

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ И ВНЕ ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОГО МАГНЕТИКА ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ В ОБЛАСТИ МАГНЕТИКА ПОЛЕ

© 2022 г. В.В. Дякин^{1,*}, О.В. Кудряшова^{1,*}, В.Я. Раевский^{1,**}

*¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,
Россия 620137 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **ravskii@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.01.2022; после доработки 01.02.2022

Принята к публикации 01.02.2022

Рассмотрена прямая задача магнитостатики — вычисление напряженности результирующего магнитного поля внутри и вне однородного магнетика в форме произвольного эллипсоида, помещенного в область однородности внешнего магнитного поля. Приведены конечные формулы для расчета указанной напряженности, содержащие элементарные функции или неполные эллиптические интегралы. Из них получены формулы напряженности для «предельных» случаев магнетика указанной формы: пластина конечной толщины, бесконечный круговой цилиндр и цилиндр с эллиптическим поперечным сечением, шар. Проведено сравнение с рядом известных формул для этих случаев.

Ключевые слова: основное уравнение магнитостатики, прямая задача, эллипсоидальный магнетик, магнитный неразрушающий контроль.

DOI: 10.31857/S0130308222020051

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма, например, задач неразрушающего магнитного контроля, актуальной является проблема создания и программной реализации алгоритмов аналитического или численного решения задач магнитостатики по вычислению напряженности результирующего поля применительно к магнитным телам различной формы, помещенным во внешнее магнитное поле. Решение этой проблемы развивается в двух направлениях. Прежде всего, расширяется круг задач (в смысле усложнения геометрии исследуемых магнетиков, характера их магнитной проницаемости, конфигурации внешнего поля), для которых получены либо точные аналитические формулы вычисления указанной напряженности, либо предложены численно-аналитические алгоритмы, дающие ответ с контролируемой задаваемой точностью. Но круг таких задач пока еще недостаточно широк и исчерпывается, в основном, конфигурациями однородных и изотропных магнетиков идеальных геометрических форм с идеальными же формами дефектов в них. Во многих же реальных задачах геометрия исследуемых магнетиков и/или характер их магнитной проницаемости достаточно сложны и не поддаются пока решению указанными аналитическими или численно-аналитическими методами. Поэтому в последнее время бурное развитие получило создание так называемых универсальных пакетов программ (типа ANSYS или ELCUT), реализующих численный метод конечных элементов. Главное преимущество таких программных продуктов — их универсальность в плане *формальной* возможности применения к самому широкому кругу магнитостатических задач, возникающих для описания полей от магнетиков практически произвольной формы с достаточно общими типами линейной и нелинейной связи в материальных соотношениях. Однако практическое применение таких пакетов программ таит в себе множество подводных камней, подробному описанию которых посвящена работа [1]. Отдельно отметим основной их недостаток — существенная субъективность выбора многочисленных входных параметров и отсутствие в большинстве случаев сколько-нибудь полного представления о величине погрешности полученных результатов, без которого ценность применения таких программ становится весьма сомнительной. Основным же достоинством программ, реализующих аналитические методы решения, является полный контроль величины погрешности результата и возможность ее регулирования за счет изменения числовых параметров программы. Это то достоинство, отсутствие которого, как отмечено, является главным недостатком универсальных пакетов программ.

Выходом, на наш взгляд, является комбинированное использование указанных двух подходов в том направлении, чтобы достоинства программ, реализующих точные методы решения, в возможной мере помогли нивелировать основные недостатки пакетов универсальных программ. Для

каждой реальной задачи желательно найти из имеющейся уже достаточно широкой базы по возможности наиболее близкую к ней (по форме и конфигурации магнетиков, их физическим параметрам), для которой имеется программа, реализующая алгоритм решения с гарантированной точностью результата. После этого задать используемому универсальному пакету геометрические и физические параметры именно этой вспомогательной задачи (для которой получены результаты с гарантированной точностью) и подбирать стратегии и многочисленные субъективные параметры универсального пакета именно из критерия наибольшего совпадения с полученными точными результатами. Затем, определив таким образом оптимальную стратегию и оптимальные субъективно задаваемые универсальному пакету параметры, получить представление о точности получаемых при этом результатов. Потом в этой стратегии и с этими параметрами запустить универсальную программу для реальной задачи. И тогда можно хотя бы на уровне правдоподобия говорить о точности получаемого при этом результата.

В связи со сказанным встает актуальная задача — получить как можно более обширную базу точно решаемых задач для как можно большего разнообразия форм магнетика и его физических параметров, имеющих самостоятельное практическое применение, а также для того, чтобы была возможность найти среди них наиболее близкую для более сложной реальной задачи, которая в эту базу пока не входит. В этом направлении уже проделана большая работа (см., например, [2—9]), которая, несомненно, должна и будет продолжаться. Этому же посвящена и данная статья.

Достаточно благоприятным в этом отношении объектом исследования является однородный магнетик в форме произвольного эллипсоида, помещенный в область однородности внешнего поля. Одним из достоинств такой модели является конечность размеров такого магнетика (в большинстве точные решения удавалось получить для объектов с теми или иными бесконечными геометрическими размерами), а также наличие большого числа степеней свободы расположения и размеров такого объекта (координаты центра эллипсоида, размеры его полуосей и параметры углов, определяющих направления ориентации в пространстве). Это позволяет с той или иной степенью точности аппроксимировать таким магнетиком многие реальные объекты, имеющих подобную асимметрию формы, произвольное расположение и ориентацию в пространстве. Другим достоинством такой модели является возможность получения точных формул результирующей напряженности в конечном виде, содержащих лишь элементарные либо некоторые специальные функции. В настоящей работе на основе так называемого основного уравнения магнитостатики получены формулы упомянутого вида для напряженности результирующего поля как внутри, так и вне произвольного эллипсоидального магнетика, а также аналогичные формулы для предельных случаев — бесконечной пластины конечной толщины и бесконечно длинного цилиндра как с круговым, так и с эллипсоидальным поперечным сечением. Эти формулы, собранные в одной работе, могут служить как справочным материалом, так и для решения соответствующих задач с подходящими реальными объектами, а также для предложенного выше подхода определения погрешности работы универсальных пакетов программ.

2. ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для решения прямых и обратных задач магнитостатики мы исходим из так называемого основного уравнения магнитостатики [10, с. 16], которое в случае однородного магнетика с постоянной магнитной проницаемостью μ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus S. \quad (1)$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [10, с. 17], [11, с. 149]) и связывает искомую напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_1(\mathbf{r}), H_2(\mathbf{r}), H_3(\mathbf{r})\}$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (не лежащей на границе магнетика) с напряженностью $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_1^0(\mathbf{r}), H_2^0(\mathbf{r}), H_3^0(\mathbf{r})\}$ заданного поля внешнего источника. В данном уравнении Ω есть область в пространстве R^3 , ограниченная поверхностью S и занятая исследуемым магнетиком с заданной постоянной магнитной проницаемостью $\mu := \mu_i / \mu_e$, где μ_i — относительная магнитная проницаемость магнетика, а μ_e — относительная магнитная

проницаемость внешней среды. Для нахождения из уравнения (1) напряженности результирующего поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ как внутри магнетика (в этом случае будем обозначать ее $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r})$), так и вне его (будем обозначать $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r})$), поступают следующим образом. Полагая в (1) $\mathbf{r} \in \Omega$, получают интегро-дифференциальное уравнение для поля $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри магнетика:

$$\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2)$$

После решения этого уравнения относительно $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r})$ в (1) полагают $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$ и получают прямую формулу для вычисления результирующего поля $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r})$ вне магнетика:

$$\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (3)$$

В настоящей работе рассматривается магнетик в форме эллипсоида с границей

$$S: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Будем предполагать, что магнетик помещен в область однородности внешнего поля, т.е.:

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{H}}^0 := \{\bar{H}_1^0, \bar{H}_2^0, \bar{H}_3^0\}, \quad \bar{H}_1^0, \bar{H}_2^0, \bar{H}_3^0 = \text{const}, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (5)$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые формулы, связанные объемным потенциалом эллипсоида, приведенные в следующем разделе.

3. НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЛИПСОИДА

Рассмотрим объемный потенциал с единичной плотностью:

$$W(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r} \in R^3, \quad (6)$$

где Ω — эллипсоид с границей (4). Справедлива формула [12, с. 482 с опечаткой: $\Gamma\left(\frac{n}{2} - p - 1\right)$ нужно заменить на $\Gamma\left(\frac{n}{2} - p\right)$], [10, с. 60]:

$$W(\mathbf{r}) = \pi abc \int_u^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\sqrt{R(s)}}, \quad (7)$$

где

$$R(s) \equiv R(s; a, b, c) := (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s), \quad (8)$$

а $u = u(x, y, z)$ определяется следующим образом: $u = 0$ для $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \bar{\Omega}$, а для $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$ число u равно (единственному, см. [13]) положительному корню уравнения (сводящегося к кубическому в общем случае эллипсоида не вращения):

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1. \quad (9)$$

Выражение (7) удобно записать в виде:

$$W(\mathbf{r}) = A_0 + Ax^2 + By^2 + Cz^2, \quad (10)$$

где

$$A_0 = \pi abc J(u; a, b, c), \quad (11)$$

$$A = -\pi abcI(u; a, b, c), \quad B = -\pi abcI(u; b, a, c), \quad C = -\pi abcI(u; c, a, b), \quad (12)$$

$$J(u; a, b, c) := \int_u^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}}, \quad I(u; a, b, c) := \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R(s)}}. \quad (13)$$

Для $u = 0$ выполняется свойство $A + B + C = -2\pi$ (см. [14, с.42]).

Все окончательные аналитические выражения упомянутых напряженностей результирующего поля внутри и вне эллипсоидального магнетика будут выражены через функции вида $J(u; a, b, c)$ и $I(u; a, b, c)$ в (13). Поэтому в данном разделе собраны формулы для вычисления этих функций, которые содержат либо неполные эллиптические интегралы 1 и 2 рода, либо (в случае эллипсоида вращения и шара) только элементарные функции.

Прежде всего отметим, что

$$I(u; a, b, c) = I(u; a, c, b), \quad (14)$$

поэтому разница в формулах для вычисления $I(u; a, b, c)$ определяется только тем, какое число из a, b и c стоит первым после u : самое большое из них, среднее или самое меньшее.

Рассмотрим случай, когда среди полуосей эллипсоида a, b и c нет равных, т.е. S — не эллипсоид вращения. Без ограничения общности можно считать, что $a > b > c$. Тогда [15, с. 161], [12, с. 51]:

$$J(u; a, b, c) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\varphi, k), \quad (15)$$

$$I(u; a, b, c) = \frac{2}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - c^2}} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)], \quad (16)$$

$$I(u; b, a, c) = \frac{2\sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[E(\varphi, k) - \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} F(\varphi, k) - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \sqrt{\frac{c^2 + u}{(a^2 + u)(b^2 + u)}} \right], \quad (17)$$

$$I(u; c, a, b) = \frac{2}{(b^2 - c^2)\sqrt{a^2 - c^2}} \left[\sqrt{a^2 - c^2} \sqrt{\frac{b^2 + u}{(a^2 + u)(c^2 + u)}} - E(\varphi, k) \right], \quad (18)$$

где неполные эллиптические интегралы 1 и 2 рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} \, ds, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + u}}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Рассмотрим случай эллипсоида вращения, когда только две полуоси эллипсоида совпадают. В этом случае функции в (13) (а потому и значения объемного потенциала эллипсоида (6) внутри и вне его) выражаются в конечном виде через элементарные функции. Без ограничения общности считаем, что $a = b \neq c$. В этом случае для $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$ используемый в предыдущих формулах корень u уравнения (9) выражается в явном виде [10, с. 64]:

$$u = \frac{1}{2} \left[x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - z^2 - a^2 + c^2)^2 + 4z^2(x^2 + y^2)} \right]. \quad (19)$$

Отметим, что если в эллипсоиде вращения $b = c \neq a$ или $a = c \neq b$, то в (19) меняются не только a, b и c , но и соответствующим образом x, y и z . В случае равенства двух из трех полуосей a, b и c вид выражений для $J(u; a, b, c)$ и $I(u; a, b, c)$ зависит от того, на каком месте в этих обозначениях

стоит отличный от двух других параметр, а также от того, больше он или меньше двух равных параметров. Непосредственным интегрированием в (13) с использованием справочника [12] можно убедиться в справедливости ниже выписанных формул.

В случае $c > a$:

$$J(u; a, a, c) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{u + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{u + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}},$$

$$I(u; a, a, c) = \frac{\sqrt{u + c^2}}{(c^2 - a^2)(u + a^2)} + \frac{1}{2(c^2 - a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{u + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{u + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}}, \quad (20)$$

$$I(u; c, a, a) = -\frac{2}{(c^2 - a^2)\sqrt{u + c^2}} - \frac{1}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{u + c^2} - \sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{u + c^2} + \sqrt{c^2 - a^2}}. \quad (21)$$

В случае $c < a$:

$$J(u; a, a, c) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{u + c^2}},$$

$$I(u; a, a, c) = \frac{1}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{u + c^2}} - \frac{\sqrt{u + c^2}}{(a^2 - c^2)(u + a^2)}, \quad (22)$$

$$I(u; c, a, a) = -\frac{2}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{u + c^2}} + \frac{2}{(a^2 - c^2)\sqrt{u + c^2}}. \quad (23)$$

Наиболее простые формулы получаются для шарового магнетика радиуса R ($a = b = c = R$). В этом случае соответствующие интегралы легко вычисляются:

$$J(u; R, R, R) = \frac{2}{\sqrt{u + R^2}}, \quad I(u; R, R, R) = \frac{2}{3(u + R^2)^{3/2}}, \quad (24)$$

а для потенциала шара из (10), (12) и (19) получаем известные формулы:

$$W(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{3}(3R^2 - r^2), \quad r < R; \quad W(\mathbf{r}) = \frac{4\pi R^3}{3r}, \quad r > R; \quad r := |\mathbf{r}|.$$

4. ПОЛЕ ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА

Как известно [16, с. 338], если внешнее поле удовлетворяет условию (5), то результирующее поле внутри однородного эллипсоидального магнетика постоянно. Получим этот результат, а также конкретные значения напряженности этого поля в удобной для дальнейшего исследования форме, исходя из уравнения (2). Вводя обозначение:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in R^3, \quad (25)$$

запишем это уравнение в виде:

$$\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{H}}^0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (26)$$

Будем искать решение уравнения (26) в виде постоянного вектора:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \{H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, H_3^{(i)}\}, \quad H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, H_3^{(i)} = \text{const.} \quad (27)$$

В этом случае $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ в (25) имеет вид:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r})\mathbf{H}^{(i)}, \quad (28)$$

где объемный потенциал эллипсоида $W(\mathbf{r})$, определенный в (6), вычисляется по формуле (10), а коэффициенты A_0, A, B, C для $\mathbf{r} \in \Omega$ суть константы, определяемые по формулам (11)—(13) при $u = 0$. Подставляя (27) в уравнение (26) и учитывая, что для случая (28), (27) будет $\nabla \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \{2AH_1^{(i)}, 2BH_2^{(i)}, 2CH_3^{(i)}\}$, получим, что решением уравнения (26) будет постоянный вектор (27), компоненты которого вычисляются по формулам:

$$H_1^{(i)} = \frac{\bar{H}_1^0}{1 - \frac{\mu-1}{2\pi}A}, \quad H_2^{(i)} = \frac{\bar{H}_2^0}{1 - \frac{\mu-1}{2\pi}B}, \quad H_3^{(i)} = \frac{\bar{H}_3^0}{1 - \frac{\mu-1}{2\pi}C}. \quad (29)$$

Из свойства единственности решения уравнения (2) (см. [11, с. 160], [17]) следует, что других решений у уравнения (26) нет. Для дальнейших целей удобнее записать формулы (29) с учетом выражения (12) для A, B, C :

$$H_1^{(i)} = \frac{\bar{H}_1^0}{1 + dI(0; a, b, c)}, \quad H_2^{(i)} = \frac{\bar{H}_2^0}{1 + dI(0; b, a, c)}, \quad H_3^{(i)} = \frac{\bar{H}_3^0}{1 + dI(0; c, a, b)}, \quad (30)$$

где $d := 0,5(\mu-1)abc$, а выражения для $I(u; a, b, c)$ через неполные эллиптические интегралы или элементарные функции (для разных типов соотношения между полуосями эллипсоида) приведены в (15)—(18), (20)—(24). Отметим, что для случая эллипсоида вращения $a = b \neq c$ формулы (30) приводят к тем же выражениям, что и в [16, с. 339], а для шара ($a = b = c$) получаем известную формулу [18, с. 207], [19, с. 245]:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{3}{\mu+2} \bar{\mathbf{H}}^0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (31)$$

5. ПОЛЕ ВНЕ ЭЛЛИПСОИДА

Обратимся к вычислению напряженности результирующего поля $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \{H_1^{(e)}(\mathbf{r}), H_2^{(e)}(\mathbf{r}), H_3^{(e)}(\mathbf{r})\}$ вне эллипсоида, которая, согласно (3), вычисляется по формуле:

$$\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \frac{\mu-1}{4\pi} \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (32)$$

где введено обозначение

$$\psi(\mathbf{r}) := \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (33)$$

вектор-функция $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, определенная в (25), представляется в виде (28), а компоненты постоянного вектора $\mathbf{H}^{(i)}$ вычисляются по формулам (30). Из (33) и (28) следует:

$$\psi(\mathbf{r}) = H_1^{(i)} W'_x(\mathbf{r}) + H_2^{(i)} W'_y(\mathbf{r}) + H_3^{(i)} W'_z(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Найдем выражения для частных производных в (34). Учитывая формулу [20, с. 667] для производной от интеграла, зависящего от параметров, из (7) получаем:

$$W'_x(\mathbf{r}) = \pi abc \left[-2x \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R(s)}} - u'_x \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right) \frac{1}{\sqrt{R(u)}} \right], \quad (35)$$

где $u \equiv u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ — указанный выше корень уравнения (9) для случая $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$, а потому выражение в круглых скобках в (35) обращается в ноль, т.е.:

$$W'_x(\mathbf{r}) = -2\pi abc x \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R(s)}}.$$

Аналогичные формулы получаются для $W'_y(\mathbf{r})$ и $W'_z(\mathbf{r})$, а потому из (34):

$$\psi(\mathbf{r}) = -2\pi abc \left[H_1^{(i)} x \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R(s)}} + H_2^{(i)} y \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{R(s)}} + H_3^{(i)} z \int_u^{+\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)\sqrt{R(s)}} \right]. \quad (36)$$

Найдем выражение для первой компоненты $H_1^{(e)}(\mathbf{r})$ напряженности $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r})$. Из (32) следует:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}) + \frac{\mu - 1}{4\pi} \psi'_x(\mathbf{r}). \quad (37)$$

Вычисляя производную $\psi'_x(\mathbf{r})$ из (36), получаем:

$$\psi'_x(\mathbf{r}) = -2\pi abc \left[H_1^{(i)} I(u; a, b, c) - \frac{u'_x}{\sqrt{R(u)}} \left(\frac{x H_1^{(i)}}{a^2 + u} + \frac{y H_2^{(i)}}{b^2 + u} + \frac{z H_3^{(i)}}{c^2 + u} \right) \right]. \quad (38)$$

Согласно (9), функция $u = u(x, y, z)$ задается неявно как (единственный) положительный корень уравнения $F(u; x, y, z) = 0$, где

$$F(u; x, y, z) := \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1.$$

Учитывая формулу для производной неявной функции [21, с. 462], получим:

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{2x}{(a^2 + u)G(u; x, y, z)}, \quad (39)$$

где

$$G(u; x, y, z) := \left(\frac{x}{a^2 + u} \right)^2 + \left(\frac{y}{b^2 + u} \right)^2 + \left(\frac{z}{c^2 + u} \right)^2. \quad (40)$$

Подставляя u'_x из (39) в (38), имеем

$$\psi'_x(\mathbf{r}) = -2\pi abc \left[H_1^{(i)} I(u; a, b, c) - \frac{x}{a^2 + u} Q(u; x, y, z) \right], \quad (41)$$

где для краткости обозначено:

$$Q(u; x, y, z) := \frac{2}{G(u; x, y, z)\sqrt{R(u)}} \left(\frac{H_1^{(i)} x}{a^2 + u} + \frac{H_2^{(i)} y}{b^2 + u} + \frac{H_3^{(i)} z}{c^2 + u} \right). \quad (42)$$

Подставляя $\psi'_x(\mathbf{r})$ из (41) в (37), получаем окончательную формулу для первой компоненты напряженности результирующего поля:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[H_1^{(i)} I(u; a, b, c) - \frac{x}{a^2 + u} Q(u; x, y, z) \right]. \quad (43)$$

Аналогично выводятся формулы для второй и третьей компоненты напряженности результирующего поля вне эллипсоида $\mathbf{r} = (x, y, z) \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$H_2^{(e)}(\mathbf{r}) = H_2^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[H_2^{(i)}I(u; b, a, c) - \frac{y}{b^2 + u} Q(u; x, y, z) \right], \quad (44)$$

$$H_3^{(e)}(\mathbf{r}) = H_3^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mu - 1)abc \left[H_3^{(i)}I(u; c, a, b) - \frac{z}{c^2 + u} Q(u; x, y, z) \right]. \quad (45)$$

В (43) — (45) компоненты напряженности $H_1^{(i)}$, $H_2^{(i)}$, $H_3^{(i)}$ вычисляются по (30).

6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Полученные формулы для напряженности поля от однородного эллипсоидального магнетика внутри и вне его позволяют получить аналогичные формулы для предельных форм магнетика: бесконечной пластины конечной высоты, бесконечно длинного кругового цилиндра или с эллиптическим поперечным сечением, а также для шарового магнетика. Совпадение получаемых при этом результатов с теми, которые известны из литературы, подтверждает правильность исходных формул.

Рассмотрим однородный магнетик, занимающий область Ω между двумя параллельными плоскостями с уравнениями $z = c$ и $z = -c$ (бесконечная пластина конечной высоты), помещенный во внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ с условием (5). Форма такой пластины является предельным случаем эллипсоида вращения с полуосями $a = b > c$ при $a \rightarrow +\infty$. Перейдем к такому пределу в полученных формулах для поля эллипсоида.

Для нахождения поля внутри пластины перейдем к пределу $a \rightarrow +\infty$ в формулах (30) с учетом $u = 0$ в (22) и (23) для этого случая. Переходя к такому пределу, получаем для соответствующего фрагмента формул в (30), что $\lim_{a \rightarrow +\infty} dI(0; a, a, c) = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} dI(0; c, a, a) = \mu - 1$, а потому из (30) напряженность $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r})$ результирующего поля внутри пластины оказывается постоянной с компонентами:

$$H_1^{(i)} = \bar{H}_1^0, \quad H_2^{(i)} = \bar{H}_2^0, \quad H_3^{(i)} = \frac{1}{\mu} \bar{H}_3^0. \quad (46)$$

Для получения формул поля вне пластины необходимо перейти к пределу $a \rightarrow +\infty$ в формулах (43)—(45) для случая $a = b > c$. Учитывая легко выводимую формулу $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(\alpha - x)^2 + \beta} - x) = -\alpha$, из (19) получаем предельное значение для $u = u(x, y, z)$:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u = z^2 - c^2. \quad (47)$$

Из (42) с учетом (40), (8) и (47), а также из (22) и (23) имеем:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 Q(u; x, y, z) = \frac{2z}{|z|} H_3^{(i)}, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 I(u; a, a, c) = 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 I(u; c, a, a) = \frac{2}{|z|}.$$

Переходя к пределу $a \rightarrow +\infty$ в (43)—(45) с учетом этих соотношений, получаем формулы для напряженности результирующего поля вне пластины:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}), \quad H_2^{(e)}(\mathbf{r}) = H_2^0(\mathbf{r}), \quad H_3^{(e)}(\mathbf{r}) = H_3^0(\mathbf{r}). \quad (48)$$

Таким образом, $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, т.е. результирующее поле вне пластины совпадает с внешним полем. Таким образом, напряженность результирующего поля внутри и вне пластины вычисляется по формулам (46) и (48).

Рассмотрим однородный магнетик, занимающий область Ω в форме бесконечно длинного кругового цилиндра с радиусом поперечного сечения a , помещенный во внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ с условием (5). Такой цилиндр является предельным случаем эллипсоида вращения с полуосями $a = b < c$ при $c \rightarrow +\infty$. Для нахождения поля внутри цилиндра перейдем к такому пределу в формулах (30) с учетом $u = 0$ в (20) и (21) для этого случая. При $c \rightarrow +\infty$ получаем для соответствующего фрагмента формул в (30), что $\lim_{c \rightarrow +\infty} dI(0; a, a, c) = \frac{1}{2}(\mu - 1)$, $\lim_{c \rightarrow +\infty} dI(0; c, a, a) = 0$, а потому из (30) компоненты постоянной напряженности $\mathbf{H}^{(i)}$ результирующего поля внутри бесконечного кругового цилиндра имеют вид:

$$H_1^{(i)} = \frac{2}{1+\mu} \bar{H}_1^0, \quad H_2^{(i)} = \frac{2}{1+\mu} \bar{H}_2^0, \quad H_3^{(i)} = \bar{H}_3^0, \quad (49)$$

что согласуется с формулами в [16, с. 339].

Для получения формул поля вне бесконечного кругового цилиндра необходимо перейти к пределу $c \rightarrow +\infty$ в формулах (43)—(45) для случая $a = b < c$. Из (19) получаем предельное значение для $u = u(x, y, z)$:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} u = x^2 + y^2 - a^2. \quad (50)$$

Из (42), (20) и (21) с учетом (50) имеем:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} cQ(u; x, y, z) = \frac{2(H_1^{(i)}x + H_2^{(i)}y)}{x^2 + y^2},$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} cI(u; a, a, c) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} cI(u; c, a, a) = 0.$$

Переходя к пределу $c \rightarrow +\infty$ в (43)—(45) с учетом этих соотношений и предельных значений напряженности внутри кругового цилиндра (49), получаем после некоторых тождественных преобразований формулы для напряженности результирующего поля вне бесконечного кругового цилиндра $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}) + \frac{\lambda a^2}{(x^2 + y^2)^2} [\bar{H}_1^0(x^2 - y^2) + 2\bar{H}_2^0xy], \quad (51)$$

$$H_2^{(e)}(\mathbf{r}) = H_2^0(\mathbf{r}) + \frac{\lambda a^2}{(x^2 + y^2)^2} [2\bar{H}_1^0xy + \bar{H}_2^0(y^2 - x^2)], \quad (52)$$

$$H_3^{(e)}(\mathbf{r}) = H_3^0(\mathbf{r}), \quad \lambda := \frac{\mu - 1}{\mu + 1}. \quad (53)$$

Для случая поперечного внешнего поля формулы (51)—(53) приводят к формулам в [19, с. 245].

Напряженность поля внутри шарового магнетика радиуса R ($a = b = c = R$) вычисляется по формуле (31). Получим формулы для напряженности поля вне такого магнетика из общих формул (43)—(45). Из (19) выводим, что в этих формулах $u = r^2 - R^2$, где $r := |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда из (24), (40), (8), (31), (42) получим:

$$I(u; R, R, R) = \frac{2}{3r^3}, \quad G(u; x, y, z) = \frac{1}{r^2}, \quad R(u) = r^6,$$

$$Q(u; x, y, z) := \frac{6(\bar{H}_1^0x + \bar{H}_2^0y + \bar{H}_3^0z)}{(\mu + 2)r^3}.$$

Подставляя эти значения в (43)—(45), получаем формулы для напряженности поля вне шарового магнетика $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}) - \frac{(\mu - 1)R^3}{(\mu + 2)r^3} \left[\bar{H}_1^0 - \frac{3x}{r^2} (\bar{H}_1^0x + \bar{H}_2^0y + \bar{H}_3^0z) \right], \quad (54)$$

$$H_2^{(e)}(\mathbf{r}) = H_2^0(\mathbf{r}) - \frac{(\mu - 1)R^3}{(\mu + 2)r^3} \left[\bar{H}_2^0 - \frac{3y}{r^2} (\bar{H}_1^0x + \bar{H}_2^0y + \bar{H}_3^0z) \right], \quad (55)$$

$$H_3^{(e)}(\mathbf{r}) = H_3^0(\mathbf{r}) - \frac{(\mu - 1)R^3}{(\mu + 2)r^3} \left[\bar{H}_3^0 - \frac{3z}{r^2} (\bar{H}_1^0x + \bar{H}_2^0y + \bar{H}_3^0z) \right]. \quad (56)$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами в [19, с. 245].

Рассмотрим однородный магнетик, занимающий область Ω в форме бесконечного цилиндра с эллипсоидальным поперечным сечением и осью вдоль координатной оси z , помещенный во внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ с условием (5). Граница сечения Γ такого цилиндра плоскостью $z = 0$ есть эллипс с уравнением:

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (57)$$

Для определенности будем считать $a > b$ (но, как будет показано, полученные при таком предположении формулы для результирующей напряженности окажутся верными и в случае $a < b$). Такой цилиндр является предельным случаем эллипсоида вращения с граничной поверхностью S в (4) и полуосями $c > a > b$ при $c \rightarrow +\infty$.

Для нахождения первой компоненты $H_1^{(i)}$ напряженности поля внутри цилиндра перейдем к такому пределу в первой формуле (30). Для его вычисления найдем предельное значение выражения $cI(0; a, b, c)$. Из формулы (17) (при соответствующей замене в ней $a \rightarrow c$, $b \rightarrow a$, $c \rightarrow b$) с учетом $u = 0$ и свойства (14) имеем:

$$cI(0; a, b, c) \equiv cI(0; a, c, b) = \frac{2c\sqrt{c^2 - b^2}}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left[E(\varphi, k) - \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} F(\varphi, k) - \frac{b(c^2 - a^2)}{ac\sqrt{c^2 - b^2}} \right],$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}, \quad k = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}}. \quad (58)$$

При $c \rightarrow +\infty$ будет $\varphi \rightarrow \pi/2$, $k \rightarrow 1$, а потому при переходе к такому пределу в выражении $cI(0; a, b, c)$ из (58) нетривиальная неопределенность может возникнуть только при нахождении предела выражения вида $F(\varphi, k)/c^2$. Для вычисления такого предела воспользуемся очевидным неравенством:

$$0 \leq F(\varphi, k) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} =: K(k), \quad (59)$$

а также асимптотикой для полного эллиптического интеграла $K(k)$ при $k \rightarrow 1$ [22, с. 112]:

$$K(k) \sim \ln(4/k'), \quad k' := \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \Rightarrow K(k) \sim \ln c.$$

Поэтому из (59) получаем, что при $c \rightarrow +\infty$ будет $F(\varphi, k)/c^2 \rightarrow 0$. Переходя с учетом этого к такому пределу в (58), имеем:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} cI(0; a, b, c) = \frac{2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b}{a} \right) = \frac{2}{a(a + b)}.$$

Тогда переходя к пределу $c \rightarrow +\infty$ в первой формуле (30), получаем следующую формулу для первой компоненты $H_1^{(i)}$ напряженности поля внутри эллипсоидального цилиндра:

$$H_1^{(i)} = \frac{a + b}{a + \mu b} \bar{H}_1^0. \quad (60)$$

Аналогично, переходя к пределу $c \rightarrow +\infty$ во второй и третьей формуле в (30), получаем следующие формулы для второй и третьей компоненты напряженности поля внутри эллипсоидального цилиндра:

$$H_2^{(i)} = \frac{a + b}{b + \mu a} \bar{H}_2^0, \quad H_3^{(i)} = \bar{H}_3^0. \quad (61)$$

Для получения формул напряженности результирующего поля вне бесконечного эллипсоидального цилиндра необходимо перейти к пределу $c \rightarrow +\infty$ в формулах (43)–(45). Предельное значение (единственного) положительного корня u уравнения (9) суть аналогичный корень предельного (при $c \rightarrow +\infty$) уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} = 1.$$

Это квадратное уравнение с понятным аналитическим решением, поэтому:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} u = u_0, \quad u_0 := \frac{1}{2} \left[x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - 4(a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2)} \right]. \quad (62)$$

При $a = b$ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу (50).

Для нахождения первой компоненты $H_1^{(i)}$ напряженности поля вне цилиндра перейдем к пределу $c \rightarrow +\infty$ в формуле (43), находя предельные значения отдельных фрагментов этой формулы. Из формулы (17) (при соответствующей замене в ней $a \rightarrow c$, $b \rightarrow a$, $c \rightarrow b$) с учетом (14) получаем:

$$cI(u; a, b, c) \equiv cI(u; a, c, b) = \frac{2c\sqrt{c^2 - b^2}}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left[E(\varphi, k) - \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} F(\varphi, k) - \right. \\ \left. - \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 - b^2}} \sqrt{\frac{b^2 + u}{(c^2 + u)(a^2 + u)}} \right], \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 + u}}, \quad k = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}}. \quad (63)$$

При $c \rightarrow +\infty$ будет $\varphi \rightarrow \pi/2$, $k \rightarrow 1$, а потому при переходе к такому пределу в выражении $cI(u; a, b, c)$ из (63) нетривиальная неопределенность может снова возникнуть только при нахождении предела выражения вида $F(\varphi, k)/c^2$. Используя приведенный выше прием, основанный на неравенстве (59) и соответствующих асимптотических оценках, получим, что при $c \rightarrow +\infty$ будет $F(\varphi, k)/c^2 \rightarrow 0$, а потому с учетом (62):

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} cI(u; a, b, c) = \frac{2}{a^2 - b^2} \left(1 - \sqrt{\frac{b^2 + u_0}{a^2 + u_0}} \right) = \frac{2}{a^2 + u_0 + \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}}. \quad (64)$$

Без особых затруднений из (42), (40), (8) и (62) находится предел:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} cQ(u; x, y, z) = \frac{2[H_1^{(i)} p(u_0; x, a) + H_2^{(i)} p(u_0; y, b)]}{[p^2(u_0; x, a) + p^2(u_0; y, b)] \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}}, \quad (65)$$

где для краткости введено обозначение

$$p(u; x, a) := \frac{x}{a^2 + u}. \quad (66)$$

Переходя к пределу $c \rightarrow +\infty$ в (43) с учетом соотношений (64)–(66) и предельных значений напряженности внутри эллиптического цилиндра (60), (61), получаем следующую формулу для первой компоненты напряженности результирующего поля вне бесконечного эллиптического цилиндра $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$H_1^{(e)}(\mathbf{r}) = H_1^0(\mathbf{r}) - (\mu - 1)ab \left\{ \frac{H_1^{(i)}}{a^2 + u_0 + \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}} - \frac{p(u_0; x, a)[H_1^{(i)} p(u_0; x, a) + H_2^{(i)} p(u_0; y, b)]}{[p^2(u_0; x, a) + p^2(u_0; y, b)] \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}} \right\}. \quad (67)$$

Аналогично из (44), (45) выводятся формулы для остальных двух компонент напряженности результирующего поля вне бесконечного эллиптического цилиндра $\mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$H_2^{(e)}(\mathbf{r}) = H_2^0(\mathbf{r}) - (\mu - 1)ab \left\{ \frac{H_2^{(i)}}{b^2 + u_0 + \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}} - \frac{p(u_0; y, b) [H_1^{(i)} p(u_0; x, a) + H_2^{(i)} p(u_0; y, b)]}{[p^2(u_0; x, a) + p^2(u_0; y, b)] \sqrt{(a^2 + u_0)(b^2 + u_0)}} \right\},$$

$$H_3^{(e)}(\mathbf{r}) = H_3^0(\mathbf{r}). \quad (68)$$

В (67), (68) компоненты напряженности $H_1^{(i)}$, $H_2^{(i)}$ вычисляются по (60), (61).

Формулы (60), (61), (67), (68) были выведены в предположении, что $a > b$ в (57). Однако, если аналогичным образом перейти к пределу $c \rightarrow +\infty$ в формулах (30), (43)—(45) в предположении $b > a$, то получаются те же самые формулы. Поэтому формулы (60), (61), (67), (68) для компонент напряженности поля внутри и вне бесконечного эллипсоидального цилиндра справедливы при любом соотношении между полуосями a и b в его поперечном сечении (57).

Как и следовало ожидать, при $a = b$ формулы (60) и (61) переходят в формулы (49) напряженности результирующего поля внутри кругового бесконечного цилиндра, а формулы (67), (68) — в формулы (51)—(53) напряженности результирующего поля вне такого цилиндра. В случае поперечного внешнего поля формулы (60) и (61) переходят в формулы, приведенные для этого случая в [19, с. 245].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом настоящей работы является получение из основного уравнения магнитостатики (1) конечных аналитических формул для напряженности результирующего поля внутри и вне однородного магнетика произвольной эллипсоидальной формы, помещенного во внешнее поле с условием (5), а также получение из них аналогичных формул для магнетиков, форма которых получается тем или иным предельным переходом эллипсоидальной. Сравнение с известными из литературы формулами предельных случаев подтверждает правильность выводимых формул. Составлена программа на языке Фортран, являющаяся компьютерной реализацией приведенных формул и позволяющая вычислять напряженность поля внутри и вне произвольного эллипсоидального магнетика в рамках исследуемой модели.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» («Quantum») № АААА-А18-118020190095-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. О проблемах использования пакетов универсальных программ для решения задач магнитостатики // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 23—34.
2. Дякин В.В., Раевский В.Я., Кудряшова О.В. Поле конечного дефекта в пластине // Дефектоскопия. 2009. № 3. С. 67—79.
3. Дякин В.В., Раевский В.Я., Кудряшова О.В. Дефект в шаре // Дефектоскопия. 2009. № 9. С. 16—30.
4. Дякин В.В., Кудряшова О.В. Дефект в цилиндре // Дефектоскопия. 2012. № 4. С. 41—55.
5. Дякин В.В., Кудряшова О.В. Дефект в трубе // Дефектоскопия. 2012. № 10. С. 3—17.
6. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. 177 с.
7. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Один подход к решению основного уравнения магнитостатики для случая неоднородных магнетиков // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187. № 1. С. 88—103.
8. Шур М.Л., Новослугина А.П., Смородинский Я.Г. Магнитное поле дефекта произвольной формы в плоскопараллельной пластине // Дефектоскопия. 2015. № 11. С. 14—27.
9. Сапожников А.Б. Некоторые простейшие нелинейные расчеты в теории магнитной дефектоскопии // Труды СФТИ при ТГУ. Вып. 30. 1950. 207 с.

10. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
11. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 403 с.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 631 с.
13. Гуо П., Ивашкин В.В. Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 94. 32 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
15. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
16. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Киев: Наукова думка, 1981. 471 с.
17. Раевский В.Я. О свойствах квазиэрмитовых операторов и их применении к исследованию операторов теории потенциала и основного уравнения электро- и магнитостатики // Препринт № 24/48(01). Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2001.
18. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1989. 271 с.
19. Неразрушающий контроль и диагностика / Под ред. Ключева В.В. М.: Машиностроение, 1995. 487 с.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
21. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
22. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.