

## ОБЪЕМНЫЕ ТОКИ СОВРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ЯДРЕ ЗЕМЛИ

© 2021 г. С. В. Старченко<sup>1, \*</sup>, А. Ю. Смирнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, г. Москва, Россия

\*E-mail: sstarchenko@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2020 г.

После доработки 29.12.2020 г.

Принята к публикации 19.01.2021 г.

Возможно, впервые мы получили распределенные объемные электрические токи, определяющиеся наблюдаемым геомагнитным диполем. Для этого из уравнений Максвелла и устоявшихся геодинamo-оценок мы показали, что средняя плотность тока в жидком ядре Земли на несколько порядков превосходит плотность токов в твердом ядре. Соответственно, наша модельная плотность тока обнуляется в твердом ядре, а в жидком она, из соображений максимально реалистичных упрощений, пропорциональна расстоянию до оси диполя и направлена вокруг этой оси. Из стандартных разложений, интегрирований и общепринятой IGRF-модели нами получены суммарные токи, связанные с ними мощности омической диссипации, плотности объемных токов и ориентированные как дипольный полюс направления токовой оси с 1900 по 2020 гг.

*Ключевые слова:* распределенные объемные электрические токи, жидкое ядро, твердое ядро, модельная плотность тока.

DOI: 10.31857/S0002333721040086

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [McNish, 1940], по-видимому, впервые были оценены электрические токи, текущие в ядре Земли. Следуя этой работе, авторы долгое время (а в некоторых работах и до сих пор) подобные токи преимущественно аппроксимировали локальными диполями (см. в работе [Зидаров, Бочев, 1969]), которые, по сути, являются физически абсолютно невозможными бесконечно малыми и тонкими петлями тока. Чуть более реалистичны были протяженные, но по-прежнему физически невозможные бесконечно тонкие токовые петли [Peddie, 1979], которые противопоставляли гармоникам Гаусса [Aldredge, 1987] и использовали для долговременных оценок [Старченко, Ботвиновский, 2003]. Еще реалистичнее, но по-прежнему физически нереализуемые, модели с токовыми слоями [Stum, Pollack, 1998] и с опирающимися на токовые петли частично-объемными формами [Demina et al., 2016]. Удивительно, но мы нигде не обнаружили моделей простейших токовых систем, распределенных по всему динамо-объему подобно системам в успешных численных и аналитических моделях (см. [Starchenko, Jones, 2002; Christensen, 2010; Starchenko, 2014; Aubert et al., 2017; и ссылки в них]). Поэтому мы надеемся, что в этой работе впервые представ-

лены наипростейшие физически реалистичные объемно распределенные токовые системы для современного геомагнитного диполя.

В следующем разделе 2 из электромагнитных уравнений и устоявшихся геодинamo оценок мы показали, что средняя плотность тока в жидком ядре Земли превосходит плотность токов в твердом ядре. Исходя из этого и геодинamo оценок, в заключительном разделе 3 моделируемая нами плотность тока обнуляется в твердом ядре, а в жидком она пропорциональна расстоянию до оси диполя и направлена вокруг оси. Из стандартных разложений, интегрирований и общепринятой IGRF-модели нами получены объемные токи геомагнитного диполя и их омическая диссипация с 1900 по 2020 гг.

### 2. ОЦЕНКИ ТОКОВ В ЖИДКОМ/ТВЕРДОМ ЯДРЕ

Классические уравнения Максвелла и Ампера [Parkinson, 1983; Davidson, 2001] в верном для ядра Земли МГД приближении связывают векторы скорости течений  $\mathbf{U}$ , плотности тока  $\mathbf{J}$ , магнитного  $\mathbf{B}$  и электрического  $\mathbf{E}$  полей:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1a)$$

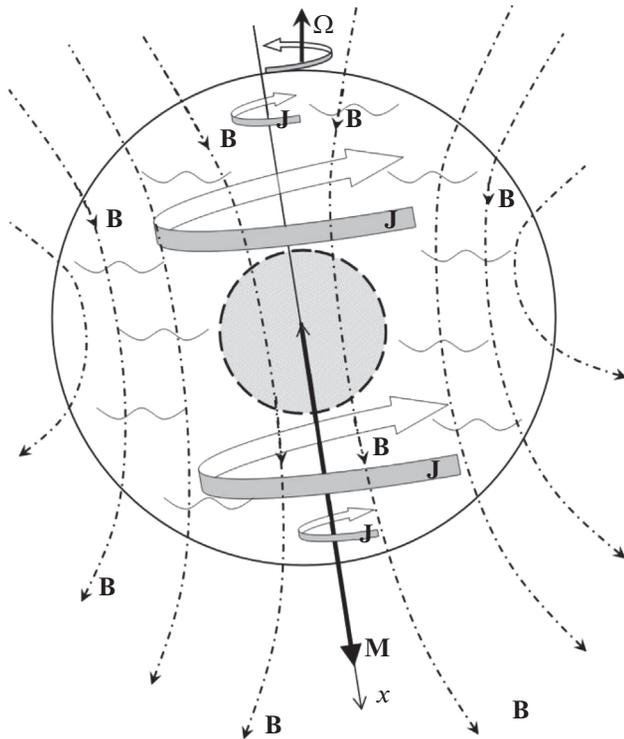


Рис. 1. Схематически изображены вектор угловой скорости вращения ядра Земли  $\Omega$ , вектор современного магнитного дипольного момента  $\mathbf{M}$ , вектора плотности тока  $\mathbf{J}$ , силовые линии геомагнитного поля  $\mathbf{B}$  и отсчитываемое от центра расстояние  $x$ .

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J}. \quad (1c)$$

Здесь:  $\sigma$  – электрическая проводимость;  $\mu$  – магнитная проницаемость, которая в ядре Земли практически совпадает с проницаемостью в вакууме  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м.

Поскольку геодинамо – пороговое явление, и для его осуществления нужна достаточно большая типичная (или средняя) скорость  $U$ , то естественно из (1b), (1c) оценить типичную плотность тока в жидком ядре  $J_0$ , пренебрегая электрическим полем:

$$J_0 = \sigma UB_0. \quad (2)$$

Здесь  $B_0$  – типичное магнитное поле в жидком ядре.

В твердом ядре  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  и из (1a), (1b) получаем известное диффузионное уравнение:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B} / \mu\sigma). \quad (3)$$

Это уравнение имеет точное решение, которое дает наиболее медленно затухающий и потому доминирующий диполь [Parkinson, 1983; Старченко, 2011] со временем затухания:

$$\tau_i = \mu\sigma(r_i/\pi)^2. \quad (4)$$

Здесь  $r_i$  – радиус твердого ядра Земли. Подставляя (4) в (3) и аппроксимируя производные отношениями величин, получим электромагнитный масштаб в твердом ядре  $r_i/\pi$ . Подставляя этот масштаб в (1c), оценим типичную плотность тока в твердом ядре:

$$J_i = \pi B_i / (\mu r_i). \quad (5)$$

Соответственно, отношение плотностей тока в жидком (2) и твердом (5) ядре очень велико:

$$\frac{J_0}{J_i} = \mu\sigma U r_i \frac{B_0}{\pi B_i} \gg 1. \quad (6)$$

Для конкретной оценки отметим, что число магнитного Рейнольдса  $\mu\sigma U r_i$  от  $10^2$  до  $10^3$  в ядре Земли, а отношение полей  $B_0/B_i$  намного больше единицы во всех известных нам геодинамо-моделях. Поэтому далее мы пренебрегаем токами в твердом ядре, которые пренебрежимо малы (в  $10^2 \dots 10^5$  раз) по сравнению с токами в жидком ядре.

### 3. ОБЪЕМНЫЕ ТОКИ, ПОДДЕРЖИВАЮЩИЕ ГЕОМАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Исходя из симметрии задачи, направим полярную ось сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  вдоль геомагнитного диполя  $\mathbf{M}$ , представленного на рис. 1. При этом плотность тока  $\mathbf{J}$  не зависит от угла  $\varphi$  и задается нами в наипростейшем виде:

$$\mathbf{J} = \begin{cases} Gr \sin \theta \mathbf{1}_\varphi & |r \geq r_i \\ \mathbf{0} & |r < r_i \end{cases}. \quad (7)$$

Здесь  $G(t)$  – зависящий от времени  $t$  коэффициент, который нам предстоит определить, а “жирной” единицей обозначаются единичные вектора. Выбранное нами представление (7) (см. рис. 1) удовлетворяет следующему из (1c) условию  $\nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$  и естественной для любого геодинамо слабой зависимости от высоты вдоль вектора угловой скорости вращения  $\Omega$  [Starchenko, Jones, 2002; Christensen, 2010; Aubert et al., 2017].

Рассмотрим точку на оси диполя, удаленную от центра Земли на расстояние  $x$  с  $|x| > r_i$ . Осевое магнитное поле, создаваемое в этой точке тонким слоем тока радиусом  $r \sin \theta$  из жидкого ядра, согласно закону Био–Савара–Лапласа [Davidson, 2001], равно:

$$dB(x) = \mu \frac{Gr \sin \theta r^3 \sin^2 \theta dr d\theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}}. \quad (8)$$

Здесь уже проведено интегрирование по углу  $\varphi$ . Для суммарного поля  $B$  запишем:

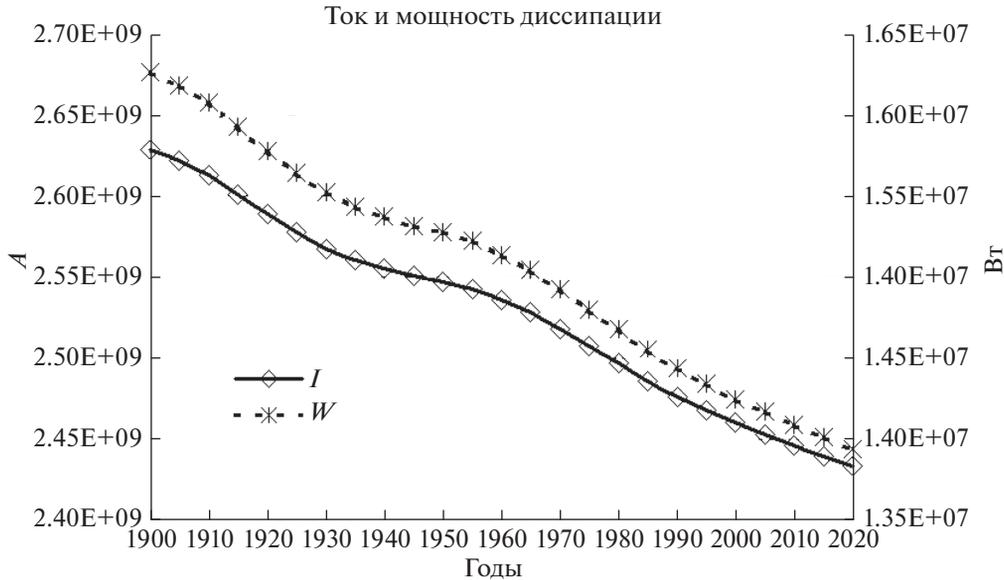


Рис. 2. Суммарный ток (левая ось) и мощность его омической диссипации (правая) для геомагнитного диполя с 1900 по 2020 гг.

$$B(x) = \mu G \int_{0 \leq \theta \leq \pi} \int_{r_i \leq r \leq r_o} \frac{r^4 \sin^3 \theta dr d\theta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta)^{3/2}}, \quad (9)$$

где  $r_i = 1220$  км и  $r_o = 3481$  км – радиусы твердого и жидкого ядер соответственно. Разложим знаменатель подынтегрального выражения (9) в ряд Тейлора по малому (для удаленных от ядра точек)  $r/|x|$ . В главном порядке этого разложения, по определению [Davidson, 2001], получим вклад чисто дипольной составляющей  $D$  в суммарное поле  $B$ :

$$D = \frac{\mu G}{x^3} \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_o} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta = \frac{4\mu G}{15x^3} (r_o^5 - r_i^5). \quad (10)$$

Для получения единственной неизвестной  $G$  приравняем наиболее достоверно определяемое в полюсе диполя у поверхности Земли ( $x = R = 6371$  км) дипольное поле к (10). И через стандартные коэффициенты Гаусса [Parkinson, 1983] получим:

$$G = 7.5R^3 \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} / [\mu (r_o^5 - r_i^5)]. \quad (11)$$

Используя находящиеся в свободном доступе IGRF коэффициенты Гаусса (см. <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>), определим  $G$  из (11) и (7) с 1900 по 2020 гг. Исходя из этих  $G$ , на рис. 2 строим физически интересный суммарный ток  $I$  через меридиональное сечение и мощность  $W$  омической диссипации во всем объеме ядра:

$$I = \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_o} Jr dr d\theta = \frac{2G}{3} (r_o^3 - r_i^3), \quad (12a)$$

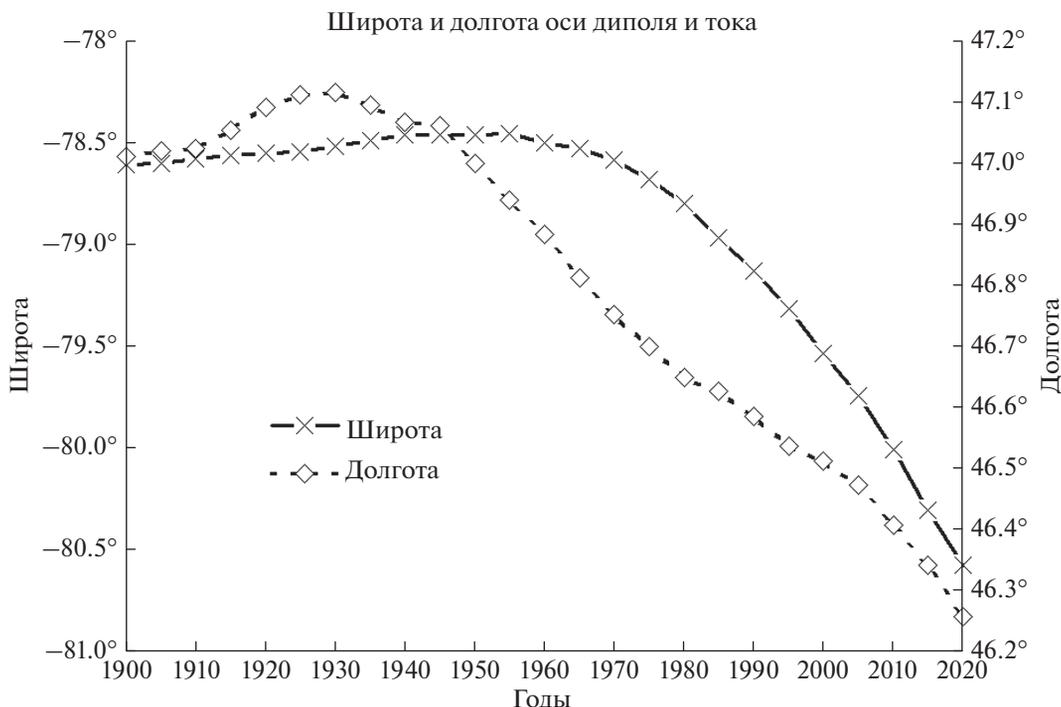
$$W = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_o} J^2 r^2 dr \sin \theta d\theta = \frac{8\pi G^2}{15\sigma} (r_o^5 - r_i^5). \quad (12b)$$

При определении мощности для всюду постоянной электрической проводимости принято компромиссное значение  $\sigma = 5 \times 10^5$  см/м [Старченко, 2011; Williams, 2018]. Также физический интерес представляет эволюция токовой оси (совпадает тут с осью диполя) по географической широте и долготе, которые представлены на рис. 3.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы получили оценку динамики токов внутри жидкого ядра Земли из простейших соображений, основываясь на сравнении поля, создаваемого объемно-распределенными токами с земным диполем. Наша *объемная* оценка является, насколько нам известно, новой в плане общей теории и учебной методики, будучи хотя и достаточно частной, надеемся, важной, для геомагнетизма.

Возможно, впервые в мировой практике, из общефизических и математически обоснованных порядковых оценок, мы установили весьма существенное (суммарно от  $\sim 10^2$ ) доминирование величин токов в жидком ядре Земли над токами в твердом ядре. Таким образом, вкладом токов твердого ядра в создаваемое геомагнитное поле можно пренебречь. И хотя это обстоятельство представляется несколько самоочевидным, но мы, надеемся, впервые, обосновали его из самых общих соображений и получили численные оценки, которые могут быть полезны не только для



**Рис. 3.** Широта (левая ось) и долгота (правая) в градусах для положения полюса оси тока и поддерживаемого им геомагнитного диполя с 1900 по 2020 гг.

геодинамо, но и как для динамо планет, так и для МГД-динамо быстро вращающихся звезд. Еще раз подчеркнем, что, насколько нам известно, такая оценка из первых принципов проведена нами впервые, хотя в численных деталях и потому всегда частных моделях это обстоятельство используется не только широко, но и было неоднократно доказано.

Сравнительно элементарными методами получены новые явные формулы, позволяющие непосредственно сравнивать наблюдаемые значения поля земного диполя и поля, создаваемого токами жидкого ядра. Несмотря на то, что распределение токов выбрано достаточно простым, сам наш новый подход, очевидно, применим более широко — для любой разумной зависимости плотности токов от радиуса можно провести аналогичное рассмотрение.

Несмотря на то, что рассмотренная модель не учитывает сложного пространственного распределения (как, например, в работе [Glatzmaier, Roberts, 1995]), она позволяет получить оценку токов, дающих главный вклад в наблюдаемое магнитное поле Земли. Таким образом, мы не обсуждали здесь собственно механизм геодинамо, но оценили динамику плотности токов и изучили движение оси геодиполя в нашем приближении за последние сто лет. Вместе с тем из бурно развивающейся численной теории геодинамо нами явно использован ее основополагающий тезис о том,

что наблюдаемая дипольная конфигурация доминирует над остальными мультиполями вплоть до границы с ядром Земли. Поэтому мы сосредоточились только на тех токах, которые дают непосредственно наблюдаемый геомагнитный диполь, а практически все остальные геодинамо-токи, в этом плане, принципиально ненаблюдаемые, хотя и могут доминировать в глубине жидкого ядра.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Эта работа была преимущественно выполнена по госбюджетной тематике ИЗМИРАН.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Мы глубоко признательны анонимному рецензенту за существенные и конструктивные замечания, которые мы использовали для значительного улучшения этой статьи в плане обсуждения ее результатов и более яркого представления их новизны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Зидаров Д., Бочев А.* Представление вековых вариаций магнитного поля Земли как изменение поля оптимальных геомагнитных диполей // Геомагнетизм и Аэрономия. 1969. Т. 9. № 2. С. 315–320.  
*Старченко С.В., Ботвиновский В.В.* Азимутальные токи и палеомагнитные уровни // Физика Земли. 2003. № 5. С. 85–93.

- Старченко С.В.* Гармонические источники главного геомагнитного поля // Геомагнетизм и Аэронавигация. 2011. Т. 51. № 3. С. 412–418.
- Allredge L.R.* Current loops fitting to geomagnetic model spherical harmonic coefficients // Geomag. Geoelectr. 1987. V. 39. № 5. P. 271–296.
- Aubert J. et al.* Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime // J. Fluid Mech. 2017. V. 813. P. 558–593.
- Christensen U.R.* Dynamo Scaling Laws and Applications to the Planets // Space Sci Rev. 2010. V. 152. P. 565–590.
- Davidson P.A.* An Introduction to Magnetohydrodynamics. Cambridge University Press. 2001.
- Demina I.M. et al.* Field of volume current systems on the Earth's surface and near the core-mantle boundary. Proceedings of the 11th Intl School and Conference "Problems of Geocosmos". (Oct. 03–07.2016. St. Petersburg, Russia). 2016. P. 30–36.
- McNish A.G.* Physical representations of the geomagnetic field // Trans. Amer. Geophys. Union. 1940. V. 21. P. 287–291.
- Parkinson U.* Introduction to Geomagnetism, Edinburgh: Scottish Acad. Press. 1983.
- Peddie N.W.* Current loop models of the Earth's magnetic field // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 4517–4523.
- Starchenko S.V.* Analytic base of geodynamo-like scaling laws in the planets, geomagnetic periodicities and inversions // Geomagnetism and Aeronomy. 2014. V. 54. № 6. P. 694–701.
- Starchenko S.V., Jones C.A.* Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors // Icarus. 2002. V. 157. P. 426–435.
- Stum D.R., Pollack G.L.* A current sheet model for the Earth's magnetic field // Am. J. Phys. 1998. V. 66. P. 802–810.
- Williams Q.* The Thermal Conductivity of Earth's Core: A Key Geophysical Parameter's Constraints and Uncertainties // Annu. Rev. Earth Planet. Sci. 2018. V. 46. <https://doi.org/10.1146/annurev-earth-082517-010154>

## Volume Currents of the Present-Day Magnetic Dipole in the Earth's Core

S. V. Starchenko<sup>a,\*</sup> and A. Yu. Smirnov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840 Russia*

*\*e-mail: sstarchenko@mail.ru*

Perhaps for the first time, we have obtained the distributed volume electric currents determined by the observed geomagnetic dipole. To do this, based on the Maxwell's equations and the well-established geodynamo estimates, we have shown that the average current density in the liquid core of the Earth is several orders of magnitude higher than in the solid core. Correspondingly, our model current density vanishes in the solid core whereas in the liquid core, from the maximally realistic simplifications, it is proportional to the distance to the dipole axis and directed around this axis. Using standard expansions, integrations, and the generally accepted IGRF model, we obtained the total currents, the associated ohmic dissipation powers, the volume current densities, and the directions of the current axis oriented as a dipole pole from 1900 to 2020.

*Keywords:* distributed volumetric electric currents, liquid core, solid core, model current density