению [Bjerhammar, 1975]. Этот переход был оправдан тем, что существенно упрощал практические расчеты.

В 1972 г. М.Н.Р. Bott, А. Ingles представляют метод аппроксимации аномального магнитного поля, названный ими матричным, использующий горизонтальный эквивалентный слой из плотной упаковки прямоугольных призм [Bott, Ingles, 1972]. Авторы показывают возможность псевдогравитационного преобразования с помощью введенной ими конструкции из аппроксимирующих призм.

В 1973 г., уже со ссылкой на работу С.Н.Г. Dampney [Dampney, 1969], появляется работа D. Emilia [Emilia, 1973], знаковая по той причине, что впервые подход с элементарными эквивалентными источниками был распространен на случай магнитного поля. В качестве эквивалентных источников применялись магнитные диполи.

На теоретическом примере D. Emilia показал, что хотя полный вектор аномального магнитного поля ΔT , строго говоря, не является потенциальной гармонической функцией, но учет магнитного наклона и склонения при аппроксимации эквивалентными источниками позволяет добиться вполне приемлемого совпадения модельного поля и его производных с соответствующими функциями, полученными путем решения прямой задачи магниторазведки. Причем сопоставление проводилось в том числе и при наличии (D. Emilia пишет – при доминировании) остаточной намагниченности у аномалиеобразующих тел, отличающейся по направлению вектора от современного нормального магнитного поля Земли. Этот пример показал, что нет никаких принципиальных препятствий для использования техники эквивалентных источников в прикладных задачах магниторазведки, если погрешности вычислений невелики, а результат может быть корректно интерпретирован с геологических позиций.

Используя подходы С.Н.Г. Dampney и D. Emilia в 1977 г. В.К. Bhattacharyya, К.С. Chan представили свою модификацию аппроксимационного метода в попытках подавить влияние расчлененного рельефа, сложенного неоднородно намагниченными породами [Bhattacharyya, Chan, 1977]. Эквивалентные источники располагались непосредственно на поверхности наблюдений. Рассмотрен также случай, когда поверхность на-

блюдений – горизонтальная плоскость, находящаяся выше максимальной высоты рельефа местности, но источники расположены на земной поверхности. Авторы показывают, что редуцирование поля на горизонтальную плоскость выше рельефа местности с использованием их аппроксимации существенно подавляет эффект разновысотности, а если редуцирование производить на поверхность в верхнем полупространстве, конкордантную рельефу (полученную увеличением отметок высот на некоторую константу), то частично подавляется и влияние самого магнитного рельефа. К сожалению, в статье не раскрывается тема алиасинга, который неизбежно возникает при расположении эквивалентных источников, независимо от их типа, в непосредственной близости от точек задания поля.

ВТОРОЙ ПЕРИОД – РАННЯЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ЭПОХА

Появление персональных компьютеров предопределило новый период в обработке и интерпретации геофизических данных. Параллельно с развитием теории происходит активная программная реализация ранее предложенных методов со всеми вытекающими техническими проблемами. Пытливыми умами нащупывались первые пути реального использования открывшихся возможностей в широкой геофизической практике.

В работе В.И. Старостенко рассматривается “построение числовой модели гравитационных полей”, которое подразумевает “отнесение поля к узлам равномерной сети, приведение его к плоскости, расположенной на определенной высоте, выполнение некоторых трансформаций поля” [Старостенко, 1978]. Предлагается устойчивый алгоритм построения аппроксимационной конструкции, представленной точечными массами, использующий метод регуляризации А.Н. Тихонова. В процессе аппроксимации используется скользящее окно, параметры которого определяются экспериментально, затем для каждого местоположения окна решается нормальная СЛАУ с числом неизвестных, не превышающем 121. В работе [Старостенко, 1978] приводятся 5 примеров, свидетельствующих о высокой эффективности предложенного алгоритма, в т.ч. в плане подавления интенсивных аномалий-помех, осложняющих исходные данные.

Неоценимый вклад в развитие истокообразных аппроксимаций внес В.М. Гордин, начинавший научную работу под руководством В.И. Аронова и являвшийся соавтором многих его работ. Как пишет сам В.М. Гордин в своей книге “Избранные труды и воспоминания”, изданной лишь спустя год после его смерти: “Наивысшим достижением этих исследований⁵ явился гибрид идеи истокообразных аппроксимаций с оптимальной фильтрацией по критерию Колмогорова–Винера.

Полученные результаты были “доведены до числа” и легли в основу статьи “Физические аспекты фильтрации и разделения геофизических аномалий”, написанной в соавторстве с Б.О. Михайловым и В.О. Михайловым [Гордин и др., 1980]”.

В ней впервые продемонстрированы возможности применения не только потенциальных гармонических функций, но и других функций типа ядер Фейера в процессе истокообразной аппроксимации. Авторы этой статьи показали, что тот же самый способ аналитического приближения можно беспрепятственно распространить на случай всех полей, удовлетворяющих трем основным типам дифференциальных уравнений математической физики: эллиптическому, параболическому и гиперболическому. Все достоинства метода истокообразной аппроксимации оказываются доступными для математической обработки тепловых и диффузионных полей, а также для решения широкого круга других геолого-геофизических задач.

Еще в 70-х годах XX века была обоснована возможность решения задачи разделения потенциальных полей, обусловленных разными источниками, на основе выметания масс с применением сеточных аппроксимирующих конструкций. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, реализованному в виде итерационного алгоритма с регуляризацией по А.Н. Тихонову [Непомнящих и др., 1978]. Эквивалентное перераспределение физического параметра осуществлялось по шеститочечной схеме Д. Зидарова. Было создано программное обеспечение, апробированное на модельных и практических примерах, разработаны методические рекомендации по его применению. В диссертации Л.В. Ли показано, что построенные таким образом результативные сеточные модели также вполне удовлетворительно характеризуют морфологию, условия залегания и размеры реальных источников [Ли, 1984].

Тем временем в параллельной “зарубежной реальности” в 1981 г. Т. Nakatsuka [Nakatsuka, 1981] исправляет существенную ошибку, допущенную авторами в работе [Bhattacharyya, Chan, 1977]. При выводе финального уравнения для аппроксимации магнитного поля В.К. Bhattacharyya и К.С. Chan использовали допущение о постоянстве направления вектора магнитных моментов аппроксимирующих эквивалентных диполей, располагаемых на произвольной поверхности S , полученной параллельным переносом вниз поверхности наблюдений, заявляя в то же время, что диполи ориентированы по нормали к поверхности S . Очевидно, что с изменением угла наклона этой поверхности изменяются направления магнитных моментов диполей. Т. Nakatsuka справедливо отметил, что в таком случае направление

вектора магнитных моментов эквивалентных источников будет переменным, и будет весьма сильно изменяться в случае значительного перепада высот поверхности S . С его слов, введя допущение о постоянстве направления вектора магнитных моментов, авторы эффективно ввели некую аппроксимацию “слукавив” (не говоря об этом прямо), что поверхность S , оказывается, не так уж сильно криволинейна и слабо отличается от плоскости. Вводя другое допущение о постоянном вертикальном направлении данного вектора, Т. Nakatsuka исправляет их оплошность и дает более точное и быстрое в плане сходимости решение задачи истокообразной аппроксимации, однако тема алиасинга здесь также не раскрывается.

В 1981 г. von R.R.V. Frese с коллегами [von Frese et al., 1981], опираясь на работы С.N.G. Dampney и D. Emilia, адаптируют истокообразные аппроксимации на случай задания результатов измерений гравитационного и магнитного полей в сферических координатах и затем применяют метод для аппроксимации региональных аномалий гравитационного поля на земной поверхности и спутниковых данных магнитного поля. Аппроксимация здесь выполняется с целью последующих аналитических вычислений производных гравитационного и магнитного потенциала в верхнем полупространстве и приведения их к одной поверхности. Эта работа была написана на основе научного отчета [von Frese et al., 1980], выполненного для агентства NASA и послужившего основой докторской диссертации von R.R.V. Frese. Обсуждая проблемы вычислительного характера, авторы, со ссылкой на свою более раннюю работу, рассматривают возможность размещения эквивалентных источников в модели в соответствии с особенностями аппроксимируемых аномалий – конструктивная идея, создающая предпосылки для развития алгоритмов с предварительным анализом структуры аномальных полей и последующей адаптацией к ней пространственного распределения эквивалентных источников. Впоследствии уже в 1998 г. von R.R.V. Frese выпускает статью с корректировками [von Frese, 1998] к работе [von Frese et al., 1981], исправляя ошибки, допущенные при выводе некоторых уравнений.

В 1984 г. R.O. Hansen и Y. Miazaki [Hansen, Miazaki, 1984] анонсируют возможности истокообразной аппроксимации в задаче пересчета потенциальных полей на произвольную поверхность в верхнем полупространстве. Они отмечают слабое место подхода предшественников [Bhattacharyya, Chan, 1977; Nakatsuka, 1981] – расположение эквивалентных источников непосредственно на поверхности наблюдений. R.O. Hansen, Y. Miazaki утверждают, что такая аппроксимация весьма ограничена в плане пересчета поля вверх, и предлагают располагать источники на поверхности,

⁵ Имеется в виду как проведенных совместно с В.И. Ароновым, с коллегами, так и самостоятельно.

конкордантной дневному рельефу, но лежащей всюду ниже него. Вместо “дискретных” диполей в качестве эквивалентных источников предложено использовать поле однородно намагниченных горизонтальных пластин. Авторы приводят интересный практический пример редукции данных аэромагнитной съемки, выполненной с обтеканием рельефа местности, на горизонтальную плоскость, расположенную на средней высоте съемочных полетов.

J.V.C. Silva в 1986 г. предлагает использовать сетку эквивалентных источников (магнитных диполей) для приведения аномального магнитного поля к полюсу, показывая, что такой подход существенно упрощает решение этой задачи и делает ее устойчивым [Silva, 1986].

В 1990 г. выходит наиболее полная монография В.И. Аронова [Аронов, 1990], знаковая для отечественных геофизиков, обобщающая все теоретические, методические и практические аспекты метода истокообразной аппроксимации, разработанные к этому времени, и превосходящая многие вопросы, которые будут позднее поставлены и изучены. Несмотря на то, что технология эквивалентных источников уже более 20 лет применялась на практике, в зарубежной и отечественной геофизике настолько всеобъемлющих публикаций по методу истокообразных аппроксимаций не было ни до 1990 г., ни после. Следует отметить, что в этой монографии рассматривается весьма широкая область практического применения метода — кроме работы с потенциальными геофизическими полями, рассмотрены задачи интерполяции структурных поверхностей, геометризации залежей углеводородов и подсчета запасов, оптимизация размещения скважин при разведочных работах на нефть и газ.

Анализ содержания двух следующих работ показывает, насколько внушительным по времени было отставание исследований зарубежных геофизиков от группы В.И. Аронова. В 1991 г. J. Xia и D.R. Sprawl [Xia, Sprawl, 1991] вновь обращаются к проблеме пересчета гравитационного поля с земной поверхности на горизонтальную плоскость с целью подавления искажающего влияния разновысотности точек измерений. При этом они опираются на технологию C.N.G. Dampney [Dampney, 1969] и, все также, располагают эквивалентные источники в одном слое, обосновывая выбор оптимальной глубины их расположения с позиций минимизации эффекта алиасинга.

Годом позже L. Cordell [Cordell, 1992], разрабатывая алгоритм интерполяции измеренных потенциальных полей в узлы регулярной сети и опираясь при этом на работу J. Xia и D.R. Sprawl, предлагает распределять источники, адаптируя их положение к амплитуде поля и его морфологии. Алгоритм является итерационным и весьма оригинален: предварительно задается некий коэффициент пропорциональности, связывающий

глубину погружения источника с расстоянием до ближайшей точки измерения поля. Определяется максимальная амплитуда поля в пределах площади исследований, затем — глубина до эквивалентного источника под этой точкой, исходя из этого коэффициента. Физический параметр (например, масса) источника вычисляется, следуя предположению, что аномалия в точке над ним обусловлена исключительно данным элементарным источником. Далее гравитационный эффект источника вычитается из измеренного поля во всех точках и определяется новое максимальное значение поля.

Процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность аппроксимации или не будет выполнено заданное число итераций. L. Cordell отмечает вычислительные сложности, связанные с немонотонностью сходимости итерационного процесса, но при этом в результате аппроксимации получается меньшее, чем число точек поля, количество аппроксимируемых тел. По всей видимости, это первый зарубежный алгоритм с многоуровневым расположением источников.

В 1992 г. В.Н. Страхов публикует развернутую статью с исследованием алгоритмов трансформаций геопотенциальных полей, основанных на истокообразной аппроксимации. В статье рассмотрена проблема оптимизации параметров аппроксимационной конструкции для более точного приближения исходного поля [Страхов, 1992].

В этом же году, работая с данными морской магнитной съемки, J.V.C. Silva в соавторстве с С.А. Mendonça реализуют весьма экономичный в плане вычислительных затрат алгоритм истокообразной аппроксимации с однослойным расположением эквивалентных источников, используя, подобно тому, как это было в подходе L. Cordell, технологию последовательных приближений. На первой итерации находятся минимальное и максимальное значения поля и вносятся в выборку “определяющих” значений, тогда как остальные значения поля принимаются избыточными. Эквивалентные источники располагаются только под точками экстремумов поля и по этим “определяющим” значениям находятся их физические параметры. Далее во всех остальных точках вычисляются модули отклонений наблюдаемого и модельного полей, и под точкой измерения, где имеет место наибольшее значение модуля вновь располагается эквивалентный источник. Значение измеренного поля в этой точке добавляется в выборку “определяющих” и участвует теперь в нахождении физических параметров всех источников. В практическом примере, содержащем 3137 наблюдений морской гравиметрической съемки на шельфе северной Бразилии, размер “определяющей” выборки составил 294 значения. Алгоритм продемонстрировал высокую экономичность (по оценкам авторов — ускорение до двух порядков) и

в плане вычислений, и с точки зрения малого числа эквивалентных источников, необходимых для аппроксимации поля. Авторы назвали его “determination of equivalent data (DED)” – определение эквивалентных данных [Mendonça, Silva, 1992; 1994] и использовали для решения задачи интерполяции потенциальных полей, представив годом позднее исчерпывающий сравнительный анализ своего алгоритма и метода минимальной кривизны [Mendonça, Silva, 1995].

В этот период времени под руководством И.Д. Савинского была создана компьютерная технология “Альфа-4”, все алгоритмы которой основаны на едином математическом аппарате решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, сводящимся, как и у многих других исследователей, к решению СЛАУ. В некоторых случаях применяется регуляризация. С физической точки зрения, это аппроксимация поля совокупностью элементарных источников, суммарный эффект которых автор называет представлением поля в виде полинома. Система предусматривает выполнение псевдогравитационного преобразования магнитного поля, пересчет полей на нижележащую наклонную плоскость, вычисление распределения плотности гравитирующих тел и градиента этого распределения, интерпретацию трехкомпонентной скважинной магниторазведки, оценку ресурсов полезных ископаемых путем определения интегральных характеристик источников аномалий [Савинский, 1995]. Приведены примеры успешного использования технологии “Альфа-4” на Березовском железорудном месторождении, месторождении хромитов на Полярном Урале, медно-никелевом месторождении Норильск-2, при обработке практических материалов среднемаштабных гравиметрических и аэромагнитных съемок [Савинский, 1994]. Однако примеров использования этой технологии другими исследователями авторам найти не удалось.

В 1995 г. Т. Nakatsuka предлагает интересную технику для подавления краевых эффектов при трансформациях магнитного поля на основе истокообразной аппроксимации [Nakatsuka, 1995]. Применяя в качестве эквивалентных источников прямоугольные призмы, он предлагает разместить часть призм за пределами области задания поля. Параметры источников определяются при этом путем решения недоопределенной СЛАУ, которая возникает за счет превышения числа источников над числом точек.

В 1996 г. выходит обширная монография R. Blakely [Blakely, 1996], в которой в числе прочего, со ссылкой на многие перечисленные выше работы, кратко излагаются основы аппроксимации с применением эквивалентных источников. Эта работа носит обзорный характер и не привнесла ничего нового в метод истокообразной аппроксимации, но часто используется вместо

ссылки на исследования С.N.G. Dampney в публикациях зарубежных геофизиков, как обобщающий источник.

В 1997 г. выходит обстоятельная и разносторонняя по содержанию статья Г.Я. Голиздры [Голиздра, 1997], в которой приводится наиболее полный обзор российских и зарубежных работ, касающихся аналитического продолжения потенциальных полей, опубликованных до этого времени. В ней приводится большой список работ В.Н. Страхова по теории методов аналитического продолжения потенциальных полей, переносить который целиком в данную статью мы не сочли возможным. Интересно, что в одной из работ Владимир Николаевич называет продолжение поля в верхнее полупространство с использованием аналитических аппроксимаций не аналитическим, а аппроксимационным, имея в виду его приближенный характер.

Следует отметить, что с 1997 г. В.Н. Страховым и его учениками развивается метод линейных интегральных представлений [Страхов и др., 1997; 1999], являющийся обобщением и развитием классического метода линейных интегральных уравнений. Этот метод обеспечивает решение многих задач гравиметрии и магнитометрии на общей аппроксимационной основе, в т.ч. нахождение линейных аналитических аппроксимаций элементов аномальных геопотенциальных полей: S - и F -аппроксимации. Теоретические работы В.Н. Страхова определили стратегию развития теории интерпретации геофизических полей на многие десятилетия вперед, их перечень можно найти в автобиографической монографии [Страхов, 2008]. К сожалению, объем статьи вынуждает авторов избирательно подойти к выбору ссылок на работы этого выдающегося ученого.

В 1999 г. в сборнике материалов первой все-русской конференции “Геофизика и математика” выходит статья В.М. Гордина и С.А. Тихоцкого по истории развития метода истокообразной аппроксимации [Гордин, Тихоцкий, 1999].

В конце 90-х годов с появлением в России достаточно мощных персональных компьютеров метод истокообразной аппроксимации начинает широко использоваться для решения прикладных задач в области гравиразведки, магниторазведки [Долгаль, Христенко, 1997; Долгаль, 1999а], а затем и электроразведки методом естественного электрического поля (ЕП) [Долгаль, 1999б]. Причем в статье [Долгаль, 1999а] впервые предлагается оригинальный подход к решению проблемы краевых эффектов и боковых источников при трансформациях геопотенциальных полей с использованием истокообразных аппроксимаций. Данные эффекты возникают в силу ограниченных размеров площади задания поля. Обычно их пытаются подавить “гипотетическими” процедурами, основанными не на фактических измерениях поля за пределами площади, а на каких-либо допущениях.

ниях о поведении поля и его источниках. Здесь же предлагалось расширить пределы площади за счет привлечения фактических данных мелко-масштабных гравиметрических и магнитных съемок, выполненных ранее и сохраненных в банках данных специализированных предприятий.

На этом условно заканчивается одна эпоха и начинается другая, в полной мере раскрывшая возможности вычислительной математики — эпоха компьютерных технологий.

ТРЕТИЙ ПЕРИОД – ЭПОХА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Эпоху компьютерных технологий можно смело ассоциировать с активным развитием программно-алгоритмического обеспечения методов обработки и интерпретации геопотенциальных полей. Резко возросла степень автоматизации камерального этапа геофизических работ, что повлекло за собой повышение эффективности труда инженеров.

Бурный рост производительности компьютеров позволил перейти к решению актуальных задач большой размерности. Исследователи сосредоточились на создании эффективно работающих компьютерных технологий, а там, где возможности компьютеров не позволяли “в лоб” решить задачу требуемой размерности — к разработке быстрых и экономичных алгоритмов с использованием различного рода “ускорителей” — вычислительных процедур, заимствованных из других областей инженерной науки. Необходимость решения проблем чисто технического характера, которые невозможно было предугадать на этапе создания метода или общей вычислительной схемы, активизирует междисциплинарный обмен идеями.

В начале 2000-х годов иностранные исследователи все еще пытаются решить задачу интерполяции геопотенциального поля в узлы регулярной сети, используя однослойную конструкцию эквивалентных источников, но изменяя глубину их размещения в зависимости от расстояния между точками задания данных [Cooper, 2000], а также пытаются уйти от процедур обращения матриц при определении параметров источников к более экономичным методам [Cooper, 2002].

В английском языке регулярная, т.е. квадратная или прямоугольная сеть точек задания параметра называется “грид” (*grid* — в ориг.), а процедура перевода данных из нерегулярной сети в грид — “гриддинг” (*gridding* — в ориг.). Этот термин уже прочно заимствован и достаточно часто используется в российском геофизическом диалекте научного языка.

В 2001 г. в работе [Li, 2001] используется подход C.N.G. Dampney для аппроксимации данных гравитационной градиентометрической съемки, но подобно T. Nakatsuka с применением в каче-

стве эквивалентного слоя плотной упаковки кубических тел.

В 2000 г. В.И. Аронов в статье [Аронов, 2000] рассматривает проблему трехмерной аппроксимации с целью интерполяции с использованием координат x, y, z исходных данных (не только значений потенциальных полей). Представлены примеры параметрической интерполяции — восстановления гладкой границы произвольного трехмерного тела по координатам вершин аппроксимирующего многогранника, заданного на его поверхности. Приведена структурная карта по подошве меловых отложений юго-западной части Прикаспийской впадины и карта концентрации азота на данном стратиграфическом уровне, построенная путем 3D-интерполяции. Выявлены достаточно заметные различия этих карт. Вполне можно согласиться с выводами автора о том, что “переход к решению трехмерных задач обработки геолого-геофизических данных открывает новые перспективы при подсчете запасов и изучении внутренней структуры месторождений, определении эксплуатационных параметров”. Не менее важно замечание автора о том, что отсутствие эффекта алиасинга в данном случае достигается не только за счет регуляризации, сколько за счет специфических особенностей самого алгоритма, позволяющих ему адаптироваться к структуре сети исходных данных и отношению сигнал/помеха.

В 2000 г. выходит большая обзорная работа выдающихся ученых [Страхов и др., 2000] о достижениях в области интерпретации геопотенциальных полей в XX веке, в которой в качестве инструмента для устойчивого и точного нахождения трансформаций предлагается метод, истории развития которого посвящена настоящая работа. Отмечается что истокообразная аппроксимация является универсальным подходом, пригодным для численной реализации как корректных, так и некорректных (например — вычисление производных) трансформаций.

В это же время А.С. Долгаль выпускает серию работ прикладного характера, в которых истокообразные аппроксимации успешно применяются для обработки потенциальных полей при решении рудных задач в горной местности [Долгаль, 2000; 2001a; 2002b; Долгаль и др., 2002]. В них приводятся примеры комплексной интерпретации наземной гравиметрической и аэромагнитной съемок, построения аналитической модели рельефа земной поверхности, а также развивается подход В.И. Аронова с многоуровневым размещением эквивалентных источников при интерполяции измеренных значений геопотенциальных полей. Местоположение источников в каждом слое в проекции на горизонтальную плоскость определяется путем анализа поля в пределах скользящего окна заданного размера, а их физические параметры — исходя из решения соответствующей СЛАУ, в которой правая часть определена из

скользящего среднего (среднеарифметического значения поля в окне).

В 2002 г. выходит монография А.С. Долгаль [Долгаль, 2002б], отражающая основное содержание докторской диссертации [Долгаль, 2002с]. В ней описан оригинальный подход, который более чем в 1.5 раза ускоряет итерационный процесс вычисления физических параметров эквивалентных источников в слое при квадратной сети задания поля. Предлагается модифицированный метод Зейделя с предварительной профильной фильтрацией поля по строкам грида на основе той же истокообразной аппроксимации и закреплением некоторого числа “каркасных точек” при решении СЛАУ. По сути, осуществляется декомпозиция задачи на ряд подзадач меньшей размерности. Также предложен подход к комплексной интерпретации данных наземной гравиразведки и аэромагнитной съемки, приведенных к единой горизонтальной плоскости при поисках платино-медно-никелевого оруденения в Норильском районе.

В период с 2000 по 2011 гг. выходит серия работ Е.Г. Булаха и его учеников [Булах, Шиншин, 2000; 2002; Булах и др., 2011], в которых предлагается использовать для истокообразной аппроксимации источник, собранный из трех попарно ортогональных стержней, ориентированных вдоль осей декартовой системы координат и образующих симметричную структуру относительно точки их пересечения. В этом случае для построения аналитической аппроксимации требуется также определить вектор физических параметров стержней. Также рассматриваются аппроксимации в других классах источников, например, для тел Л.Н. Сретенского, обладающих средней плоскостью [Bulakh, Markova, 2008].

В этот же период выходят две статьи: в одной из них, обзорной, аналитические аппроксимации рассматриваются для различных классов тел с точки зрения построения вспомогательных конструкций для последующих трансформаций и с позиций построения геологически содержательных решений [Bulakh, 2007]; в другой предлагается использовать эквивалентные источники для аппроксимации рельефа земной поверхности с целью интерполяции высот [Булах, Маркова, 2009]. Все перечисленные выше задачи были включены в последнюю монографию Е.Г. Булаха, вышедшую спустя год после смерти автора [Булах, 2010].

В 2001 г. на 28-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского С.А. Тихоцкий и Д.Ю. Шур, в развитие подхода В.И. Аронова, представлен алгоритм построения многоуровневых истокообразных аппроксимаций для решения задач магнитной картографии и трансформаций магнитного поля [Тихоцкий, Шур, 2001].

В 2002 г. В.Н. Страхов и И.Э. Степанова публикуют две ключевые работы [Страхов, Степанова, 2002а; 2002б] по методу S -аппроксимаций, представляющему собой частный случай метода

линейных интегральных представлений, в котором потенциальное поле предлагается приближать суммой полей простого и двойного слоя. Метод был предложен в локальном и региональном вариантах и впоследствии вошел в диссертационную работу И.Э. Степановой [Степанова, 2003]. Чуть позднее выходит ее работа [Степанова, 2004], в которой приводятся результаты опробования S -аппроксимаций на материалах гравиметрической и магнитной съемок.

В 2004 г. на очередной сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского В.М. Гордин, С.А. Тихоцкий и Д.Ю. Шур делают доклад о возможности и адекватности восстановления гармонической компоненты скалярных аномалий магнитного поля по аномалии модуля напряженности магнитного поля с применением истокообразных аппроксимаций [Гордин и др., 2004], а в 2006 г. выходит расширенная статья и ее англоязычная версия [Gordin et al., 2006]. Условия сходимости итерационного процесса и его устойчивость исследованы в широком диапазоне амплитуд аномального поля на численных примерах. Установлена эффективность предложенного алгоритма при решении часто встречающихся практических задач.

В 2005 г. коллектив авторов, в составе которого в том числе С.А. Тихоцкий и Д.Ю. Шур, публикуют интересную работу [Соловьев и др., 2005] с алгоритмом определения вектора магнитного момента аномалообразующих тел на основе кластерного анализа множества эквивалентных источников, адаптированного к распределению особых точек магнитного поля.

В это же время А.С. Долгалем разработан алгоритм, реализующий интегральный метод решения обратной задачи гравиметрии на основе сеточных распределений эквивалентных источников [Долгаль, 2005].

В 2006 г. японские геофизики Т. Nakatsuka и Sh. Okuma используют технику эквивалентных источников для аппроксимации результатов вертолетной аэромагнитной съемки с целью гриддинга и последующих трансформаций поля [Nakatsuka, Okuma, 2006]. В ней со ссылкой на работу 1995 г. [Nakatsuka, 1995] повторно уделяется внимание методике расширения эквивалентного слоя путем выноса дополнительных источников за пределы площади задания поля с последующим решением недоопределенной СЛАУ для нахождения их параметров. По нашему мнению, данный метод способен лишь несколько сгладить краевые эффекты, хотя сами авторы утверждают о полном их подавлении.

В том же 2006 г. J. Li и I. Morozov на ежегодной конференции SEG выступают с докладом, где критикуют дискретное распределение точечных источников, и предлагают перейти к непрерывному эквивалентному слою [Li, Morozov, 2006]. При этом в численной реализации метода непре-

рывный слой так же дискретизируется и представляется в виде плотной упаковки прямоугольных призм. На наш взгляд, преимущества такой конструкции в плане повышения точности вычислений сомнительны, а сам процесс аппроксимации усложняется.

R. Jia и R.W. J. Groom в 2007 г. на этой же конференции делают доклад о применении техники эквивалентных источников для вычисления градиентов магнитного поля, где сравнивают этот метод с аппроксимацией дискретных значений поля рядом Фурье [Jia, Groom, 2007], еще раз говоря о необходимости корректного выбора глубины размещения источников. Интересно, что при создании эквивалентного слоя они также расширяют его на 20% за пределы площади задания поля, по всей видимости, для подавления краевых эффектов. K. Davis и Ya Li в свою очередь представляют способ построения эквивалентного слоя с одновременным использованием полного вектора аномального магнитного поля и его градиентов [Davis, Li, 2007].

В России в 2006–2008 гг. появляется серия статей, посвященных быстрым алгоритмам построения многоуровневых аппроксимаций, ключевой процедурой в которых является декомпозиция сложной вычислительной задачи большой или сверхбольшой размерности на ряд подзадач меньшей размерности с применением бинарных деревьев – метода квадродерева и быстрого вейвлет-преобразования на основе базисных функций Хаара [Пугин, 2006; 2007; Dolgal, Pugin, 2006; Долгаль, Пугин, 2006а; 2006б; Долгаль, Пугин, 2007; Dolgal, Simanov, 2008]. В алгоритмах применяются процедуры сжатия информации с отбрасыванием избыточных данных о поле, что приводит к существенному уменьшению размерности СЛАУ на каждой стадии декомпозиции задачи. Однако отбрасывание проходит по “мягкому” варианту, т.е. участки поля, отброшенные из аппроксимации на начальной стадии декомпозиции, в обязательном порядке анализируются вновь и поступают в аппроксимацию на последующих стадиях во избежание неконтролируемого увеличения погрешности приближения. Разрастание аппроксимационной конструкции идет от нижних уровней глубин эквивалентных источников к верхним. В совокупности с истокообразной аппроксимацией, данные методы позволили разработать точные и весьма экономичные решения в плане вычислительных затрат, которые впоследствии вошли в диссертацию одного из авторов [Пугин, 2007].

В 2006 г. в работе [Simanov, Pugin, 2006] было предложено использовать истокообразные аппроксимационные конструкции, содержащие малое (в сравнении с числом измерений поля) число параметров эквивалентных источников, для компактного хранения в геоинформационных системах с возможностью оперативного управления данными.

В 2007 г. В.Н. Страхов публикует работу [Страхов, 2007], в которой рассматривает широкий спектр вопросов, касающихся построения линейных аналитических аппроксимаций при решении задач геодезии, геоинформатики и гравиметрии, а в 2009 г. выходит обширная и весьма интересная монография [Страхов и др., 2009], в которой подробно излагаются теоретические основы аппроксимационного подхода на основе интегральных представлений, а также методы F - и S -аппроксимации и результаты их опробования на модельных и практических примерах.

Спустя 11 лет после выхода работы [Долгаль, 1999а], предложенный в ней подход был реализован в виде компьютерной технологии для учета влияния боковых источников при трансформациях геопотенциальных полей [Долгаль, Пугин, 2008; Веселкова, Пугин, 2009; 2010]. Предлагалось расширить площадь задания поля за счет вовлечения материалов мелкомасштабных съемок из банков цифровых данных, а аппроксимационную конструкцию строить в виде нескольких слоев эквивалентных источников, нижние из которых аппроксимируют мелкомасштабные данные на большей площади, а верхние – разность между исходными данными (имеющими более крупный масштаб и точность) и результатами аппроксимации мелкомасштабной съемки. Позднее способ трансформаций с учетом влияния боковых источников был оформлен в виде патента [Бычков и др., 2010] и применялся для интерпретации результатов аэромагнитных съемок 1 : 100000 – 1 : 250000 масштабов на северо-западе Сибирской платформы [Долгаль и др., 2020].

В период с 2008 по 2013 гг. выходит большая серия статей группы пермских геофизиков, работающей под руководством А.С. Долгаля, с примерами практического применения различных алгоритмов истокообразной аппроксимации для решения прикладных задач гравиметрии и магнитометрии [Долгаль, Христенко, 2008; Шархмуллин, Долгаль, 2010; Долгаль и др., 2011а; 2011б], в том числе для трехмерной интерполяции и фильтрации геопотенциальных полей [Батырева, 2008; Батырева, Долгаль, 2009; Новикова и др., 2013].

В 2010 г. коллективом авторов разработан способ истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей с адаптивным распределением эквивалентных источников в многослойной модели в зависимости от морфологии поля [Пугин и др., 2010], отнесенный впоследствии к типу монтажных алгоритмов. Способ реализует процедуру выбора наилучшего местоположения эквивалентного источника на основе одномерной минимизации функционала невязки наблюдаемого и модельного полей в евклидовой метрике. Предложенная конструкция содержит сравнительно небольшое количество элементарных источников даже при значительном числе точек задания поля.

В 2010 г. Ya Li и D.W. Oldenburg [Li, Oldenburg, 2010] предлагают быстрый алгоритм построения слоя эквивалентных источников для работы с данными магнитной съемки, имеющими большую размерность. Источники по-прежнему предлагаются располагать в один конкордантный поверхности наблюдений слой либо размещать их на горизонтальной плоскости. Перед решением СЛАУ нужно выполнять разрежение матрицы ее коэффициентов на основе вейвлет-анализа и последующий синтез с отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов. На наш взгляд, данный подход оправдан лишь в равнинных территориях, поскольку любая предварительная фильтрация потенциального поля, измеренного в горной местности, не учитывающая рельеф земной поверхности наряду со значениями поля, может приводить к существенным искажениям результатов вследствие неучтенного эффекта разновысотности наблюдений. В этом кроется существенный недостаток алгоритма в сравнении с более ранними способами, учитывающими фрактальную структуру данных, предложенными в работах А.С. Долгалея и его учеников.

В том же 2010 г. выходит работа [Salem et al., 2010], в которой авторы предлагают перед построением эквивалентной модели источников выполнять фильтрацию высокочастотной компоненты магнитного поля с применением фильтра нижних частот, что близко к подходу, предложенному А.С. Долгалем в работе [Долгаль, 2002], однако предлагаемый иностранными авторами подход менее автоматизирован и более сложен в плане вычислений. В качестве эквивалентных источников использованы горизонтальные цилиндры бесконечного простираения, что обусловлено профильным вариантом алгоритма.

В 2011 г. выходит статья [Степанова, 2011], в которой рассматриваются аппроксимации рельефа земной поверхности и расчет топопоправок в рамках метода линейных интегральных представлений. Позднее выходит серия статей на данную тему [Stepanova et al., 2019; 2020a; 2020b]. Определенный интерес представляет статья [Gudkova et al., 2020], посвященная истокообразной аппроксимации рельефа поверхности и гравитационного поля Марса.

В 2012 г. П.С. Мартышко, Н.В. Федорова, Д.В. Геймайдинов провели анализ магнитного поля Урала (координаты 52° – 64° с.ш., 54° – 66° в.д.) на основе дискретизации интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода и решения СЛАУ (размер сетки 512×512 точек) с регуляризацией по Лаврентьеву на суперкомпьютере “Уран”. С помощью пересчета поля на высоты от 1 до 200 км были выделены его разночастотные составляющие, отражающие распределение намагниченности в земной коре. Следует отметить, что карты магнитных аномалий на высотах 100–200 км хорошо согласуются с данными спутниковых маг-

нитометрических наблюдений [Мартышко и др., 2012]. В дальнейшем был выполнен подбор магнитного поля сингулярными источниками для обширной территории Уральского региона с последующим вычислением ряда трансформант, в т.ч. для приведения к полюсу региональных магнитных аномалий [Мартышко и др., 2016].

В 2013 г. Jг. Oliveira с соавторами [Oliveira et al., 2013] предлагают оригинальный способ определения физических параметров эквивалентных источников в слое на основе метода локальных полиномов. В скользящем окне при каждом его положении определяется распределение физических параметров элементарных источников, попадающих в пределы окна, на основании подобранного полинома с некоторыми коэффициентами. В последующем полиномы “сшиваются” в единое распределение физических параметров источников для всего аппроксимирующего слоя.

В 2014 г. отечественными исследователями был предложен еще один оригинальный алгоритм построения истокообразной аппроксимации геопотенциального поля, реализующий концепцию “случайного вброса” или случайного поиска положения источника в сеточной модели [Пугин и др., 2014]. Впоследствии вышла статья с расширенным составом авторов, обобщающая все ранее предложенные ими алгоритмы построения многоуровневых аппроксимационных конструкций [Balk et al., 2016].

В том же 2014 г. коллектив авторов статьи [Kara et al., 2014] демонстрируют на практическом примере применение истокообразных аппроксимаций для трансформаций аномалий силы тяжести в условиях горного рельефа на полуострове Biga Peninsula в Турции.

Технология эквивалентных источников была модифицирована и использована для аппроксимации глобального магнитного поля Земли, полученного в результате спутниковых измерений CHAMP в период 2009–2010 гг. [Kother et al., 2015]. Аппроксимация производилась в сферических координатах с расположением эквивалентных источников на глубине 100 км ниже земной поверхности в узлах грида с икосаэдрическими ячейками. Предварительно из геомагнитного поля было исключено влияние земного ядра и магнитосферных источников с применением модели CHAOS-4.

В 2015 г. И.Э. Степановой и Д.Н. Раевским предложен модифицированный метод S -аппроксимаций геопотенциальных полей [Raevskiy, Stepanova, 2015a; 2015b], вошедший впоследствии в диссертационную работу [Раевский, 2016]. Эффективность метода подтверждена на модельных примерах, в работе [Stepanova et al., 2017] представлен практический пример трансформации гравитационного поля северной части Тихого океана (13341 пункт измерений, квадратная сеть точек с шагом 0.5°). Позднее был опубликован

цикл статей, посвященных повышению эффективности данного метода, в том числе применительно к интерпретации больших объемов данных гравиметрической и магнитной съемок с использованием предложенной модификации метода S -аппроксимаций [Stepanova et al., 2016; 2017; Kone-shov et al., 2017; Stepanova et al., 2020], а также для вычисления высот относительно геоида [Kone-shov, Stepanova, 2019].

С 2018 по 2020 гг. выходит серия статей, посвященных различным модификациям метода линейных интегральных представлений и их совместному использованию [Stepanova et al., 2018a; 2018b; 2019].

В 2016 г. С. Martinez и Ya Li [Martinez, Li, 2016] приводят пример использования технологии эквивалентных источников для аппроксимации данных гравитационной градиентометрической съемки. Располагая эквивалентные источники в один слой и решая линейную обратную задачу с регуляризацией достаточно сложным путем, авторы вынуждены искать дополнительные критерии, например, использовать L -кривую Хансена, для обеспечения приемлемой точности аппроксимации аномальных градиентов тяжести, не допуская при этом увеличения вычислительных затрат.

В опубликованной в 2017 г. статье М. Pilkington и О. Boulanger сравнивают различные алгоритмы продолжения потенциального поля с поверхности измерений в верхнее полупространство на модельном и практическом примере, в том числе и с применением истокообразных аппроксимаций [Pilkington, Boulanger, 2017]. К сожалению, из российских разработок упоминается только один метод, предложенный В.Н. Страховым в 1965 г., который не использует истокообразную аппроксимацию.

В 2017 г. выходят две статьи [Siqueira et al., 2017a; 2017b], в которых предлагается для ускорения сходимости итерационного процесса нахождения масс эквивалентных источников в однослойной конструкции использовать некоторую систему параметров — весовых коэффициентов, зависящих от амплитуды аномалии поля в данной точке.

В 2017 г. С.А. Тихоцкий и Д.Ю. Шур [Тихоцкий, Шур, 2017] расширили доказательство эквивалентности метода истокообразной аппроксимации оптимальному фильтру Колмогорова–Винера при определенном выборе автокорреляционной функции на более общий случай нерегулярной сети и криволинейной поверхности измерений [Гордин и др., 1980].

В 2018 г. выходит в свет статья [Пугин, 2018], в которой рассматриваются принципиальные различия теоретической и практических постановок задачи истокообразной аппроксимации. Автор показал, что вследствие нарушения условия замкнутости поверхности наблюдений при исполь-

зовании любой аппроксимационной конструкции (однослойной или многослойной) возникают искажения в трансформантах геопотенциальных полей, вычисленных с помощью аппроксимационного продолжения в верхнее полупространства. Эти искажения возникают вследствие неучтенной при аппроксимации “остаточной части” общего интегрального выражения, которую невозможно скомпенсировать какими-либо поправками.

В том же 2018 г. выходит статья [Ali et al., 2018], в которой на практическом примере продемонстрировано использование техники эквивалентных источников с однослойным расположением для пересчета поля на горизонтальную плоскость, расположенную всюду ниже земной поверхности, но выше эквивалентных источников. Истокообразная аппроксимация использовалась для вычисления производных гравитационного поля в нижнем полупространстве и определения по ним границ различных структурных элементов земной коры на территории межостровного моря Сулу в Тихом океане.

В этом же году М.Н. Dransfield и Т. Chen [Dransfield, Chen, 2019] приводят пример успешного практического применения истокообразной аппроксимации для трансформаций данных гравитационной градиентометрической съемки, выполненной с борта вертолета над вулканом ASO в Японии.

В 2019 г. Е.И. Есин с соавторами [Есин и др., 2019] на примере метода S -аппроксимаций показывают, что в условиях ограниченных площадей однослойные эквивалентные модели приводят к существенным искажениям трансформант при пересчетах магнитного поля в верхнее полупространство, особенно при наличии сильномагнитных боковых источников, на что также указывалось в работе, приведенной абзацем выше. Авторы предлагают вместо расширения площади использовать для аппроксимации данные аэросъемок на нескольких высотных уровнях, справедливо утверждая, что это повышает корректность построения эквивалентной модели. Однако при этом возникает необходимость получения данных на верхних уровнях измерений с меньшей погрешностью, чем на нижних уровнях, чего сложно добиться на практике.

В этом же году А.С. Долгаль для подавления влияния практической эквивалентности при решении обратной задачи гравиразведки монтажным методом предложил выполнять предварительное разделение гравитационного поля на составляющие, обусловленные объектами с разнознаковыми эффективными плотностями. Используется система точечных эквивалентных источников, последовательно погружающихся на глубину, аппроксимирующих интерпретируемое поле. Экспериментально установлено, что при некоторой глубине расположения источников

возможно достаточно точное восстановление “положительной” и “отрицательной” компонент аномального поля [Долгаль, 2019].

На ежегодной конференции SEG 95 J. Capriotti и Ya Li представляют доклад [Capriotti, Li, 2019], в котором предлагают свой способ аппроксимации полного вектора гравитационного поля (всех трех компонент в декартовой системе координат, а не только вертикальной составляющей) с использованием регуляризации методом L – кривой Хансена при решении плохо обусловленной СЛАУ.

На этой же конференции другой коллектив авторов [Reis et al., 2019] предлагает способ определения направления вектора намагничивания пород, создающих измеренное магнитное поле, посредством истокообразной аппроксимации с построением однослойной конструкции эквивалентных источников. В работе [Piaulino et al., 2019] повторно излагается способ быстрого построения аппроксимирующего эквивалентного слоя с применением регуляризатора, ускоряющего сходимость итерационного процесса нахождения физических параметров источников, с демонстрацией эффективности алгоритма на модельном и практическом примерах. Следует заметить, что успешное решение подобной задачи было реализовано в 2006 г. российскими геофизиками в программе REIST [Бабаянц и др., 2006].

В 2020 г. А.Ю. Давыденко представил устойчивый метод определения магнитной восприимчивости и вектора остаточной намагниченности трехмерных объектов на основе линейной регрессионной модели по методу эластичной сети [Давыденко, 2020].

На другой конференции представлен еще один доклад группы авторов [Piaulino et al., 2019], в котором они сравнивают два метода построения аналитической аппроксимации гравитационного поля: метод истокообразной аппроксимации в подходе C.N.G. Damrney и аппроксимацию рядом Фурье. В последующем обе аппроксимационные конструкции используются для вычисления тензора градиентов силы тяжести с целью сопоставления результатов. По мнению авторов, для модели локального источника первый метод является предпочтительным. При преобразовании суммы локальной и региональной аномалий оба метода дают неприемлемые результаты.

В одной из работ К. Mendonça предлагает способ решения обратной задачи для построения аппроксимирующего слоя эквивалентных источников, пытаясь разделить аномалиеобразующие объекты, имеющие различную геологическую природу [Mendonça, 2020]. В последующем подпространства, содержащие эквивалентные источники с положительными и отрицательными значениями эффективной плотности, используются отдельно для вычисления суммарной массы тел, создающих положительные и отрицательные аномалии гравитационного поля. Приведен пример

успешного практического применения метода при интерпретации материалов аэрогравиметрической съемки в провинции Карачас (Бразилия).

В 2020 г. D. Takahashi с соавторами приводят подробное описание нового алгоритма, реализующего быстрое построение эквивалентного слоя [Takahashi et al., 2020]. Авторы применяют к матрице значений истокообразной функции двумерное дискретное преобразование Фурье, перегруппировывая ее элементы и получая матрицы иного типа, новую систему уравнений, которая решается непосредственно в частотной области. При этом матрица коэффициентов истокообразной функции рассматривается как блочная матрица Теплица, что отвечает лишь идеализированному случаю задания потенциального поля на горизонтальной плоскости. Однако именно такой случай – аппроксимация данных аэрогравиметрической съемки, выполненной на постоянной барометрической высоте, приводится в качестве примера, демонстрирующего очень высокое быстродействие алгоритма.

Наконец в 2020 г. появляется статья [Zuo et al., 2020], в которой авторы предлагают использовать многослойную конструкцию эквивалентных источников для аппроксимации данных аэромагнитной съемки, выполненной с обтеканием рельефа, с последующим продолжением поля вниз вплоть до земной поверхности. Детали алгоритма не раскрываются, приводится лишь функционал сложного вида, который необходимо минимизировать. Примечательно, что возврат к разноглубинному расположению эквивалентных источников при истокообразной аппроксимации поля в работах зарубежных авторов происходит лишь спустя много лет после выхода работы [Cordell, 1992], в то время как российские геофизики, опираясь на результаты В.И. Аронова стали широко эксплуатировать данный подход, начиная с конца 90-х годов XX века.

Метод трехмерной интерполяции гравиметрических и магнитных данных был предложен S.R. Soler и L. Uieda в работе [Soler, Uieda, 2020]. Авторы используют разбиение области задания поля на ряд блоков с вычислением средних для каждого из них значения поля. Эти средние значения аппроксимируются набором точечных источников, находящихся под центрами блоков на разных глубинах. Метод обладает высокой точностью и быстродействием. Этот подход был развит на случай больших объемов данных (миллионы точек наблюдений) и показал хорошие результаты [Soler, Uieda, 2021]. Рекомендовано выбирать размер блоков, близкий к шагу результирующей сети гридирования. Наилучшим компромиссом между скоростью расчетов и точностью результатов является взаимное перекрытие блоков на 50% площади.

В 2015–2020 гг. группа пермских геофизиков расширила область практического применения истокообразной аппроксимации геофизических

полей [Долгаль и др., 2017; Долгаль, 2020]. Новую геологическую информацию удалось получить при пересчете геопотенциальных полей Норильского района и ультраосновного массива Кондер на сложенные синтезированные поверхности, расположенные выше земной поверхности [Долгаль, Дудин, 2015]. В качестве альтернативы сплайн-аппроксимации при построении огибающих сигнала в методе эмпирической модовой декомпозиции (EMD) рассматривается аномальный эффект эквивалентных источников [Долгаль, Христенко, 2017]. Истокообразные аппроксимации выбраны в качестве инструмента оценки различий между радиальной и вертикальной составляющими силы тяжести для больших территорий (с размерами от 100 км в поперечнике), характеризующей влияние сферичности Земли при выполнении интерпретационных построений в прямоугольной системе координат [Долгаль и др., 2018]. Аппроксимационный пересчет полей в верхнее полупространство с одновременным их дифференциальным преобразованием начал использоваться при интерпретационной томографии с целью приближенного выделения эффекта от горизонтального слоя горных пород. Эти технологии активно применяются при изучении подводных вулканов Курильской островной дуги по данным гидромагнитной съемки [Блох и др., 2018; 2019; Долгаль и др., 2021].

В 2020 г. вышел справочник [Параметры Земли..., 2020] с параметрами Земли 1990 г. в котором приводятся глобальная, региональная и локальная модели аномального гравитационного поля Земли (АПГЗ), построенные с использованием метода истокообразной аппроксимации. Описание аналитических моделей содержится в приложениях в виде параметров точечных источников (аномальных масс и геоцентрических координат). Вообще же одним из основных приложений метода точечных масс является учет АПГЗ для повышения точности баллистических расчетов. Несмотря на то, что уже получены коэффициенты разложения возмущающего потенциала Земли в ряд по сферическим функциям до 360-й и более высокой степени, метод точечных масс продолжает успешно применяться при расчете траектории полета ракеты. Данной теме посвящен отдельный раздел энциклопедического издания – книги “Гравиметрия и геодезия” [Гравиметрия и геодезия, 2010].

Эпоха развития и совершенствования компьютерных технологий истокообразной аппроксимации в прикладной геофизике продолжается. Благодаря новым вычислительным возможностям, можно ожидать совершенно неожиданных подходов к решению проблемы моделирования геопотенциальных полей. Подводя промежуточные итоги, отметим во многом “параллельное” развитие отечественных и зарубежных технологий, обусловленное недостаточным обменом информацией. Причем складывается впечатление,

что российские ученые лучше знакомы с англоязычными работами, нежели их иностранные коллеги – с российскими. Можно выделить основные тенденции развития метода истокообразной аппроксимации:

- 1) расширение области применения многоуровневых аппроксимационных конструкций, адаптированных к структуре сети задания и морфологическим особенностям поля;
- 2) совершенствование методов решения СЛАУ с числом неизвестных $O(10^6)$, направленное на снижение времени расчета параметров аппроксимационной конструкции и повышение точности результатов;
- 3) декомпозиция общей задачи истокообразной аппроксимации на ряд подзадач меньшей размерности;
- 4) обсуждение проблемы краевых эффектов и борьба с их проявлениями;
- 5) определение физических параметров эквивалентных источников без решения СЛАУ (одномерная оптимизация, статистические зависимости);
- 6) применение для 3D-интерполяции данных полевых магнитометрических и гравиметрических измерений и фильтрации осложняющих их помех;
- 7) использование для расчета трансформант геофизических полей – продолжение в верхнее полупространство, подавление эффекта разноразности путем пересчета на горизонтальную плоскость, пересчет на различные криволинейные поверхности – драппинг и т.п.;
- 8) разработка алгоритмов, учитывающих сферообразную форму Земли, предназначенных для построения глобальных и региональных моделей геофизических полей;
- 9) аппроксимация результатов многокомпонентных (в частности – градиентов силы тяжести при аэрогравиметрических работах) и разноразностных полевых измерений.

Следует также отметить неуклонно возрастающее количество публикаций в области практического применения метода истокообразной аппроксимации и его существенную технологическую адаптацию к решению широкого круга задач прикладной геофизики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-15-50037 “Экспансия”. Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 20-15-50037.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы статьи выражают глубокую благодарность докт. физ.-мат. наук П.И. Балку и канд. геол.-мин.

наук В.А. Рашидову за ценные замечания, высказанные при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Авсюк Ю.Н., Баграмян В.О., Бровар В.В. и др.* Гравиметрия и геодезия / Б.В. Бровар (отв. ред.). М.: Научный мир. 2010. 572 с. ISBN 9785915221894.
- Алексидзе М.А.* Об одном представлении аномального гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 4. С. 828–830.
- Алексидзе М.А., Санадзе Г.И.* О новом методе пересчета силы тяжести в горной местности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1968. № 6. С. 49–52.
- Алексидзе М.А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука. 1987. 336 с.
- Аронов В.И.* О редуцировании аномалий силы тяжести в горной области. Геофизическая разведка. Вып. 14. М.: Гостоптехиздат. 1963. С. 80–91.
- Аронов В.И.* Редуцирование аномалий силы тяжести в горной местности на внешнюю плоскость. М.: изд-во ОНТИ, ВИЭМС. 1965а.
- Аронов В.И.* К вопросу об интерполяции производных гравитационного потенциала в горной области // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1965б. С. 88–93.
- Аронов В.И.* О вычислении трансформант и редукиции аномалий силы тяжести на внешнюю плоскость в горном районе // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1970. № 7. С. 79–84.
- Аронов В.И.* Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М.: Недра. 1976. 131 с.
- Аронов В.И.* Методы обработки геологических данных на ЭВМ. М.: Недра. 1977. 168 с.
- Аронов В.И.* Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра. 1990. 301 с.
- Аронов В.И.* Трехмерная аппроксимация как проблема обработки, моделирования и интерпретации геофизических и геологических данных // Геофизика. 2000. № 4. С. 21–25.
- Аронов В.И., Гордин В.М.* Об одном способе интерполяции аномалий Δg и вычислении гравиметрических уклонов отвеса в районе Западных Альп // Геофизический бюллетень. 1971. № 24. С. 13–28.
- Аронов В.И., Кушнир Г.Ф., Михайлов Б.О., Михайлов В.О.* Алгоритм и программы интерполяции и фильтрации // Экспресс-информация ОЦНТИ ВИЭМС. Сер. Математические методы исследований в геологии. 1977. № 12. С. 1–19.
- Бабаянц П.С., Блох Ю.И., Буш В.А., Минц М.В., Трусов А.А., Филиппова И.В.* Интерпретация аэрогеофизических данных при геологическом картировании и изучении глубинного строения территорий // Разведка и охрана недр. 2006. № 5. С. 8–13.
- Бальмино Дж.* Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли. Использование искусственных спутников для геодезии. М.: Мир. 1975. С. 178–183.
- Батырева П.Н.* 3D-интерполяция как альтернатива традиционным методам построения цифровой модели гравитационного поля // Горное эхо. 2008. № 3–4 (33–34). С. 18–23.
- Батырева П.Н., Долгаль А.С.* Истокообразная аппроксимация полевых измерений как способ построения цифровых моделей гравитационного поля. Сборник материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Казань: КГУ. 2009. С. 40–43.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Петрова В.В., Филиппенко О.В., Рашидов В.А., Трусов А.А.* Подводный вулканический массив Рикорда (Курильская островная дуга) // Вулканология и сейсмология. 2018. № 4. С. 26–42.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Петрова В.В., Филиппенко О.В., Рашидов В.А., Трусов А.А.* Комплексные геолого-геофизические исследования подводного вулканического массива Архангельского (Курильская островная дуга) // Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. 2019. № 4(44). С. 35–50. <https://doi.org/10.31431/1816-5524-2019-4-44-35-50>
- Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка. 2010. 463 с.
- Булах Е.Г., Лапина Е.П.* К вопросу о построении аналитической модели внешнего магнитного поля // Геофизический журн. 2008. Т. 30. № 7. С. 42–50.
- Булах Е.Г., Маркова М.Н.* Об аппроксимационном подходе к описанию рельефа земной поверхности в задачах геодезии и гравиметрии // Геофизические исследования. 2009. Т. 10. №3. С. 25–37. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_12913758_80676095.pdf
- Булах Е.Г., Маркова М.Н., Лапина Е.П.* К вопросу о методах качественного анализа при решении задач геологической интерпретации гравиметрических аномальных полей // Геофизические исследования. 2011. Т. 12. № 2. С. 5–15. URL: <http://gr.ifz.ru/soderzhanie/2011/tom-12-nomer-2-2011>
- Булах Е.Г., Шиншин И.В.* Алгоритмическое и программное решение задачи построения аналитической модели гравитационного поля // Геофизический журн. 2000. Т. 22. № 2. С. 107–114.
- Булах Е.Г., Шиншин И.В.* Об аналитической аппроксимации исходного поля аномалии силы тяжести и его качественного интерпретации // Физика Земли. 2002. № . С. 67–74.
- Бычков С.Г. и др.* Способ построения трансформант гравитационного поля: пат. № 2431160 С1, РФ, МПК G01V 7/06 (2006.01) / Бычков С.Г., Долгаль А.С., Пугин А.В., Веселкова Н.В.; заявитель и патентообладатель ГИ УрО РАН. – 2010101347/28; заявл. 18.01.2010; опубл. 10.10.2011, бюл. №28.
- Веселкова Н.В., Пугин А.В.* Применение аналитических аппроксимаций для учета влияния сторонних масс при трансформациях гравитационного поля. Сборник науч. трудов “Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики”. Киев. 2009. С. 353–361.
- Веселкова Н.В., Пугин А.В.* Проблема сторонних источников в практике трансформаций геопотенциальных полей // Геофизика. 2010. № 1. С. 69–73.
- Голиздра Г.Я.* История развития теории и методов аналитического продолжения потенциальных полей. Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке. Труды конференций. М.: ОИФЗ РАН. 1997. С. 149–168.
- Гордин В.М., Михайлов Б.О., Михайлов В.О.* Физические аспекты аппроксимации и фильтрации аномаль-

- ных полей // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1980. № 1. С. 78–93.
- Гордин В.М., Тихоцкий С.А.* Истокообразные аппроксимации гравитационных и магнитных полей: история вопроса. Сборник материалов 1-й всероссийской конференции “Геофизика и математика”. М.: ОИФЗ РАН. 1999. С. 55–57.
- Гордин В.М., Тихоцкий С.А., Шур Д.Ю.* О восстановлении гармонической компоненты поля скалярных магнитных аномалий. Сборник материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ИФЗ РАН. 2004. С. 17–18.
- Гравиметрия и геодезия / Б.В. Бровара (ред.). М.: изд-во “Научный мир”. 2010. 572 с.
- Давыденко А.Ю.* Инверсия магнитного поля на основе эластичной сети и векторного сканирования для оценки магнитной восприимчивости и остаточной намагниченности трехмерных объектов. Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 47-й сессии Международного научного семинара Д.Г. Успенского – В.Н. Страхова, Воронеж, 27–30 января 2020 г. Воронеж: издательско-полиграфический центр “Научная книга”. 2020. С. 105–110.
- Долгаль А.С.* Аналитические аппроксимации геопотенциальных полей и их практическое применение. Геофизические исследования в Средней Сибири. Красноярск. 1997. С. 214–222.
- Долгаль А.С.* Аппроксимация геопотенциальных полей эквивалентными источниками при решении практических задач // Геофизический журн. 1999а. Т. 21. № 4. С. 71–80.
- Долгаль А.С.* Построение аналитической модели естественного электрического поля. Сборник Геология и полезные ископаемые Красноярского края. Красноярск. 1999б. С. 199–205.
- Долгаль А.С.* Истокообразная аппроксимация потенциальных геофизических полей, заданных в узлах нерегулярной сети. Сб. Геология и минеральные ресурсы Центральной Сибири. Красноярск. 2000. С. 193–198.
- Долгаль А.С.* Аппроксимация аномалий естественного электрического поля совокупностью эквивалентных источников // Геофизический журн. 2001а. Т. 23. № 1. С. 66–76.
- Долгаль А.С.* Компьютерные технологии интерпретации геопотенциальных полей при поисках медно-никелево-платинового оруденения // Геофизический журн. 2001б. Т. 23. № 2. С. 106–112.
- Долгаль А.С.* Практическое применение истокообразных аппроксимаций потенциальных геофизических полей. Геофизические методы поисков и разведки, технология и техника геологоразведочных работ, горное дело. Материалы международной научно-технической конференции “Горно-геологическое образование в Сибири. 100 лет на службе науки и производства”. Томск. 2001с. С. 23–27.
- Долгаль А.С.* Использование аналитических аппроксимаций геофизических полей при прогнозировании золотого оруденения (на примере Ольховско-Чибийского района, Восточный Саян) // Руды и металлы. 2002а. № 2. С. 35–38.
- Долгаль А.С.* Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемки в горной местности. Абакан: ООО “Фирма-МАРТ”. 2002б. 188 с.
- Долгаль А.С.* Компьютерные технологии интерпретации гравитационного и магнитного полей в условиях горной местности. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: ИФЗ РАН. 2002с. 351 с.
- Долгаль А.С.* Новая модификация интегрального метода решения обратной задачи гравиметрии. Сб. материалов конференции Геология и полезные ископаемые Западного Урала. Пермь: ПГУ. 2005. С. 189–192.
- Долгаль А.С.* Построение сеточных распределений эквивалентных источников геопотенциальных полей с использованием быстрого вейвлет-преобразования. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ИФЗ РАН. 2007. С. 96–99.
- Долгаль А.С.* Практические аспекты аппроксимации геопотенциальных полей функциями источников. Европейская ассоциация геологов и инженеров. Источник: Материалы конференции 2020, Engineering and Mining Geophysics. 2020. Т. 2020. С. 1–10. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202051058>
- Долгаль А.С., Бычков С.Г., Костицын В.И., Симанов А.А., Хохлова В.В.* Моделирование гравитационных эффектов, обусловленных влиянием сферичности Земли // Геофизика. 2018. № 5. С. 50–57.
- Долгаль А.С., Дудин О.А.* Пересчет потенциальных полей в верхнее полупространство на криволинейные поверхности. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 42-й сессии Международ. науч. семинара им. Д.Г. Успенского (г. Пермь, 26–30 января 2015 г.). Горный институт УрО РАН, Перм. нац. исслед. ун-т. Пермь. 2015. С. 69–73.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Ворошилов В.А.* Совершенствование методики аналитической аппроксимации данных магниторазведки // Геофизика. 2020. № 5. С. 29–36.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В.* Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // Геофизика. 2016. № 5. С. 4–10.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В., Рашидов В.А., Христенко Л.А.* Практическое применение истокообразной аппроксимации геолого-геофизических данных // Геофизика. 2017. № 5. С. 29–37.
- Долгаль А.С., Марушко Г.В., Коцур О.С., Марушко Г.Н.* Технология выделения локальных магнитных аномалий в условиях горного рельефа // Геофизика. 2002. № 6. С. 58–67.
- Долгаль А.С., Новикова П.Н., Осипова Е.Н., Пугин А.В., Рашидов В.А.* “Томографическое преобразование” аномального магнитного поля с использованием сеточного распределения эквивалентных источников // Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. 2021. № 1(49). С. 10–23. <https://doi.org/10.31431/1816-5524-2021-1-49-10-23>
- Долгаль А.С., Пугин А.В.* Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей, базирующиеся на фрактальном подходе // Вестник КРАУНЦ. Сер. наук о Земле. 2006а. № 1. С. 95–101. URL: http://www.kscnet.ru/kraesc/2006/2006_7/art8.pdf
- Долгаль А.С., Пугин А.В.* Фрактальный подход к аналитической аппроксимации потенциальных геофизических полей // Геоинформатика. 2006б. № 2. С. 37–44.

- Долгаль А.С., Пугин А.В. Учет влияния сторонних масс при трансформациях гравитационного поля. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Ухта: УГТУ. 2008. С. 254–257.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Пугин А.В., Шархимуллин А.Ф., Христенко Л.А. Развитие методов качественной и количественной интерпретации данных гравиметрии // Геофизика. 2011а. № 5. С. 31–39.
- Долгаль А.С., Пугин А.В., Симанов А.А., Батырева П.Н. Применение аналитических аппроксимаций для моделирования и интерпретации геопотенциальных полей // Российский геофизический журнал. 2011б. № 49–50. С. 42–51.
- Долгаль А.С., Христенко Л.А. Применение эмпирической модовой декомпозиции при обработке геофизических данных // Изв. Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2017. Т. 328. № 1. С. 100–108.
- Долгаль А.С., Христенко Л.А. Результаты и перспективы геофизических исследований при поисках рудного золота на восточном склоне Кузнецкого Алатау // Вестник КРАУНЦ. Серия наук о Земле. 2008. № 2. Вып. 12. С. 57–69. URL: <http://www.kscnet.ru/journal/kraesc/article/viewFile/545/pdf>
- Долгаль А.С., Христенко Л.А. Учет влияния рельефа при обработке магниторазведочных данных // Геофизика. 1997. № 1. С. 51–57.
- Есин Е.И., Василевский А.Н., Евменов Н.Д. Исследование S-аппроксимации магнитного поля в задачах инверсии методом DEXP при существенно ограниченных площадях измерений. Сб. материалов международной научной конференции “Недропользование. Горное дело. Направления и технологии поиска, разведки и разработки месторождений полезных ископаемых. Экономика. Геоэкология”. Новосибирск: СГУГиТ. 2019. С. 216–223.
- Кузванов В.А. К вопросу о редуцировании аномалий силы тяжести // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1956а. № 10. С. 1161–1173.
- Кузванов В.А. Об аналитическом продолжении гравитационного потенциала во внутреннюю область // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1956б. № 12. С. 1419–1425.
- Купрадзе В.Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. Вып. 2(134). С. 59–107.
- Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1964. № 4. С. 683–715.
- Ли В.С. Разделение и интерпретация гравитационных и магнитных полей на основе сеточных аппроксимирующих конструкций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата: КазПТИ. 1984. 219 с.
- Литвиненко О.К., Русьянов Ю.Г., Рукин М.Д., Сафонова З.Л. Автоматизированная система обработки и интерпретации гравиметрических измерений. М.: Недра. 1973. 352 с.
- Маловичко А.К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиметрии. М.: Гостоптехиздат. 1956. 158 с.
- Мартышко П.С., Федорова Н.В., Гемайдинов Д.В. Применение параллельных алгоритмов вычислений при изучении структуры аномального магнитного поля Урала // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 2. С. 201–203.
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН. 2016. 94 с.
- Методические рекомендации по применению комплекса методов интерпретации гравимагнитных данных с использованием компьютерных технологий / И.Д. Савинский (ред.). М.: ТОО “МЦАИ”. 1994. 93 с.
- Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Труды ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42. 110 с.
- Молоденский М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли // Известия АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. 1948. Т. XII. № 3. С. 193–211.
- Молоденский М.С. Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида // Труды ЦНИИГАиК. 1949. Вып. 68. С. 5–11.
- Молоденский М.С. Методы изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1967. № 11. С. 122–125.
- Непоклонов В.Б. Компьютерные модели аномального гравитационного поля Земли // Изв. высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 1998. № 6. С. 104–111.
- Непомнящих А.А., Овчаренко А.В., Ли В.С., Соколов Л.В. Интерпретация гравитационных аномалий на основе пространственного изучения и разделения полей. Алма-Ата: КазПТИ. 1978. 86 с.
- Новикова П.Н. Методы обработки и интерпретации данных магниторазведки и гравиметрии для сеточных моделей геологической среды. Дис. ... канд. геол.-мин. наук. Пермь: ПГНИУ. 2013. 152 с.
- Новикова П.Н., Долгаль А.С., Симанов А.А. Трехмерная интерполяция и подавление влияния приповерхностных неоднородностей при обработке гравиметрических данных // Вестник Пермского университета. Сер. геология. 2013. Вып. 1. № 18. С. 50–56.
- Параметры Земли 1990 года. Специализированный справочник. М.: ВТУ ГШ ВС РФ. 2020. 64 с.
- Пугин А.В. Аналитическая аппроксимация геопотенциального поля методом квадродерева. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2006. С. 292–295.
- Пугин А.В. Иерархические истокообразные аппроксимации геопотенциальных полей. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ОИФЗ РАН. 2007. С. 207–210.
- Пугин А.В. Компьютерные технологии интерпретации геопотенциальных полей на основе аналитических аппроксимаций и вейвлет-анализа. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 2007. Екатеринбург: Институт геофизики УрО РАН. 160 с.
- Пугин А.В. Истокообразные аппроксимации геопотенциальных полей. От теории к практике // Геофизические исследования. 2018. Т. 19. № 4. С. 16–30. <https://doi.org/10.21455/gr2018.4-2>
- Пугин А.В., Мичурин А.В., Веселкова Н.В. Стохастический алгоритм истокообразной аппроксимации: проверка гипотезы о “случайном вбрасывании” источника. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геоло-

гической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. С. 218–220.

Пугин А.В., Шархимуллин А.Ф., Балк П.И., Долгаль А.С. Адаптивная истокообразная аппроксимация геопотенциальных полей на основе одномерной оптимизации. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ИФЗ РАН. 2010. С. 330–334.

Раевский Д.Н. Разработка новых эффективных итерационных методов решения систем алгебраических уравнений обратных задач геофизики на основе метода интегральных представлений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИФЗ РАН. 2016. 200 с.

Савинский И.Д. О решении обратных геофизических задач, представленных интегральными уравнениями Фредгольма 1 рода // Изв. АН СССР, сер. геофизич. 1963. № 5. С. 71–82.

Савинский И.Д. Программные системы обработки и интерпретации гравитационных и магнитных данных // Геофизика. 1995. № 1. С. 24–31.

Соловьев А.А., Шур Д.Ю., Вишиани А.Д., Михайлов В.О., Тихоцкий С.А. Определение вектора магнитного момента при помощи кластерного анализа результатов локальной линейной псевдоинверсии аномалий ΔT // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 1. С. 109–112.

Сорокин Л.В. Гравиметрия и гравиметрическая разведка. М.-Л.: Гостехиздат. 1953. 484 с.

Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наук. Думка. 1978. 227 с.

Степанова И.Э. S-аппроксимации в методе линейных интегральных представлений при решении задач геофизики. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: ИФЗ РАН. 2003. 316 с.

Степанова И.Э. Результаты опробования компьютерных технологий S-аппроксимации на материалах детальной гравиметрической и магнитотермических съемок // Физика Земли. 2004. № 6. С. 88–96.

Степанова И.Э. Аппроксимация рельефа и расчет топопоправок в рамках метода линейных интегральных представлений // Геофизический журн. 2011. Т. 33. № 3. С. 128–139.

Страхов В.Н. Алгоритмы редуцирования и трансформации аномалий силы тяжести, заданных на физической поверхности Земли. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Сборник материалов конференции. Киев: Наукова думка. 1992. С. 4–81.

Страхов В.Н. Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геодезии, геоинформатике и гравиметрии // Геофизический журнал. 2007. Т. 29. № 1. С. 56–84.

Страхов В.Н. Моя жизнь в науке. В 3-х т. Т. 1. М.: ИФЗ РАН. 2008. 185 с.

Страхов В.Н., Голиздра Г.Я., Старостенко В.И. Развитие теории и практики интерпретации потенциальных полей в XX веке // Физика Земли. 2000. № 9. С. 41–64.

Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М.: ИФЗ РАН. 2009. 254 с.

Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002а. № 2. С. 3–19.

Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. 2002б. № 7. С. 3–12.

Страхов В.Н., Степанова И.Э., Гричук Л.В. Метод интегральных представлений при решении задач гравиметрии и магнитометрии в трехмерной постановке. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ОИФЗ РАН. 1997. С. 105–108.

Страхов В.Н., Степанова И.Э., Гричук Л.В., Керимов И.А. Метод интегральных представлений при решении трехмерных задач гравиметрии и магнитометрии. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 1999. С. 22–27.

Тихоцкий С.А., Шур Д.Ю. Применение многоуровневых истокообразных аппроксимаций к задачам магнитной картографии и анализа магнитного поля. Сб. материалов Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ОИФЗ РАН. 2001. С. 130–131.

Тихоцкий С.А., Шур Д.Ю. Об эквивалентности методов оптимальной фильтрации и истокообразной аппроксимации аномалий потенциальных полей, измеренных на произвольном дискретном множестве точек: теоретические аспекты // Вестник КРАУНЦ. Серия Науки о Земле. 2017. № 4. С. 113–117. URL: <http://www.kscnet.ru/journal/kraesc/article/viewFile/174/pdf/>

Шархимуллин А.Ф., Долгаль А.С. Алгоритмы истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей для данных большой размерности // Вестник Пермского университета. Серия Геология. 2010. № 1. С. 63–68. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_15554827_34348122.pdf

Ali A.E.O.A., Liu Zh., Bai Yo., Farwa A.G., Ahmed A.S., Peng G. A stable gravity downward continuation for structural delineation in Sulu Sea region // J. Applied Geophysics. 2018. V. 155. P. 26–35.

<https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2018.05.009>

Balk P.I., Dolgal A.S., Pugin A.V., Michurin A.V., Simanov A.A., Sharkhimullin A.F. Effective algorithms for sourcewise approximation of geopotential fields // Izvestia, Physics of the Solid Earth. 2016. V. 52. № 6. P. 896–911. <https://doi.org/10.1134/S1069351316050025>

Bhattacharyya B.K., Chan K.C. Reduction of magnetic and gravity data on an arbitrary surface acquired in a region of high topographic relief // Geophysics. 1977. V. 42. № 7. P. 1411–1430. <https://doi.org/10.1190/1.1440802>

Bjerhammar A. A general method for an explicit determination of the shape of the Earth from gravimetric data // Bull. Geodesique. 1962. V. 65. P. 215–220. <https://doi.org/10.1007/BF02529718>

Bjerhammar A. A note on gravity reduction to a spherical surface // Tellus. 1963. V. 15. № 3. P. 319–320. <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1963.tb01394.x>

Bjerhammar A. A new theory of gravimetric geodesy // Stud. Geophys. Geod. 1965. 9. P. 112–113. <https://doi.org/10.1007/BF02607317>

Bjerhammar A. On the boundary value problem of physical geodesy // Tellus. 1969a. V. 21. № 4. P. 451–516. <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1969.tb00460.x>

- Bjerhammar A.* Theory of a new geoid // *Bull. Geodesique*. 1969b. V. 92. P. 173–203.
<https://doi.org/10.1007/BF02521897>
- Bjerhammar A.* Discrete solutions of the boundary value problem in physical geodesy // *Tellus*. 1975. V. 27. P. 97–106.
<https://doi.org/10.3402/tellusa.v27i2.9892>
- Bjerhammar A.* A robust approach to global problems in physical geodesy // *Bull. Geodesique*. 1985. V. 59. P. 303–315.
<https://doi.org/10.1007/BF02521065>
- Blakely R.J.* Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press. 1996. 441 p.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511549816>
- Bott M.H.P., Ingles A.* Matrix methods for joint interpretation of two-dimensional gravity and magnetic anomalies with application to the Iceland–Faeroe Ridge // *Geophysical J. International*. 1972. V. 30. № 1. P. 55–67.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1972.tb06179.x>
- Bulakh E.G.* Approximation Constructions in Interpretation Problems of Gravity and Magnetic Surveys: A review // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2007. V. 43. № 7. P. 610–619.
<https://doi.org/10.1134/S1069351307070105>
- Bulakh E.G., Markova M.N.* Inverse gravity problems for models composed of bodies of Sretenskii's class // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2008. V. 44. № 7. P. 537–542.
<https://doi.org/10.1134/S1069351308070033>
- Bullard E.C., Cooper R.I.B.* The determination of the masses necessary to produce a given gravitational field. *Proceedings of the Royal Society of London // Series A, Math. and Phys. Sciences*. 1948. V. 194. № 1038. P. 332–347.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0084>
- Capriotti J., Li Ya.* Equivalent source processing of vector gravity data // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. SEG International Exposition and Annual Meeting. 2019. P. 1764–1768.
<https://doi.org/10.1190/segam2019-3216656.1>
- Cordell L.* A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions // *Geophysics*. 1992. V. 57. № 4. P. 629–636.
- Cooper G.R.J.* Gridding gravity data using an equivalent layer // *Computers & Geosciences*. 2000. V. 26. № 2. P. 227–233.
[https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(99\)00089-8](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(99)00089-8)
- Cooper G.R.J.* Fixed point inversion of geophysical data // *Computers & Geosciences*. 2002. V. 28. № 7. P. 799–808.
[https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(01\)00105-4](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(01)00105-4)
- Dampney C.N.G.* Three criteria for the judgement of vertical continuation and derivative methods of geophysical interpretation // *Geoexploration*. 1966a. № 4. P. 3–24.
[https://doi.org/10.1016/0016-7142\(66\)90007-X](https://doi.org/10.1016/0016-7142(66)90007-X)
- Dampney C.N.G.* Geophysical studies in Tasmania. Part A. Interpretation of the gravity Potential Field Using the Frequency Domain. Master thesis. University of Tasmania. Hobart. 1966b. 91 p. URL:
https://eprints.utas.edu.au/19471/1/whole_DampneyCNG1967_thesis.pdf
- Dampney C.N.G.* The equivalent source technique // *Geophysics*. 1969. V. 34. № 1. P. 39–53.
<https://doi.org/10.1190/1.1439996>
- Davis K., Li Ya.* Joint processing of total-field and gradient magnetic data using equivalent sources // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. SEG International Exposition and Annual Meeting. 2007. P. 775–779.
<https://doi.org/10.1190/1.2792527>
- Dolgal A.S., Pugin A.V.* Construction of Analytical Approximations of Geopotential Fields with the Consideration of Their Fractal Structure // *Doklady Earth Sciences*. 2006. V. 410. № 7. P. 1152–1155.
<https://doi.org/10.1134/S1028334X06070348>
- Dolgal A.S., Simanov A.A.* Application of Multiple-Scale Wavelet Analysis to Analytical Approximations of Geopotential Fields // *Doklady Earth Sciences*. 2008. V. 418. № 1. P. 118–122.
- Dransfield M.H., Chen T.* Heli-borne gravity gradiometry in rugged terrain // *Geophysical Prospecting*. 2019. V. 67. № 6. Special Issue: Geophysical Instrumentation and Acquisition. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1111/1365-2478.12736>
- Emilia D.A.* Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles // *Geophysics*. 1973. V. 38. № 2. P. 339–348.
<https://doi.org/10.1190/1.1440344>
- Gordin V.M., Tikhotskii S.A., Shur D.Yu.* Reconstruction of the Harmonic Component of the Magnetic Field Modulus Anomalies // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2006. V. 42. № 4. P. 334–343.
<https://doi.org/10.1134/S1069351306040082>
- Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov, A.V.* Density Anomalies in Subsurface Layers of Mars: Model Estimates for the Site of the InSight Mission Seismometer // *Solar System Research*. 2020. V. 54. № 1. P. 15–19.
<https://doi.org/10.1134/S0038094620010037>
- Hansen R.O., Miazaki Y.* Continuation of potential fields between arbitrary surfaces // *Geophysics*. 1984. V. 49. № 6. P. 787–795.
<https://doi.org/10.1190/1.1441707>
- Hotine M.* *Mathematical Geodesy*. *Essa Monographs*. Washington. 1969. 417 p.
- Jia R., Groom R.W.* Processing gradients of magnetic data utilizing an equivalent technique // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. SEG Int'l Exposition and Annual Meeting. 2007. P. 785–789.
<https://doi.org/10.1190/1.2792529>
- Kara I., Bal O.T., Tur H., Ates A.* A new efficient method for topographic distortion correction, analytical continuation, vertical derivatives and using equivalent source technique: Application to field data // *J. Applied Geophysics*. 2014. V. 106. P. 67–76.
<https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2014.04.011>
- Koneshov V.N., Stepanova I.E.* Using the Method of S-approximation to Determine Deflections of the Vertical and geoid Heights // *Gyroscopy and Navigation*. 2019. V. 10. № 1. P. 21–26.
<https://doi.org/10.1134/S2075108719010048>
- Koneshov V.N., Stepanova I.E., Raevskiy D.N.* On the terrain correction methods in the interpretation of gravimetric data // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2017. V. 53. № 2. P. 230–242.
<https://doi.org/10.1134/S1069351317010104>
- Kother L., Hammer M.D., Finlay Ch.C., Olsen N.* An equivalent source method for modeling the global lithospheric magnetic field // *Geophysical journal International*. 2015. V. 203. P. 553–566.
<https://doi.org/10.1093/gji/ggv317>
- Li Ya.* Processing gravity gradiometer data using an equivalent source technique // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. SEG International Exposition and Annual Meeting. 2001. P. 1466–1469.
<https://doi.org/10.1190/1.1816382>
- Li J., Morozov I.* Continuous Equivalent Source method of 3D potential field data // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. 2006. P. 914–918.
<https://doi.org/10.1190/1.2370405>

- Li Ya., Oldenburg D.W.* Rapid construction of equivalent sources using wavelets // *Geophysics*. 2010. V. 75. № 3. P. L51–L59.
<https://doi.org/10.1190/1.3378764>
- Martinez C., Li Ya.* Denoising of gravity gradient data using an equivalent source technique // *Geophysics*. 2016. V. 81. № 4. P. G67–G79.
<https://doi.org/10.1190/GEO2015-0379.1>
- Mendonça C.A.* Subspace method for solving large-scale equivalent layer and density mapping problems // *Geophysics*. 2020. V. 85. № 3. P. G57–G68.
<https://doi.org/10.1190/geo2019-0302.1>
- Mendonça C.A., Silva J.B.C.* Equivalent Data Concept Applied to Interpolation of Potential-Field Data // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. 1992. P. 552–555.
<https://doi.org/10.1190/1.1822146>
- Mendonça C.A., Silva J.B.C.* The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data // *Geophysics*. 1994. V. 59. № 5. P. 722–732.
<https://doi.org/10.1190/1.1443630>
- Mendonça C.A., Silva J.B.C.* Interpolation of potential-field data by equivalent layer and minimum curvature: A comparative analysis // *Geophysics*. 1995. V. 60. № 2. P. 399–407.
<https://doi.org/10.1190/1.1443776>
- Nakatsuka T.* Reduction of Magnetic Anomalies to and from an Arbitrary Surface // *Geophysical Exploration*. 1981. V. 34. № 5. P. 6–14. URL:
<http://nktk.la.coocan.jp/Publ/SPDFs/1981-10btsej.pdf>
- Nakatsuka T.* Minimum Norm Inversion of Magnetic Anomalies with Application to Aeromagnetic Data in the Tanna Area, Central Japan // *J. geomagnetism and geoelectricity*. 1995. V. 47. № 3. P. 295–311.
<https://doi.org/10.5636/jgg.47.295>
- Nakatsuka T., Okuma Sh.* Reduction of magnetic anomaly observations from helicopter surveys at varying elevations // *Exploration Geophysics*. 2006. V. 37. № 1. P. 121–128.
<https://doi.org/10.1071/EG06121>
- Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F., Uieda L.* Polynomial equivalent layer // *Geophysics*. 2013. V. 78. № 1. P. G1–G13.
<https://doi.org/10.1190/GEO2012-0196.1>
- Piauilino L.S., Barbosa V.C.F., Oliveira Jr. V.C.* Estimative of the gravity-gradient data from vertical component of gravitational attraction by using the equivalent-layer and fast Fourier transform techniques. *Expanded Abstracts of Sixteenth Congress of the Brazilian Geophysical Society*. 2019. P. 1–6.
<https://doi.org/10.22564/16cisbfg2019.235>
- Piauilino L.S., Siqueira F.C.L., Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F.* Estimative of gravity-gradient tensor components via fast iterative equivalent-layer technique. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. *SEG International Exposition and Annual Meeting*. 2019. P. 1714–1718.
<https://doi.org/10.1190/segam2019-3215804.1>
- Pilkington M., Boulanger O.* Potential field continuation between arbitrary surfaces – Comparing methods // *Geophysics*. 2017. 82(3). J9–J25.
<https://doi.org/10.1190/geo2016-0210.1>
- Raevskiy D.N., Stepanova I.E.* The modified method of S-approximations: Region version // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2015a. V. 51. № 2. P. 197–206.
<https://doi.org/10.1134/S1069351315020093>
- Raevskiy D.N., Stepanova I.E.* On the solution of inverse problems of gravimetry by the modified method of S-approximations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2015b. V. 51. № 2. P. 207–218.
<https://doi.org/10.1134/S1069351315020081>
- Reis A.L.A., Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F.* Equivalent layer technique for estimating magnetization direction. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. *SEG International Exposition and Annual Meeting*. 2019. P. 1769–1773.
<https://doi.org/10.1190/segam2019-3216745.1>
- Romanyuk V.A.* Disturbances of the force of gravity by the atmosphere // *Bull. Acad. Sci. U.S.S.R., Geophys. Ser. (English Transl.)*. 1959. P. 214–218.
- Roy A.* Discussion on “The equivalent source technique” by C.N.G. Dampney (*Geophysics*, February 1969, p. 39–53), & Reply by author to discussion by Amalendu Roy // *Geophysics*. 1970. V. 35. № 1. P. 158–160.
<https://doi.org/10.1190/1.1440073>
- Tarkhov A.B., Sidorov A.A.* The mathematical processing of geophysical data // *Bull. Acad. Sci. U.S.S.R., Geophys. Ser. (English Transl.)*. 1960. P. 1189–1196.
- Salem A., Lei K., Green Ch., Fairhead J.D., Stanley G.* Removal of cultural noise from high-resolution aeromagnetic data using a two stage equivalent source approach // *Exploration Geophysics*. 2010. V. 41. № 2. P. 163–169.
<https://doi.org/10.1071/EG09047>
- Silva J.B.C.* Reduction of the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies // *Geophysics*. 1986. V. 51. № 2. P. 369–382.
<https://doi.org/10.1190/1.1442096>
- Simanov A.A., Pugin A.V.* A New Approach to Interpreting and Holding Geologic-Geophysical Data on the Basis of Geoinformation Technologies and Principles of Fractal Analysis. *Proceedings of 2nd EAGE St. Petersburg International Conference and Exhibition on Geosciences*. 2006. B046 (electronic format).
<https://doi.org/10.3997/2214-4609-pdb.20.B046>
- Siqueira F.C.L., Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F.* Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint // *Geophysics*. 2017a. V. 82. № 4. P. G57–G69.
<https://doi.org/10.1190/GEO2016-0332.1>
- Siqueira F.C.L., Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F.* Iterative Fast Equivalent-layer Technique. *Proceedings of 79th EAGE Conference & Exhibition*. Paris, France. 2017b. Tu P6 01.
- Smith R.A.* Some depth formulae for local magnetic and gravity anomalies // *Geophysical Prospecting*. 1960. V. 8(4). P. 607–613.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1960.tb01736.x>
- Soler S.R., Uieda L.* A better strategy for interpolating gravity and magnetic data, EGU General Assembly 2020, Online. 4–8 May 2020. EGU2020-549. 2019.
<https://doi.org/10.5194/egusphere-egu2020-549>
- Soler S.R., Uieda L.* Gradient-boosted equivalent sources for gridding large gravity and magnetic datasets. *EGU General Assembly 2021*, online. 19–30 Apr 2021. EGU21-1276. 2021.
<https://doi.org/10.5194/egusphere-egu21-1276>
- Stepanova I.E., Kerimov I.A., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V.* Combined method of F-, S- and R-approximations in solving the problems of geophysics and geomorphology // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2018a. V. 54. № 1. P. 91–105.
<https://doi.org/10.1134/S1069351318010147>
- Stepanova I. E., Kerimov I.A., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V.* Combined Method of F-, S-, and R-Approximations of Increased Dimensionality in Solving the Problems of Geophysics and Geomorphology // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2018b. V. 54. № 6. P. 933–948.
<https://doi.org/10.1134/S1069351318060113>
- Stepanova I.E., Kerimov I.A., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V.* Improving the Methods for Processing Large Data in Geo-

physics and Geomorphology Based on the Modified *S*- and *F*-approximations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. V. 56. № 3. P. 364–378.

<https://doi.org/10.1134/S1069351320030118>

Stepanova I.E., Kerimov I.A., Yagola A.G. Approximation Approach in Various Modifications of the Method of Linear Integral Representations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2019. V. 55. № 2. P. 218–231.

<https://doi.org/10.1134/S1069351319020101>

Stepanova I.E., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V. On increasing the efficiency of the modified method of *S*-approximations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2016. V. 52. № 1. P. 149–160.

<https://doi.org/10.1134/S1069351315060105>

Stepanova I.E., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V. On the interpretation of large gravimagnetic data by the modified method of *S*-approximations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2017. V. 53. № 1. P. 116–129.

<https://doi.org/10.1134/S1069351316060112>

Stepanova I.E., Raevskij D.N., Shchepetilov A.V. Effective Technology for Constructing Digital Relief Models and Analytical Approximation of Earth's Potential Fields // *Seismic Instruments*. 2019. V. 55. № 6. P. 692–698.

<https://doi.org/10.3103/S0747923919060082>

Stepanova I.E., Raevskiy D.N., Shchepetilov A.V. Separation of Potential Fields Generated by Different Sources Based on Modified *S*-Approximations // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2020. V. 56. № 3. P. 379–391.

<https://doi.org/10.1134/S106935132003012X>

Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Pogorelov V.V. The Use of Structural-Parametric Approach for Approximation of Terrain Relief // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2020a. V. 56. № 6. P. 900–910.

<https://doi.org/10.1134/S1069351320060105>

Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Pogorelov V.V., Mikhailov P.S. Parametric Structural Approach to Constructing Digital Models of the Relief and Gravitational Field of the Earth Using Analytical *S*-Approximations // *Izvestia, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2020b. V. 56. № 8. P. 859–868.

<https://doi.org/10.1134/S0001433820080083>

Strakhov V.N. Methods of calculating the analytical continuation of potential fields // *Bull. Acad. Sci. U.S.S.R., Geophys. Ser. (English Transl.)*. 1961. P. 137–141, 226–231, 845–856.

Strakhov V.N., Lapina M.I. A new method for calculating vertical derivatives of potential fields in an upper half-space // *Bull. Acad. Sci. U.S.S.R. Geophys. Ser. (English Transl.)*. 1963. P. 349–357.

Takahashi D., Oliveira Jr. V.C., Barbosa V.C.F. Convolutional equivalent layer for gravity data processing // *Geophysics*. 2020. V. 85. № 6. P. G129–G141.

<https://doi.org/10.1190/geo2019-0826.1>

von Frese R.R.B., Hinze W.J., Braile L.W. Spherical Earth Analysis and Modeling of Lithospheric Gravity and magnetic Anomalies. Nasa Technical Memorandum 80709. Purdue University. Nasa Contract № NAS5–25030. 1980. 163 p. URL:

<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19800022475/downloads/19800022475.pdf>

von Frese R.R.B., Hinze W.J., Braile L.W. Spherical Earth Gravity and Magnetic Anomaly Analysis by Equivalent Point Source Inversion // *Earth and Planetary Science Letters*. 1981. V. 53. № 1. P. 69–83.

[https://doi.org/10.1016/0012-821X\(81\)90027-3](https://doi.org/10.1016/0012-821X(81)90027-3)

von Frese R.R.B. Correction to: R.B.B. von Frese, W.J. Hinze, L.W. Braile, “Spherical Earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion”. [*Earth Planet. Sci. Lett.* 53 (1981) 69–83] // *Earth and Planetary Science Letters*. 1998. V. 163. № 1. P. 409–411.

[https://doi.org/10.1016/S0012-821X\(98\)00174-5](https://doi.org/10.1016/S0012-821X(98)00174-5)

Xia J., Sprowl D.R. Correction of topographic distortion in gravity data // *Geophysics*. 1991. V. 56. № 4. P. 537–541.

<https://doi.org/10.1190/1.1443070>

Zidarov D. Solutions of some inverse problems of applied geophysics // *Geophysical Prospecting*. 1965. V. 13. P. 240–246.

<https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1965.tb01932.x>

Zuo B., Hu X., Leão-Santos M., Wang L., Cai Yi. Downward Continuation and Transformation of Total-Field Magnetic Anomalies Into Magnetic Gradient Tensors Between Arbitrary Surfaces Using Multilayer Equivalent Sources // *Geophysical Research Letters*. 2020. V. 47. № 16. P. 1–10. e2020GL088678.

<https://doi.org/10.1029/2020GL088678>

History of the Method for Sourcewise Approximations of Geopotential Fields

A. S. Dolgal^{a, *}, A. V. Pugin^a, and P. N. Novikova^a

^a*Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*

**E-mail: dolgal@mi-perm.ru*

This paper presents the history of the method of approximating discretely specified values of gravitational and magnetic fields by sourcewise functions that, from the physical standpoint, correspond to the anomalous effects of equivalent sources. The method is widely used in applied geophysics for transformation, three-dimensional interpolation, and filtration at the stages of data processing and qualitative interpretation. It is an effective tool for building global, regional, and local digital models of geopotential fields. The method emerged from the task of determining the figure of the Earth, and there are three periods of its development: pre-computer era (1960–1980), early computer era (1980–2000) and computer technology era (from 2000 to the present). The authors have analyzed the main works of Russian and foreign researchers. In many ways, Russian and foreign technologies have been developed “in parallel”, largely as a result of insufficient information exchange. The authors have identified the main trends in the development of the sourcewise approximation method. They have observed a steadily increasing number of publications regarding the practical application of the method.

Keywords: gravitational field, magnetic field, anomaly, sourcewise approximation, equivalent sources, transformation, interpolation, algorithm, computer technology