УДК 620.179.16

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЛЯВА В ПЛОСКОМ СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НЕЖЕСТКОМ КОНТАКТЕ НА ГРАНИЦАХ

© 2022 г. А.В. Вагин[1,*]

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия 197376 Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
E-mail: *av.vagin@bk.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022; после доработки 23.09.2022
Принята к публикации 04.10.2022

Исследовано распространение волны Лява в слоистом твердом полупространстве с однородными и неоднородными граничными условиями на границах. Решена задача нахождения дисперсионного уравнения для волны Лява, распространяющейся в однородной и неоднородной среде. Найденные дисперсионные уравнения решены относительно волнового числа, а также построены графические зависимости найденной скорости от частоты ультразвука и шероховатости для неоднородной среды.

Ключевые слова: волна Лява, дисперсионное уравнение, слоистая среда, неоднородные граничные условия.

DOI: 10.31857/S013030822211001X, **EDN:** BTUANT

ВВЕДЕНИЕ

Безальтернативное применение ультразвука в прикладных задачах (неразрушающий контроль, структуроскопия, сейсмическая акустика, геофизика, техника, микроэлектроника и др.) обусловлено, во-первых, широким спектром информативных возможностей при исследовании строения и вещественного состава материалов, во-вторых, требованием к созданию более новых видов материалов и устройств для решения задач достижения высоких качеств при изготовлении акустических элементов, в-третьих, существующей возможностью инженерных изысканий в доработке созданных новых материалов и технологий.

Решение задачи нахождения физико-механических характеристик упругой среды основано на анализе волн, распространяющихся в исследуемой среде.

Анализ распространения волн Лява в различных средах в научной литературе вызывает большой интерес. Так как волны Лява являются частным случаем поверхностных волн, которые обладают важным свойством, они часто используются для контроля поверхностных дефектов материалов [1]. Обоснованность использования данного типа волн подтверждается тем, что поверхностные волны распространяются в приповерхностном слое образца контроля толщиной порядка двух длин волн, что дает определяющую зависимость параметров волны от свойств исследуемого слоя. Волна Лява с увеличением толщины слоя все меньше проникает в полупространство и почти локализуется в слое.

Так, например, в [2] исследуются волны Лява с позиций сейсмической активности. Новшеством этой работы является моделирование сейсмических волн Релея и Лява в трехмерном случае. Исследование структуры волн Лява принципиально трехмерной, приведенное в [2], было выполнено впервые. Однако, несмотря на обширный спектр полученных результатов для конкретной математической модели, они не дают целостного представления о численных величинах, характеризующих распространение волны в среде.

Результаты анализа распространения волны Лява в твердом слое с твердым полупространством приведены в [3]. Неоднородность между слоями имитируется наличием непрерывных усилий «сцепления», но отсутствием непрерывности поля перемещений. В упомянутой статье принят формальный учет особенностей зацеплений в виде задания численных значений коэффициентов жесткости. Такой учет «зацепления» между слоями говорит лишь о степени жесткости и не дает представления о форме и величине неоднородности, описываемой величиной шероховатости.

Исследование распространения волны Лява в слоистой структуре «твердое тело—упругое полупространство» приведено в [4]. Для случая «жесткого контакта» [5,6], т.е. для однородных граничных условий, приведено дисперсионное уравнение для волны Лява.

В данной статье рассматриваются волновые процессы в виде распространения волны Лява вдоль границы твердого слоя с твердым полупространством при неоднородных граничных условиях между ними. Под твердой средой понимается изотропная, идеально упругая среда. Для решения задачи нахождения скорости распространения волны Лява в неоднородной среде, что и определяет цель работы, целесообразно рассмотреть случай распространения волн в однородной среде. Решение такой задачи начинается с нахождения дисперсионного уравнения и последующего его решения относительно волнового числа (скорости звука).

Однородная среда описывается граничными условиями, учитывающими полную передачу составляющих упругих смещений и упругих напряжений [7]. В качестве неоднородной среды рассматриваем микронеоднородную структуру, описываемую граничными условиями, учитывающими неполную передачу составляющих упругих смещений при сохранении передачи упругих напряжений. Разрывы в передаче упругих смещений возникают из-за наличия выступов и/или впадин микрорельефа на границе твердого слоя и полупространства, а также взаимодействия между ними. Это соответствует определению граничных условий, описываемых в приближении «линейного скольжения» [8]. Такая неоднородность возникает во многих практических случаях, например при механической обработке поверхности (в частности, при упрочнении поверхностного слоя стекла методом ионной имплантации), при освещении поверхности фоточувствительного полупроводникового пьезокристалла (CdS, CdSe, ZnO, ZnS и т.д.) поглощаемым светом и т.д. [9].

Количественная модель выступов и/или впадин микрорельефа строится на основе введения величины шероховатости в коэффициенты жесткости. Тогда величина шероховатости будет определяться средним расстоянием между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях. Учет шероховатости при решении задачи поиска скорости распространения волны Лява дает представление о форме и величине неоднородности, что дает основу для поиска физически корректной функциональной зависимости упругих свойств жесткости от параметров контактирующих поверхностей, которые образуются за счет большого количества микроконтактов [10].

Из [11] известно, что поверхностная волна в изотропном твердом полупространстве является комбинацией плоских неоднородных волн — продольной и поперечной, векторы смещения которых лежат в плоскости, перпендикулярной границе. Другим типом поверхностной волны является волна Лява. Существование такой волны основано на взаимно дополнительном типе поляризации — горизонтальной поляризации. Волна Лява представляет собой плоские поперечные волны со смещениями, параллельными границе раздела слоя и полупространства и перпендикулярными направлению волны [4].

Исследование с помощью волны Лява слоистых сред, имеющих широкое разнообразие физико-механических характеристик, наряду с отсутствием трудностей в технологиях изготовления, находит на данный момент большое применение и практический интерес в акустике, акустооптике, авиации, космической технике и пр.

Описание распространения волн Лява. Рассмотрим слоистую структуру «твердое тело—упругое полупространство» (рис. 1).

В качестве материалов сред примем те, для которых наиболее полно известен набор физико-механических характеристик, например «сталь—графит» [12].

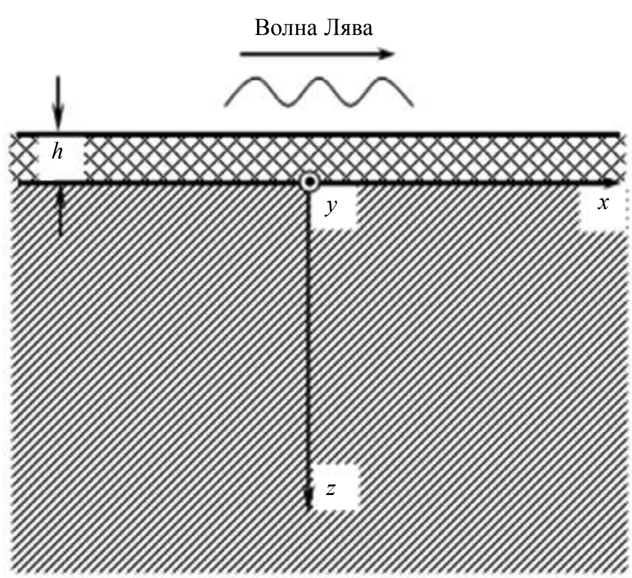

Рис. 1. Модель структуры «твердая среда—упругое полупространство».

Так как волна Лява является чисто поперечной волной, то она имеет только одну компоненту упругого смещения. Для рассмотрения волнового движения целесообразно выбрать плоскости для волнового вектора — xz, а также определить, что смещения параллельны оси y (см. рис. 1).

Волны Лява с горизонтальной поляризацией удовлетворяют уравнению движения (1) [13]:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\xi)-\mu\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\xi), \tag{1}$$

где ρ — плотность среды; ξ — вектор упругого смещения; λ, μ — параметры Лямэ; μ — модуль сдвига.

Для уравнения движения (1) волна Лява является вторым линейно-независимым решением в виде уравнения (2) [14]:

$$\rho\frac{\partial^2\xi_t}{\partial t^2}-\mu\Delta\xi_t=0, \tag{2}$$

где ξ_t — вектор поперечного смещения; $\Delta\,\xi_t = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}(\xi_t))$.

В случае плоских волн упругие смещения в направлении оси y отличны от 0, а смещения в направлении оси x и z равны между собой и равны 0, откуда получается волновое уравнение для поперечной волны. Но для полного рассмотрения распространения волны Лява необходимо принимать во внимание распространение не только в слое, но и в полупространстве.

Тогда помимо волнового уравнения для волны Лява, распространяющейся в слое, запишем общую систему, включающую волновое уравнение для полупространства (3) [15]:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\xi_{y,\mathrm{c}}=\frac{1}{c_{t,\mathrm{c}}^2}\frac{\partial^2\xi_{y,\mathrm{c}}}{\partial t^2},\ -h\le z\le 0;\\&\nabla^2\xi_y=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\xi_y}{\partial t^2},\ z\ge 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\xi_{y,\mathrm{c}}, c_{t,\mathrm{c}}^2, \xi_y, c_t^2$ — компоненты смещения и скорости поперечной волны в слое и в полупространстве соответственно; h — толщина слоя.

Из физических соображений следует, что при распространении волны из плотной среды в менее плотную скорость распространения волны должна возрастать. Условием распространения волны Лява будет соотношение скорости в слое и полупространстве, которое выглядит следующим образом:

$$c_{t,\mathrm{c}}<c_t.$$

Простейшим типом волны с горизонтальной поляризацией является объемная поперечная волна, распространяющаяся вдоль границы полупространства. Данная волна описывается уравнениями (4) для упругих смещений на границе твердой среды и в полупространстве:

$$\begin{aligned}&\xi_{y,\mathrm{c}}=B_{\mathrm{c}}\Phi(z)e^{j(\omega t-kx)},\ -h\le z\le 0;\\&\xi_y=Be^{-sz}e^{j(\omega t-kx)},\ z\ge 0,\end{aligned} \tag{4}$$

где B_{c} — неизвестная постоянная; Φ(z) — функция распределения амплитуды волны в слое; B — неизвестная постоянная; $s=\sqrt{k^2-k_t^2}$, $k_t=\dfrac{\omega}{c_t}$ — волновое число поперечной волны.

Выполняя подстановку выражений для упругих смещений поперечной волны (4) в выражения (3), получим выражение для функции распределения амплитуды в слое (5):

$$\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z^2}+s_{\mathrm{c}}^2\Phi(z)=0, \tag{5}$$

где $s_{\text{c}}^2 = k_{t,\text{c}}^2 - k^2$, $k = \dfrac{\omega}{c}$ — волновое число; $k_{t,\text{c}} = \dfrac{\omega}{c_{t,\text{c}}}$ — волновое число поперечной волны в слое; c — фазовая скорость волны Лява.

Решая уравнение (5) относительно функции распределения амплитуды, получаем для нее выражение:

$$\Phi(z) = C\sin(s_{\text{c}}z) + D\cos(s_{\text{c}}z),$$

где C, D — пока неизвестные постоянные.

Выполняя подстановку полученного уравнения для функции распределения амплитуды $\Phi(z)$ в уравнения (4), получим итоговую систему уравнений (6) для рассмотрения распространения волны Лява в слоистой среде:

$$\begin{gathered} \xi_{y,\text{c}} = \left(C_{\text{c}}\sin s_{\text{c}}z + D_{\text{c}}\cos s_{\text{c}}z\right)e^{j(\omega t - kx)}, \quad -h \le z \le 0; \\ \xi_y = Be^{-sz}e^{j(\omega t - kx)}, \; z \ge 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $C_{\text{c}} = B_{\text{c}}C$, $D_{\text{c}} = B_{\text{c}}D$.

Таким образом, получены уравнения для упругих смещений волны Лява в слое и полупространстве, подставляя которые в граничные условия для конкретной модели среды, можно получить дисперсионное уравнение для нахождения скорости волны и последующего определения физико-механических характеристик сред. Слоистая среда определяется пятью упругими постоянными [16, 17], которые в свою очередь определяются по найденным скоростям поперечных и продольных волн при различных направлениях распространения.

Распространение волн Лява в однородных средах. Для нахождения дисперсионного уравнения для волны Лява необходимо рассмотреть граничные условия для структуры «твердая среда—упругое полупространство». Граничные условия для однородной среды будут определяться непрерывностью касательных компонент смещения и напряжения при $z = 0$ и $z = -h$ [18].

Уравнение (7) определяет первое граничное условие, которое характеризует равенство компонент механических напряжений на границе твердой среды и полупространства при $z = 0$:

$$\sigma_{yz,\text{c}}\big|_{z=0} = \sigma_{yz}\big|_{z=0}, \tag{7}$$

где $\sigma_{yz,\text{c}}$, σ_{yz} — компоненты механических напряжений в слое и полупространстве соответственно.

Уравнение (8) определяет второе граничное условие, которое характеризует равенство нулю компонент механического напряжения на границе твердого слоя и полупространства при $z = -h$:

$$\sigma_{yz,\text{c}}\big|_{z=-h} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (9) определяет третье граничное условие — условие «жесткого контакта» для компонент упругого смещения ξ_z:

$$\xi_{z,\text{c}} = \xi_z. \tag{9}$$

Граничные условия (7)—(9) полным образом определяют волновые процессы в системе «твердая среда — упругое полупространство».

При решении задачи определения фазовой скорости волны необходимо принять во внимание изменение взаимного положения частиц твердого тела, связанное с их перемещением относительно друг друга. Это определяет результат изменения межатомных расстояний и перегруппировки блоков атомов. Это сопровождается изменением величин межатомных сил, мерой которого является упругое механическое напряжение.

Используя обобщенный закон Гука [13]:

$$\sigma_{ik} = C_{iklm}u_{lm},$$

где σ_{ik} — тензор напряжения; C_{iklm} — тензор модулей упругости; u_{lm} — тензор деформации, т.е. линейную зависимость между тензором деформаций и тензором напряжений, компоненту тензора упругого напряжения можно представить в виде выражения (10):

$$\sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = 2\mu \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y}\right) = \mu \frac{\partial \xi_y}{\partial z}. \tag{10}$$

После определения полного состава уравнений для решения задачи необходимо выполнить только подстановку известных компонент упругих смещений (6) и механических напряжений (10) в граничные условия (7)—(9).

Таким образом, выполняя такую подстановку, получаем три уравнения:

$$\mu_{\text{c}} C_{\text{c}} s_{\text{c}} = -\mu s B;$$
$$C_{\text{c}} \cos s_{\text{c}}(-h) - D_{\text{c}} \sin s_{\text{c}}(-h) = 0;$$
$$D_{\text{c}} = B,$$

из которых составляем систему уравнений для нахождения дисперсионного уравнения:

$$\begin{cases} C_{\text{c}} \cos s_{\text{c}} h + B \sin s_{\text{c}} h = 0 \\ \mu_{\text{c}} C_{\text{c}} s_{\text{c}} + \mu s B = 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Найдем определитель системы (11) и приравняем его к нулю для нахождения нетривиального решения:

$$\begin{vmatrix} \cos s_{\text{c}} h & \sin s_{\text{c}} h \\ \mu_{\text{c}} s_{\text{c}} & \mu s \end{vmatrix} = 0.$$

Решая определитель, получим дисперсионное уравнение (12), необходимое для нахождения скорости волны Лява:

$$\mu_{\text{c}} s_{\text{c}} \cdot \operatorname{tg}(s_{\text{c}} h) = \mu s, \tag{12}$$

где $\mu = \rho c_t^2$, $\mu_{\text{c}} = \rho_{\text{c}} c_{t,\text{c}}^2$ — модули сдвига в полупространстве и слое соответственно.

Как видно из уравнения (12), в правой части этого дисперсионного уравнения стоит действительное положительное число, поэтому левая часть также является действительной.

Учитывая ранее введенные обозначения, а именно $s_{\text{c}} = \sqrt{k_{t,\text{c}}^2 - k^2}$, $s = \sqrt{k^2 - k_t^2}$, то соотношение для волновых чисел будет следующим: $k_{t,\text{c}}^2 > k^2 > k_t^2$, тогда скорости в слое и полупространстве будут соотноситься неравенством: $c_t > c > c_{t,\text{c}}$ (замедляющий слой) [5].

Таким образом, фазовая скорость волны Лява для случая жесткого контакта во всем частотном диапазоне изменяется от скорости поперечной волны в слое до скорости поперечной волны в полупространстве.

Так как дисперсионное уравнение для волны Лява в однородной среде (12) содержит в себе тригонометрическую функцию тангенса, то в этом случае оно является трансцендентным и имеет бесконечное множество корней. Различные корни соответствуют волнам Лява разных порядков (распространяющихся мод). Количество этих мод определяется соотношением $k_{t,\text{c}} h$.

Для построения зависимости фазовой скорости волны Лява от частоты ультразвука проведем анализ возможных предельных случаев существования такой волны.

Пусть фазовая скорость распространения волны Лява стремится к значению скорости сдвиговых волн в полупространстве c_t. Тогда, принимая во внимание неравенство по соотношению скоростей, можно сказать, что эффективная скорость стремится к скорости поперечной волны, а переходя к рассмотрению волновых чисел, можно сказать, что эффективное волновое число стремится к волновому числу поперечной волны, что в свою очередь влечет стремление к нулю коэффициента s, т.е. $c \to c_t \Rightarrow k \to k_t \Rightarrow s \to 0$. Тогда, переходя к рассмотрению дисперсионного уравнения (12), можно записать следующее:

$$\operatorname{tg}(s_{\text{c}} h) \to 0 \Rightarrow s_{\text{c}} h \to n\pi,$$

тогда

$$s_{\text{c}}h = h\sqrt{k_{t,\text{c}}^2 - k^2} = k_{t,\text{c}}h\sqrt{1-\frac{k^2}{k_{t,\text{c}}^2}} = k_{t,\text{c}}h\sqrt{1-\left(\frac{c_{t,\text{c}}}{c}\right)^2}\Big|_{c\to c_t} = k_{t,\text{c}}h\sqrt{1-\left(\frac{c_{t,\text{c}}}{c_t}\right)^2},$$

т.е. при стремлении фазовой скорости к скорости поперечной волны в полупространстве возможно появление новой волны на критических частотах, которые определяются как

$$k_{t,\text{c}}h = \frac{n\pi}{1-\left(\frac{c_{t,\text{c}}}{c_t}\right)^2},$$

где $n = 1, 2, 3 \ldots$ — номер моды.

Аналогично рассмотренному предельному случаю следующим вариантом может быть случай стремления фазовой скорости к скорости поперечной волны в слое, при котором получаем, что $c\to c_{t,\text{c}} \Rightarrow k\to k_{t,\text{c}} \Rightarrow s_{\text{c}}\to 0$, тогда дисперсионное уравнение принимает вид:

$$tg\left(s_{\text{c}}h\right) \to \infty \Rightarrow s_{\text{c}}h \to \frac{\pi}{2}(n+1) \Rightarrow\ h\to\infty \Rightarrow\ k_{t,\text{c}}h\to\infty,$$

т.е. данный случай существования волны возможен в области высоких частот.

Решая дисперсионное уравнение (12) относительно скорости волны Лява, построим графическую зависимость полученной скорости волны Лява от частоты ультразвука *f* (рис. 2).

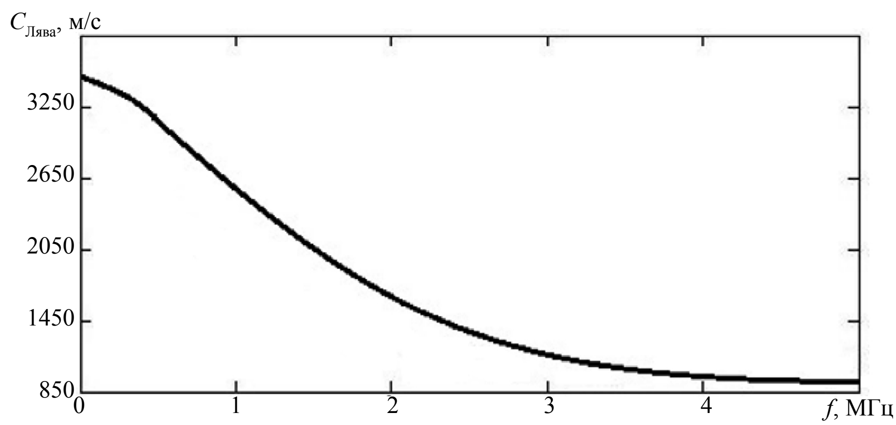

Рис. 2. Графическая зависимость скорости волны Лява от частоты ультразвука.

При малых толщинах слоя фазовые и групповые скорости волн определяются параметрами полупространства и очень близки к значению скорости в первой среде (упругая среда), при больших толщинах — параметрами слоя и соответственно близки к значению скорости во второй среде, т.е. в упругом полупространстве [10].

Фазовые скорости монотонно уменьшаются с ростом толщины слоя, а групповые имеют минимум и области очень сильной дисперсии перед этим слоем. Имея известную фазовую скорость, можно вычислить смещения и напряжения в волнах Лява согласно [19].

Интересным обобщением волн Лява являются поперечные поверхностные волны в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью, рассмотренные в работе [20].

Достигнутые результаты исследования распространения волн Лява в неоднородных средах рассматриваются в следующем разделе.

Распространение волн Лява в неоднородных средах. Рассмотрим распространение волны Лява в неоднородной структуре «твердая среда—упругое полупространство». Неоднородность возникает во многих практических случаях, например при механической обработке поверхности, при освещении поверхности фоточувствительного полупроводникового пьезоэлемента поглощаемым светом.

Пусть плотность и модуль сдвига для рассматриваемой модели среды изменяются по следующим законам [21]:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} e^{-\frac{z}{z_0}} \right);$$
$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\Delta\mu}{\mu_0} e^{-\frac{z}{z_0}} \right), \qquad (13)$$

где z — координата, направленная вглубь полупространства; z_0 — характерная глубина неоднородного слоя; ρ_0, μ_0 — соответствующие значения ρ, μ на большой глубине.

Динамическое уравнение движения для неоднородного полупространства имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \qquad (14)$$

где σ_{ik} — тензор механических напряжений с модулями упругости, являющимися функциями координат (x, y, z). Как уже было сказано ранее, $\xi_x = \xi_z = 0$, $\xi \neq 0$, а также учитывая в (13) зависимость только от координаты z, то уравнение (14) выглядит как

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} - \mu(z) \Delta\xi_y - \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial \xi_y}{\partial z} = 0. \qquad (15)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде гармонической волны:

$$\xi_y = AF(z) \exp\left[i(kx - \omega t) - sz \right], \qquad (16)$$

где A — произвольная постоянная; $F(z)$ — неизвестная функция.

Выполняя подстановку выражения (16) в уравнение (15) без последнего члена, так как он много меньше остальных в виду слабых неоднородностей, получим выражение для неизвестной функции $F(z)$:

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left[(1 + 2sz_0) - \xi(1 + 2sz_0) \right] \frac{dF}{d\xi} + (k_t z_0)^2 F = 0,$$

где введена новая переменная: $\xi = \left(\frac{\Delta\mu}{\mu_0} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) \exp\left(-\frac{z}{z_0} \right) = d^2 \exp\left(-\frac{z}{z_0} \right)$.

Это гипергеометрическое уравнение, и его решением является гипергеометрическая функция $F = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$, где $\alpha = (s - k)z_0$, $\beta = (s + k)z_0$, $\gamma = 1 + 2sz_0$.

Приближенное решение для F:

$$F = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi + O(\xi^2).$$

Выражение (16) должно удовлетворять граничному условию отсутствия сдвиговых напряжений на плоскости $z = 0$:

$$\mu(z) \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \bigg|_{z=0} = 0.$$

Подставляя выражение (16) в граничное условие, получим дисперсионное уравнение, которое приводит к выражению для искомого волнового числа поверхностной волны:

$$k = k_t \left[1 + \frac{(k_t z_0)^2}{2} d^4 + O(d^6) \right]. \qquad (17)$$

Таким образом, анализируя выражения (16), (17), можно сказать, что в случае поверхностной неоднородности слоя в твердом полупространстве может существовать и распространяться наряду с рэлеевской дополнительная поверхностная волна, являющаяся обобщением волны Лява.

Эта волна локализована в поверхностном слое толщиной $z_л = 1/s$, которая тем больше, чем слабее неоднородность:

$$z_л = \left(\frac{\Delta\mu}{\mu_0} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{-1} \frac{1}{k_t z_0} \frac{1}{k_t}.$$

Характеристикой неоднородности слоев является коэффициент жесткости, который определяет передачу нормальных и касательных составляющих упругих смещений.

Не изменяя по существу общности постановки задачи нахождения скорости распространения волны Лява в однородной среде, за исключением постановки выражений для граничных условий, рассмотрим распространение волны Лява в неоднородной среде.

Уравнения (7), (8) для случая распространения волны Лява в неоднородной среде остаются неизменными.

Третье граничное условие — неоднородное условие, рассматриваемое в приближении «линейного скольжения» для компонент ξ_z, которые учитывают непрерывность передачи компонент из одного слоя в другой:

$$\xi_{z,с} - \xi_z = \frac{\sigma_{yz}}{K_T},$$

где K_T – тангенциальный коэффициент жесткости.

Тангенциальный коэффициент жесткости определяется выражением:

$$K_T = \frac{\mu_с \mu c_{t,с} c_t}{\mu_с c_{t,с} + \mu c_t} \frac{2\pi(1-\zeta)}{\omega d^2 \zeta},$$

где $\mu_с$, μ — коэффициенты Лямэ в слое и полупространстве соответственно; $c_{t,с}$, c_t — скорости поперечных волн в граничных средах; $\zeta = b^2/d^2$ — коэффициент перфорации; d — среднее расстояние между контактными участками; b — размер участка с отсутствием контакта.

Если выступы микрошероховатости поверхности моделировать участками сферических поверхностей радиусом R, то среднее расстояние между контактными участками будет:

$$d = 2\sqrt{2RR_z - R_z^2},$$

где R_z — шероховатости поверхности границы.

Выполняя аналогичную подстановку упругих компонент смещений в неоднородные граничные условия, получаем три уравнения, два из которых — аналогичны уравнениям, полученным для однородной среды, а третье уравнение имеет следующий вид:

$$D_с = B - \frac{\mu_с C_с s_с}{K_T} = B\left(1 + \frac{\mu s}{K_T}\right).$$

Из полученных выражений составляем определитель и приравниваем его к нулю для нахождения дисперсионного уравнения:

$$\begin{vmatrix} \cos s_с h & \left(1 + \frac{\mu s}{K_T}\right)\sin s_с h \\ \mu_с s_с & \mu s \end{vmatrix} = 0.$$

Решая данный определитель, получим дисперсионное уравнение для волны Лява, распространяющейся в неоднородной среде (13):

$$\mu_с s_с \cdot \left(1 + \frac{\mu s}{K_T}\right) \mathrm{tg}(s_с h) = \mu s. \qquad (18)$$

Оценка возможного наличия другого типа волн на критических частотах совпадает с оценкой дисперсионного уравнения для случая распространения волны Лява в однородной среде.

Для проведения расчетов необходимо определить характеристики неоднородности, присутствующей в твердом слое и полупространстве.

Как уже было сказано, характеристикой неоднородности служит величина шероховатости. При принятом значении коэффициента перфорации, определяющего степень сплошности границы, равном ζ =0,5, примем значение величины шероховатости R_z = 1; 10 мкм [22].

Для такой модели построим графическую зависимость фазовой скорости волны Лява от частоты ультразвука по полученным аналитическим зависимостям — дисперсионному уравнению (18).

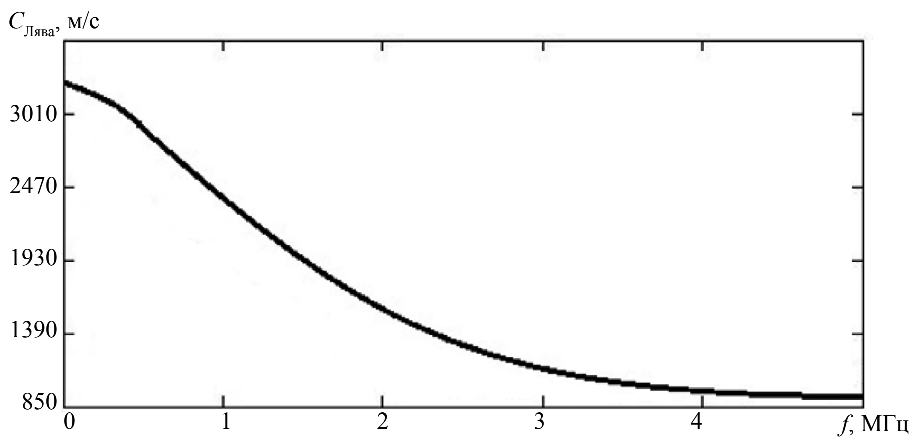

Рис. 3. Графическая зависимость скорости волны Лява от частоты ультразвука при шероховатости R_z = 1 мкм.

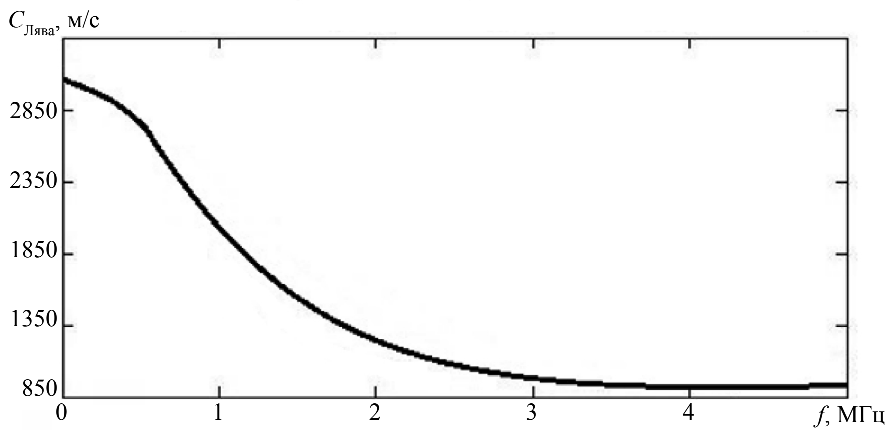

Рис. 4. Графическая зависимость скорости волны Лява от частоты ультразвука при шероховатости R_z = 10 мкм.

Анализ графической зависимости, приведенной на рис. 3, 4, показывает, что нарушение сплошности акустического контакта, вызванное микрошероховатостью в виде выпуклостей и вогнутостей прилегающих поверхностей сред при всех значениях коэффициента перфорации, существенно влияет на фазовую скорость волны Лява по сравнению с условиями жесткого «сварного» контакта.

Наличие неоднородности приводит к снижению амплитудного значения скорости распространения волны Лява в среде при прочих одинаковых частотах ультразвука [23].

Анализ предельных случаев граничных условий показывает, что полученные графические зависимости фазовой скорости волны от частоты при нулевом значении коэффициента перфорации соответствуют рассмотренному случаю «жесткого контакта» — однородная среда.

Для неоднородной среды в случае нарушения акустического контакта за счет наличия на поверхности сред выпуклостей и вогнутостей, образующих шероховатость границы, фазовая скорость волны Лява уменьшается, причем скорость волны тем меньше, чем больше коэффициент перфорации — т.е. чем менее плотно соприкосновение сред.

Также стоит отметить, что высокое значение шероховатости, в свою очередь определяющее неоднородность среды, приводит к уменьшению контактной жесткости, что, как уже известно, вызывает уменьшение фазовой скорости.

ВЫВОДЫ

1. Показано влияние на абсолютные значения фазовых скоростей волн Лява таких параметров микротрещин, как величина шероховатости, взаимодействующих в приближении «линейного скольжения» краев трещин и других неоднородностей среды.

2. Решена задача о нахождении скорости волны Лява для однородной и неоднородной структуры «твердая среда—упругое полупространство» с объемной трещиноватостью путем решения относительно волнового числа дисперсионного уравнения.

3. Полученные зависимости используются применительно к задачам нахождения основных физико-механических характеристик среды на основе акустических измерений, а также в качестве основного материала для проведения предызмерительных изысканий с целью получения максимального объема информации без применения средств ультразвукового контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капцов А.В., Кузнецов С.В.* Волны Лява в трехслойном упругом полупространстве // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 4. С. 550—557.

2. *Хохлов Н.И., Петров Б.И.* Моделирование сейсмических явлений сеточно-характеристическим методом // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 3. С. 159—167.

3. *Аббакумов К.Е., Попокова Е.С.* Волновые процессы в области границы твердых сред с нарушенным акустическим контактом // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2007. № 1. С. 26—30.

4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.

5. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 340 с.

6. *Рытов С.М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акустический журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.

7. *Аббакумов К.Е., Кириков А.В., Львов Р.Н.* Преломление упругих волн на плоской границе раздела с нарушенной адгезией твердых сред // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2003. № 1. С. 10—17.

8. *Abbakumov K.E., Vagin A.V.* Dispersion Equation for Longitudinal Waves in a Layered Medium with Inhomogeneous Boundary Conditions in Different Propagation Directions // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2020. V. 56. No. 1. P. 20—27. [*Аббакумов К.Е., Вагин А.В.* Дисперсионное уравнение для продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при различных направлениях распространения // Дефектоскопия. 2020. № 1. С. 22–30.]

9. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1996. 196 с.

10. *Хлыбов А.А.* Исследование влияния микронеоднородности среды на распространение поверхностных волн // Дефектоскопия. 2018. № 6. С. 3—10.

11. *Evel'son R.L* A fine-layered medium of finite-thickness in an electromagnetic field // Journal of communications technology and electronics. 2015. V. 60. I. 6. P. 552—559.

12. *Brun M., Guenneau S., Movchan A.B., Bigoni D.* Dynamics of structural interfaces: Filtering and focussing effects for elastic waves // J. Mech. Physics Solids. 2010. V. 58. P. 1212—1224.

13. *Егоров Н.Н., Яковлев Л.А.* Колебания и волны: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1997. 111 с.

14. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.

15. *Luk'yashko O.A., Saraikin V.A.* Transient one-dimensional wave processes in a layered medium // Journal of Mining Science. 2007. V. 43. P. 145—158.

16. *Вавакин А.С., Салганик Р.Л.* Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 95—107.

17. *Jose M.* Carcione anisotropic Q and velocity dispersion of finely layered media // Geophysical Prospecting. 1992. V. 40. P. 761—783.

18. *Панасюк О.Н.* Анализ влияния граничных условий на распространение волн в слоистых композитных материалах // Прикладная механика. 2014. № 4. С. 52—58.

19. *Akbarov S.D., Guliev M.S, Kepceler T.* Propagation of axisymmetric waves in an initially twisted circular compound bimaterial cylinder with a soft inner and a stiff outer constituents // Mech. Comp. Mater. 2011. V. 46. P. 627—638.

20. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
21. *Аббакумов К.Е., Вагин А.В.* Волновые процессы в слоистой микронеоднородной среде с неоднородными граничными условиями // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 5. С. 12—18.
22. *Аббакумов К.Е., Голубев А.С.* Оценка акустических свойств тонких расслоений и однострочных неметаллических включений в стальных листах // Дефектоскопия. 1982. № 9. С. 22—31.
23. *Сибиряков Б.П., Максимов Л.А., Татарников М.А*. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. Новосибирск: Наука, 1980. 73 с.