

ОДИН ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА В ПРОИЗВОЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

© 2021 г. В.В. Дякин¹, О.В. Кудряшова^{1,*}, В.Я. Раевский^{1,**}

*¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН,
Россия 620137 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **ravskii@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2020; после доработки 24.01.2021
Принята к публикации 05.02.2021

Рассмотрена прямая задача магнитостатики — вычисление напряженности результирующего магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного во внешнее магнитное поле произвольной конфигурации. С помощью достаточно объемных аналитических преобразований с использованием основных свойств гипергеометрических функций и функций Лежандра решение основного трехмерного магнитостатического уравнения для указанной конфигурации сведено к решению некоторого количества систем трех одномерных линейных интегральных уравнений. Получен упрощенный вид этих систем для частных случаев: постоянного внешнего поля и результирующего поля на оси цилиндра.

Ключевые слова: основное уравнение магнитостатики, прямая задача, ряды Фурье, магнитный неразрушающий контроль.

DOI: 10.31857/S0130308221040035

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма, например, задач неразрушающего магнитного контроля, актуальной является проблема создания обоснованных алгоритмов аналитического или численного решения задач магнитостатики по вычислению напряженности результирующего поля применительно к магнитным телам различной формы, помещенным во внешнее магнитное поле. Обоснованные эффективные методы решения такого рода задач имеются по большей части для безграничных модельных осесимметричных тел относительно простой геометрической формы, помещенных в постоянное внешнее магнитное поле определенного (удобного для аналитического исследования) направления, что позволяло во многих случаях свести задачу к двумерной и пренебречь краевыми эффектами. Однако большой теоретический и практический интерес представляют задачи для реальных тел конечных размеров в произвольном внешнем поле.

Что касается тел с цилиндрической симметрией, давно исследована задача для бесконечно длинного цилиндра с постоянной магнитной проницаемостью, помещенного в бесконечную магнитную среду с иной магнитной проницаемостью, в однородном внешнем поле, решение которой представляется в элементарных функциях [1, с. 245]. В [2] изучена задача расчета напряженности результирующего поля бесконечного магнитного цилиндра при условии неоднородного намагничивания, решение которой записывается через специальные функции. В [3] эта задача исследована для однородного цилиндра конечных размеров в произвольном внешнем поле. В данной работе к возникающему двумерному интегральному уравнению (интегрирование по полной поверхности цилиндра) непосредственно применен метод коллокаций, что приводит к системе линейных уравнений достаточно большой размерности, а для более комфортного вычисления матричных элементов принят ряд упрощающих предположений.

В настоящей работе акцент сделан на достаточно громоздких аналитических преобразованиях упомянутого уравнения, что позволило свести задачу к решению некоторого количества систем из трех одномерных линейных интегральных уравнений. Из-за большого объема упомянутых преобразований во многих случаях указывается только направление промежуточных преобразований и их результат. Формат статьи не позволил привести описание программной реализации предлагаемого подхода и результаты компьютерных расчетов. Планируется посвятить этому отдельную работу.

Создание подобных алгоритмов и программ расчетов полей с контролируемой точностью диктуется также необходимостью тестирования известных пакетов универсальных программ (типа

ELCUT, ANSYS, ELMER), неконтролируемое использование которых приводит ко многим проблемам. Подробному описанию недостатков этих программ и подводных камней при их использовании посвящена работа [4].

2. ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для решения указанных выше задач мы исходим из так называемого основного уравнения магнитостатики [5, с. 16], которое в случае однородного магнетика с постоянной магнитной проницаемостью μ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus S. \quad (1)$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики (см. [5, с. 17], [6, с. 149]) и связывает искомую напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (не лежащей на границе магнетика) с напряженностью $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ заданного поля внешнего источника. В данном уравнении Ω есть область в пространстве R^3 , ограниченная поверхностью S и занятая исследуемым магнетиком с заданной постоянной магнитной проницаемостью μ . Внося дивергенцию в (1) под знак интеграла [7, с. 340] и применяя формулу интегрирования по частям с учетом $\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$, получаем:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \int_S \frac{H_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus S, \quad (2)$$

где $H_n(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}|_S$ — предельное значение изнутри области Ω нормальной составляющей на S вектора напряженности \mathbf{H} (вектор единичной нормали \mathbf{n} на S выбран внешним по отношению к области Ω). Умножая скалярно обе части (2) на вектор \mathbf{n} и переходя к пределу на S изнутри области Ω с учетом формулы скачка для нормальной производной потенциала простого слоя, имеем:

$$H_n(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_S H_n(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS' = \frac{2}{\mu + 1} H_n^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3)$$

где

$$\lambda := \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \quad (4)$$

а интеграл в (3) представляет собой прямое значение на S нормальной производной потенциала простого слоя с ядром [8, с. 266]:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\cos(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}.$$

Таким образом, напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в любой точке $\mathbf{r} \in R^3 \setminus S$ вычисляется из формулы (2) после предварительного решения уравнения (3) относительно нормальной составляющей $H_n(\mathbf{r})$ на S . Построение эффективных алгоритмов решения этого уравнения и является основной проблемой при решении задач магнитостатики, основанном уравнении (1).

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НАПРЯЖЕННОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Конкретизируем форму магнетика. Рассмотрим магнетик в форме цилиндра (см. рис. 1). Область Ω , занятая магнетиком, представляет собой прямой круговой цилиндр длины l с боковой поверхностью S_1 , ось которого совмещена с осью z , а нижнее и верхнее основания S_2 и S_3 суть круги радиуса R , расположенные в плоскостях $z = d$ и $z = d + l$ соответственно. Для упрощения последующих выкладок будем сначала рассматривать случай $d = 0$, а затем соответствующим сдвигом начала координат в полученных окончательных формулах перейдем к произвольному значению d . Поскольку полная поверхность цилиндра S состоит из трех частей S_1, S_2 и S_3 , то введем следующие

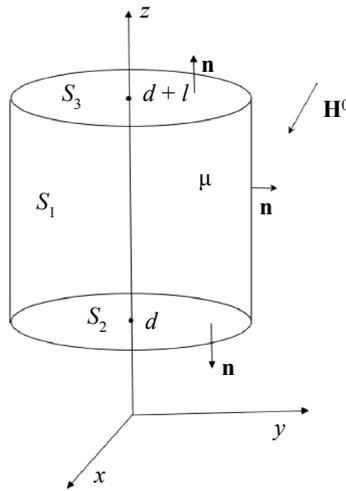


Рис. 1. Магнетик в форме конечного цилиндра.

отдельные обозначения для значений на этих поверхностях искомой из уравнения (3) нормальной производной $H_n(\mathbf{r})$:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) := H_n(\mathbf{r})|_{S_1}, \quad \varphi_2(\mathbf{r}) := H_n(\mathbf{r})|_{S_2}, \quad \varphi_3(\mathbf{r}) := H_n(\mathbf{r})|_{S_3}. \quad (5)$$

Аналогичные обозначения введем и для значений нормальных составляющих напряженности известного внешнего поля $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ на этих поверхностях:

$$\varphi_1^0(\mathbf{r}) := H_n^0(\mathbf{r})|_{S_1}, \quad \varphi_2^0(\mathbf{r}) := H_n^0(\mathbf{r})|_{S_2}, \quad \varphi_3^0(\mathbf{r}) := H_n^0(\mathbf{r})|_{S_3}. \quad (6)$$

Учитывая введенные обозначения (5), из (2) получим следующее выражение для напряженности так называемого поля реакции (магнетика) $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) := \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) = -\frac{\mu-1}{4\pi} \nabla \left[\int_{S_1} \frac{\varphi_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' + \int_{S_2} \frac{\varphi_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' + \int_{S_3} \frac{\varphi_3(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \right], \quad \mathbf{r} \notin S. \quad (7)$$

Полагая в (3) поочередно $\mathbf{r} \in S_1, S_2, S_3$, с учетом обозначений (6) получим систему интегральных уравнений относительно искомых функций (5):

$$\varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dS' = \frac{2}{\mu+1} \varphi_1^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_1, \quad (8)$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) - \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{i=1,3} \int_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dS' = \frac{2}{\mu+1} \varphi_2^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_2, \quad (9)$$

$$\varphi_3(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} \varphi_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dS' = \frac{2}{\mu+1} \varphi_3^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_3. \quad (10)$$

В уравнениях (8)—(10) с помощью цилиндрических замен переменных сведем поверхностные интегралы к повторным. В результате стандартных (но достаточно громоздких) преобразований приходим к следующей системе двумерных интегральных уравнений относительно функций $\psi_1(\varphi, z), \psi_2(r, \varphi), \psi_3(r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \psi_1(\varphi, z) - \frac{\lambda}{2\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(1 - \cos(\varphi - \varphi')) dz' d\varphi'}{g(1, 1, \varphi - \varphi', t(z - z'))} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{(1 - r' \cos(\varphi - \varphi')) r' dr' d\varphi'}{g(1, r', \varphi - \varphi', tz)} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{(1 - r' \cos(\varphi - \varphi')) r' dr' d\varphi'}{g(1, r', \varphi - \varphi', t(1 - z))} \right] = \frac{2}{\mu + 1} \psi_1^0(\varphi, z); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(r, \varphi) - \frac{\lambda}{2\pi} \left[t^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{z' dz' d\varphi'}{g(r, 1, \varphi - \varphi', tz')} + \right. \\ \left. + t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{r' dr' d\varphi'}{g(r, r', \varphi - \varphi', t)} \right] = \frac{2}{\mu + 1} \psi_2^0(r, \varphi); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(r, \varphi) - \frac{\lambda}{2\pi} \left[t^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(1 - z') dz' d\varphi'}{g(r, 1, \varphi - \varphi', t(1 - z'))} + \right. \\ \left. + t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{r' dr' d\varphi'}{g(r, r', \varphi - \varphi', t)} \right] = \frac{2}{\mu + 1} \psi_3^0(r, \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

где введены обозначения:

$$g(a, b, \theta, c) := [a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta + c^2]^{3/2}, \quad t := l/R. \quad (14)$$

Определяемые из системы (11)—(13) функции $\psi_1(\varphi, z)$, $\psi_2(r, \varphi)$, $\psi_3(r, \varphi)$ ($z \in [0, 1]$, $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$) следующим образом связаны с искомыми функциями $\varphi_1(\mathbf{r})$, $\varphi_2(\mathbf{r})$, $\varphi_3(\mathbf{r})$ из (5):

$$\begin{aligned} \psi_1(\varphi, z) := \varphi_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz), \quad \psi_2(r, \varphi) := \varphi_2(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, 0), \\ \psi_3(r, \varphi) := \varphi_3(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, l). \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично, функции в правых частях (11)—(13) связаны с известными функциями $\varphi_1^0(\mathbf{r})$, $\varphi_2^0(\mathbf{r})$, $\varphi_3^0(\mathbf{r})$ из (6):

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\varphi, z) := \varphi_1^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz), \quad \psi_2^0(r, \varphi) := \varphi_2^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, 0), \\ \psi_3^0(r, \varphi) := \varphi_3^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, l). \end{aligned} \quad (16)$$

При выводе уравнений (12) и (13) из уравнений (9) и (10) использовалось, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

При выводе (11) из (8) применяли выражение вектора единичной нормали к боковой поверхности S_1 цилиндра в точке $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ на ней $\mathbf{n} = \{x/R, y/R, 0\}$, а потому

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{x(x - x') + y(y - y')}{R |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

4. ВЫРАЖЕНИЯ ПОЛЯ РЕАКЦИИ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (11)—(13)

Выразим поле реакции $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) = \{H_x^R(\mathbf{r}), H_y^R(\mathbf{r}), H_z^R(\mathbf{r})\}$ через функции $\psi_1(\varphi, z)$, $\psi_2(r, \varphi)$, $\psi_3(r, \varphi)$, являющиеся решением системы (11)—(13). Из соотношения (7), учитывая возможность внесения

производной под знак интеграла ($\mathbf{r} = (x, y, z) \notin S$), для декартовых компонент результирующего поля получаем:

$$H_x^R(\mathbf{r}) = \frac{\mu-1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \frac{\varphi_i(\mathbf{r}')(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS'; \quad (17)$$

$$H_y^R(\mathbf{r}) = \frac{\mu-1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \frac{\varphi_i(\mathbf{r}')(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS'; \quad (18)$$

$$H_z^R(\mathbf{r}) = \frac{\mu-1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \frac{\varphi_i(\mathbf{r}')(z-z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS'. \quad (19)$$

Переходя в (17)—(19) от декартовых координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ к цилиндрическим (r, φ, z) , затем выражая поверхностные интегралы через повторные с учетом соотношений (15) и (16), после стандартных (но достаточно громоздких) преобразований получаем выражения декартовых компонент напряженности поля реакции $H_x^R(r, \varphi, z)$, $H_y^R(r, \varphi, z)$, $H_z^R(r, \varphi, z)$ через цилиндрические координаты (r, φ, z) точки наблюдения (это $H_x^R(\mathbf{r})$, $H_y^R(\mathbf{r})$, $H_z^R(\mathbf{r})$ при цилиндрической замене в них $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$) и соответствующие декартовые компоненты напряженности внешнего поля $H_x^0(r, \varphi, z)$, $H_y^0(r, \varphi, z)$, $H_z^0(r, \varphi, z)$:

$$\begin{aligned} H_x^R(r, \varphi, z) &= \frac{\mu-1}{4\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(\bar{r} \cos \varphi - \cos \varphi') dz' d\varphi'}{g(\bar{r}, 1, \varphi - \varphi', \bar{z} - tz')} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{(\bar{r} \cos \varphi - r' \cos \varphi') r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z})} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{(\bar{r} \cos \varphi - r' \cos \varphi') r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z} - t)} \right]; \\ H_y^R(r, \varphi, z) &= \frac{\mu-1}{4\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(\bar{r} \sin \varphi - \sin \varphi') dz' d\varphi'}{g(\bar{r}, 1, \varphi - \varphi', \bar{z} - tz')} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{(\bar{r} \sin \varphi - r' \sin \varphi') r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z})} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{(\bar{r} \sin \varphi - r' \sin \varphi') r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z} - t)} \right]; \\ H_z^R(r, \varphi, z) &= \frac{\mu-1}{4\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(\bar{z} - tz') dz' d\varphi'}{g(\bar{r}, 1, \varphi - \varphi', \bar{z} - tz')} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z})} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{z} - t) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z} - t)} \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в формулы перехода к цилиндрическим координатам:

$$H_r^R(r, \varphi, z) = H_x^R(r, \varphi, z) \cos \varphi + H_y^R(r, \varphi, z) \sin \varphi,$$

$$H_\varphi^R(r, \varphi, z) = -H_x^R(r, \varphi, z) \sin \varphi + H_y^R(r, \varphi, z) \cos \varphi, \quad H_z^R(r, \varphi, z) = H_z^R(r, \varphi, z),$$

получаем следующие выражения цилиндрических координат результирующего поля $\mathbf{H}^R(r, \varphi, z)$ через решения $\psi_1(\varphi, z)$, $\psi_2(r, \varphi)$, $\psi_3(r, \varphi)$ системы (11)—(13):

$$H_r^R(r, \varphi, z) = \frac{\mu - 1}{4\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{(\bar{r} - \cos(\varphi - \varphi')) dz' d\varphi'}{g(\bar{r}, 1, \varphi - \varphi', \bar{z} - tz')} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{(\bar{r} - r' \cos(\varphi - \varphi')) r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z})} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{(\bar{r} - r' \cos(\varphi - \varphi')) r' dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z} - t)} \right]; \quad (21)$$

$$H_\varphi^R(r, \varphi, z) = \frac{\mu - 1}{4\pi} \left[t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_1(\varphi', z') \frac{\sin(\varphi - \varphi') dz' d\varphi'}{g(\bar{r}, 1, \varphi - \varphi', \bar{z} - tz')} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_2(r', \varphi') \frac{\sin(\varphi - \varphi') r'^2 dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z})} + \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \psi_3(r', \varphi') \frac{\sin(\varphi - \varphi') r'^2 dr' d\varphi'}{g(\bar{r}, r', \varphi - \varphi', \bar{z} - t)} \right], \quad (22)$$

а $H_z^R(r, \varphi, z)$ определено в (20). В приведенных выше формулах параметр t определен в (14),

$$\bar{r} := r/R, \quad \bar{z} := z/R, \quad (23)$$

а $\psi_1(\varphi, z)$, $\psi_2(r, \varphi)$, $\psi_3(r, \varphi)$ суть решения системы (11)—(13).

Таким образом, основной трудностью при вычислении поля реакции конечного цилиндра является предварительное решение системы трех двумерных интегральных уравнений (11)—(13). Дальнейшей целью является сведение решения этой системы к решению некоторого количества систем трех одномерных интегральных уравнений.

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [6, с. 254] показано, что решение основного уравнения магнитостатики (1) непрерывно в области Ω и имеет правильно непрерывный след на ее поверхности. Отсюда следует непрерывность функций в (15), а потому — сходимость их разложения в ряд Фурье по угловой переменной φ . Поэтому решение системы (11)—(13) будем искать в виде разложения в тригонометрический ряд:

$$\psi_1(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(1)}(z) \cos n\varphi + b_n^{(1)}(z) \sin n\varphi); \quad (24)$$

$$\psi_2(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(2)}(r) \cos n\varphi + b_n^{(2)}(r) \sin n\varphi); \quad (25)$$

$$\psi_3(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(3)}(r) \cos n\varphi + b_n^{(3)}(r) \sin n\varphi) \quad (26)$$

с искомыми функциями:

$$\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}, \quad z, r \in [0, 1], \quad (27)$$

считая известными коэффициенты:

$$\left\{ a_n^{(01)}(z), a_n^{(02)}(r), a_n^{(03)}(r) \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ b_n^{(01)}(z), b_n^{(02)}(r), b_n^{(03)}(r) \right\}_{n=1}^{\infty}, z, r \in [0, 1] \quad (28)$$

аналогичного разложения функций в (16):

$$\Psi_1^0(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(01)}(z) \cos n\varphi + b_n^{(01)}(z) \sin n\varphi); \quad (29)$$

$$\Psi_2^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(02)}(r) \cos n\varphi + b_n^{(02)}(r) \sin n\varphi); \quad (30)$$

$$\Psi_3^0(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(03)}(r) \cos n\varphi + b_n^{(03)}(r) \sin n\varphi). \quad (31)$$

Приведем некоторые формулы, которые будут использованы в дальнейших преобразованиях. Пусть $F(\varphi)$ — некоторая 2π -периодическая функция. Тогда для любых чисел a , b и любых $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a \cos n\varphi' + b \sin n\varphi') F(\varphi' - \varphi) d\varphi' = (ac_n + bd_n) \cos n\varphi + (bc_n - ad_n) \sin n\varphi, \quad (32)$$

где $c_n := \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$, $d_n := \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$. Далее, интеграл:

$$\int_0^{\pi} (a + b \cos \varphi)^{\nu} \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} D(a, b, m, \nu), & a > b > 0 \\ (-1)^m D(a, b, m, \nu), & b < 0, a > |b| \end{cases}, \quad (33)$$

$$D(a, b, m, \nu) := \pi(a^2 - b^2)^{\nu/2} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(m+\nu+1)} P_{\nu}^m \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \nu \neq -1, -2, \dots$$

Здесь $P_{\nu}^m(\cdot)$ — присоединенная функция Лежандра, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Формула (32) выводится стандартными преобразованиями, а формула (33) следует из интегрального представления [9, с. 969] [10, с. 158]:

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi \right)^{\nu} \cos m\varphi d\varphi, \text{ если положить } z = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Отметим, что приведенная в [11, с. 414] формула для интеграла в (33) неверна для случая $b < 0$, $a > |b|$, m — нечетное.

После подстановки разложений (24)—(26), (29)—(31) в систему (11)—(13), длительных преобразований (с использованием формул (32) и (33), рекуррентных формул для присоединенных полиномов Лежандра) с последующим приравниванием соответствующих коэффициентов Фурье в правых и левых частях получившихся равенств получаем для определения искомых функций (27) системы одномерных интегральных уравнений. А именно, функции $\left\{ a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r) \right\}_{n=0}^{\infty}$, $z, r \in [0, 1]$ являются решением системы:

$$\begin{aligned} & a_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \right. \\ & \left. + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(01)}(z); \end{aligned} \quad (34)$$

$$a_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(02)}(r); \quad (35)$$

$$a_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} a_n^{(03)}(r). \quad (36)$$

Функции $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$, $z, r \in [0, 1]$ являются решением системы:

$$b_n^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(1, r', tz) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(01)}(z); \quad (37)$$

$$b_n^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(02)}(r); \quad (38)$$

$$b_n^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} b_n^{(03)}(r). \quad (39)$$

В системах (34)—(39) приняты обозначения:

$$\alpha_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} b \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n - \frac{1}{2})} \left\{ \left[a^2 - \frac{n(a^2 + b^2 + q^2)}{2n+1} \right] P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \frac{2ab}{4n^2 - 1} P_{\frac{1}{2}}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right\}; \quad (40)$$

$$\gamma_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} b q \delta(a, b, q)}{\Gamma(n - \frac{1}{2})} P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)); \quad (41)$$

$$\delta(a, b, q) := \left[(a^2 + b^2 + q^2)^2 - 4a^2 b^2 \right]^{\frac{3}{4}}, \quad \varepsilon(a, b, q) := \left[1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2 + q^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Отметим, что выписанные две системы отличаются только правыми частями.

6. ВЫРАЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПОЛЯ РЕАКЦИИ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ (34)—(36) И (37)—(39)

Подставляя в формулы (20)—(22) выражения для функций $\psi_1(\varphi, z)$, $\psi_2(r, \varphi)$, $\psi_3(r, \varphi)$ из (24)—(26), после длительных преобразований с учетом формул (32), (33) и свойств присоединенных функций Лежандра получаются следующие выражения для цилиндрических компонент поля реакции:

$$H_r^R(r, \varphi, z) = \sqrt{\pi}(\mu-1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \alpha_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \alpha_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
H_\varphi^R(r, \varphi, z) = & -\sqrt{\pi}(\mu-1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] - \right. \\
& \left. - \sin n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \beta_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \beta_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}, \tag{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^R(r, \varphi, z) = & \sqrt{\pi}(\mu-1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos n\varphi \left[t \int_0^1 a_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 a_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \int_0^1 a_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] + \right. \\
& \left. + \sin n\varphi \left[t \int_0^1 b_n^{(1)}(z') \gamma_n(\bar{r}, 1, \bar{z} - tz') dz' + \int_0^1 b_n^{(2)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z}) dr' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 b_n^{(3)}(r') \gamma_n(\bar{r}, r', \bar{z} - t) dr' \right] \right\}, \tag{45}
\end{aligned}$$

$$\beta_n(a, b, q) := \frac{(-1)^{n+1} nb \delta(a, b, q)}{a \Gamma(n - \frac{1}{2})} \left[\frac{a^2 + b^2 + q^2}{2n + 1} P_{\frac{1}{2}}^n(\varepsilon(a, b, q)) + \frac{4ab}{4n^2 - 1} P_{\frac{1}{2}}^{n+1}(\varepsilon(a, b, q)) \right]. \tag{46}$$

Итак, цилиндрические координаты поля реакции $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in R^3 \setminus S$ ($S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$) вычисляются по формулам (43)—(45), где функции $\{a_n^{(1)}(z), a_n^{(2)}(r), a_n^{(3)}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n^{(1)}(z), b_n^{(2)}(r), b_n^{(3)}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ суть решения систем одномерных интегральных уравнений (34)—(36) и (37)—(39).

Отметим, что при переходе к более общему случаю (см. рисунок), когда нижнее основание цилиндра находится в плоскости $z = d$ при произвольном d (до этого рассматривался случай $d = 0$), все приведенные выше формулы остаются справедливыми, кроме следующих небольших изменений: в формуле (23) вместо $\bar{z} := z/R$ должно стоять:

$$\bar{z} := (z - d)/R, \tag{47}$$

а формулы (15) и (16) заменяются на следующие:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\varphi, z) := & \varphi_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d), & \psi_2(r, \varphi) := & \varphi_2(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d), \\
\psi_3(r, \varphi) := & \varphi_3(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l); \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^0(\varphi, z) := & \varphi_1^0(R \cos \varphi, R \sin \varphi, lz + d), & \psi_2^0(r, \varphi) := & \varphi_2^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d), \\
\psi_3^0(r, \varphi) := & \varphi_3^0(Rr \cos \varphi, Rr \sin \varphi, d + l). \tag{49}
\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что в формулах (43)—(45) все ядра в интегралах не имеют особенностей, поскольку точка наблюдения не принадлежит поверхности цилиндра $\mathbf{r} \notin S$. В интегральных же уравнениях (34)—(36) и (37)—(39) только ядро $\alpha_n(1, 1, t \cdot (z - z'))$ в первом интеграле формул (34) и (37) имеет логарифмическую особенность при $z' = z$, поскольку можно показать, что

$\alpha_n(a, a, q) = -\frac{1}{4a\pi\sqrt{\pi}} \ln q + O(1)$, $q \rightarrow 0+0$. Эта особенность вполне интегрируема, однако этот факт надо учитывать при численном решении систем (34) и (37), используя простые известные приемы избавления от сингулярности.

7. ПОЛЕ РЕАКЦИИ НА ОСИ ЦИЛИНДРА

Выведем формулы для вычисления поля реакции на оси цилиндра, переходя к пределу $r \rightarrow 0 + 0$ (а потому и $\bar{r} \rightarrow 0 + 0$) в выражениях (43)—(45). Для этого необходимо найти предельные значения $\alpha_n(a, b, q)$, $\beta_n(a, b, q)$ и $\gamma_n(a, b, q)$ при $a \rightarrow 0 + 0$. Будем использовать соотношения:

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \delta(a, b, q) = (b^2 + q^2)^{-3/2}, \quad \lim_{a \rightarrow 0+0} \varepsilon(a, b, q) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 1+0} P_{1/2}^n(z) = \delta_{n,0}, \quad (50)$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Значения первых двух пределов получаются непосредственно из формул (42), а последнего вытекает из соотношения [10, с. 164]

$$P_\nu^n(z) = \frac{2^{-n/2} \Gamma(\nu + n + 1)}{n! \Gamma(\nu - n + 1)} (z-1)^{n/2} + O((z-1)^{n/2+1}), \quad z \rightarrow 1+0. \quad (51)$$

Для $n = 0$ из (40), (41) с учетом (50) легко получить:

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \alpha_0(a, b, q) = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0+0} \gamma_0(a, b, q) = \frac{bq(b^2 + q^2)^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}. \quad (52)$$

Рассмотрим $n = 1, 2, \dots$. Из (51) следует $\lim_{z \rightarrow 1+0} P_{1/2}^n(z) / \sqrt{z-1} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \delta_{n,1}$. Переходя с использованием этого соотношения и (50) к пределу $a \rightarrow 0 + 0$ в (40), с учетом (52) получаем для $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \alpha_n(a, b, q) = -\frac{b^2(b^2 + q^2)^{-3/2}}{4\sqrt{\pi}} \delta_{n,1}. \quad (53)$$

Аналогично выводятся предельные формулы для $\beta_n(a, b, q)$ и $\gamma_n(a, b, q)$:

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \beta_n(a, b, q) = \frac{b^2(b^2 + q^2)^{-3/2}}{4\sqrt{\pi}} \delta_{n,1}, \quad \lim_{a \rightarrow 0+0} \gamma_n(a, b, q) = \frac{bq(b^2 + q^2)^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \delta_{n,0}, \quad (54)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Переходя теперь к пределу $\bar{r} \rightarrow 0 + 0$ в (43)—(45) с учетом (53), (54), получаем следующие выражения для цилиндрических компонент поля реакции на оси цилиндра (без точек на его поверхности: $z \neq d$, $z \neq d + l$):

$$\begin{aligned} H_r^R(0, \varphi, z) &= -\frac{\mu-1}{4} (A(z) \cos \varphi + B(z) \sin \varphi), \\ H_\varphi^R(0, \varphi, z) &= -\frac{\mu-1}{4} (B(z) \cos \varphi - A(z) \sin \varphi), \quad H_z^R(0, \varphi, z) = \frac{\mu-1}{2} C(z), \end{aligned} \quad (55)$$

где обозначено:

$$A(z) := t \int_0^1 \frac{a_1^{(1)}(z') dz'}{[1 + (\bar{z} - tz')^2]^{3/2}} + \int_0^1 \frac{a_1^{(2)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} + \int_0^1 \frac{a_1^{(3)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{3/2}}; \quad (56)$$

$$B(z) := t \int_0^1 \frac{b_1^{(1)}(z') dz'}{[1 + (\bar{z} - tz')^2]^{3/2}} + \int_0^1 \frac{b_1^{(2)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} + \int_0^1 \frac{b_1^{(3)}(r') r'^2 dr'}{[r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{3/2}}; \quad (57)$$

$$C(z) := t \int_0^1 \frac{a_0^{(1)}(z')(\bar{z} - tz') dz'}{[1 + (\bar{z} - tz')^2]^{3/2}} + \bar{z} \int_0^1 \frac{a_0^{(2)}(r')r' dr'}{[r'^2 + \bar{z}^2]^{3/2}} + (\bar{z} - t) \int_0^1 \frac{a_0^{(3)}(r')r' dr'}{[r'^2 + (\bar{z} - t)^2]^{3/2}}. \quad (58)$$

Переходя в (55) от цилиндрических координат вектора \mathbf{H}^R к декартовым $H_x^R = H_r^R \cos \varphi - H_\varphi^R \sin \varphi$, $H_y^R = H_r^R \sin \varphi + H_\varphi^R \cos \varphi$, $H_z^R = H_z^R$, получаем следующие выражения декартовых координат $H_x^R(x, y, z)$, $H_y^R(x, y, z)$, $H_z^R(x, y, z)$ поля реакции $\mathbf{H}^R(x, y, z)$ на оси цилиндра ($z \neq d$, $z \neq d + l$):

$$H_x^R(0, 0, z) = -\frac{\mu-1}{4} A(z), \quad H_y^R(0, 0, z) = -\frac{\mu-1}{4} B(z), \quad H_z^R(0, 0, z) = \frac{\mu-1}{2} C(z), \quad (59)$$

где функции $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ определены в (56)—(58), $\{a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)\}$ и $\{a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)\}$ суть решения системы (34)—(36) для $n = 0$ и $n = 1$ соответственно, а $\{b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)\}$ есть решение (37)—(39) для $n = 1$.

8. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОГО ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим часто встречающуюся ситуацию, когда внешнее поле постоянно: $\mathbf{H}^0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\}$, где H_x^0, H_y^0, H_z^0 — константы. В этом случае нормальные составляющие этого поля на поверхности $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ цилиндра имеют вид:

$$H_n^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{R} (H_x^0 x + H_y^0 y), \quad H_n^0(\mathbf{r}) = -H_z^0, \quad H_n^0(\mathbf{r}) = H_z^0$$

для $\mathbf{r} = \{x, y, z\} \in S_1, S_2, S_3$ соответственно. Поэтому, учитывая формулы (6) и (49), имеем: $\psi_1^0(\varphi, z) = H_x^0 \cos \varphi + H_y^0 \sin \varphi$, $\psi_2^0(r, \varphi) = -H_z^0$, $\psi_3^0(r, \varphi) = H_z^0$. Тогда, в соответствии с (29) — (31), имеем $a_n^{(01)}(z) = H_x^0 \delta_{n,1}$, $b_n^{(01)}(z) = H_y^0 \delta_{n,1}$, $a_n^{(02)}(r) = -H_z^0 \delta_{n,0}$, $b_n^{(02)}(r) = 0$, $a_n^{(03)}(r) = H_z^0 \delta_{n,0}$, $b_n^{(03)}(r) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. После подстановки этих значений в правые части (34)—(36), (37)—(39) легко проверить, что получившимся системам будут удовлетворять такие функции, что $a_n^{(i)} \equiv 0$, $b_n^{(i)} \equiv 0$ ($i = 1, 2, 3$; $n = 2, 3, \dots$), функции $a_0^{(1)}(z), a_0^{(2)}(r), a_0^{(3)}(r)$ суть решение системы:

$$a_0^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_0^{(1)}(z') \alpha_0(1, 1, t(z-z')) dz' + \right. \quad (60)$$

$$\left. + \int_0^1 a_0^{(2)}(r') \alpha_0(1, r', tz) dr' + \int_0^1 a_0^{(3)}(r') \alpha_0(1, r', t(1-z)) dr' \right] = 0;$$

$$a_0^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_0^{(1)}(z') \gamma_0(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 a_0^{(3)}(r') \gamma_0(r, r', t) dr' \right] = -\frac{2}{\mu+1} H_z^0; \quad (61)$$

$$a_0^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_0^{(1)}(z') \gamma_0(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 a_0^{(2)}(r') \gamma_0(r, r', t) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} H_z^0, \quad (62)$$

функции $a_1^{(1)}(z), a_1^{(2)}(r), a_1^{(3)}(r)$ — решение системы:

$$a_1^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_1^{(1)}(z') \alpha_1(1, 1, t(z-z')) dz' + \right. \quad (63)$$

$$\left. + \int_0^1 a_1^{(2)}(r') \alpha_1(1, r', tz) dr' + \int_0^1 a_1^{(3)}(r') \alpha_1(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} H_x^0;$$

$$a_1^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_1^{(1)}(z') \gamma_1(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 a_1^{(3)}(r') \gamma_1(r, r', t) dr' \right] = 0; \quad (64)$$

$$a_1^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 a_1^{(1)}(z') \gamma_1(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 a_1^{(2)}(r') \gamma_1(r, r', t) dr' \right] = 0, \quad (65)$$

функции $b_1^{(1)}(z), b_1^{(2)}(r), b_1^{(3)}(r)$ — решение системы:

$$b_1^{(1)}(z) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_1^{(1)}(z') \alpha_1(1, 1, t(z-z')) dz' + \int_0^1 b_1^{(2)}(r') \alpha_1(1, r', tz) dr' + \int_0^1 b_1^{(3)}(r') \alpha_1(1, r', t(1-z)) dr' \right] = \frac{2}{\mu+1} H_y^0; \quad (66)$$

$$b_1^{(2)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_1^{(1)}(z') \gamma_1(r, 1, tz') dz' + \int_0^1 b_1^{(3)}(r') \gamma_1(r, r', t) dr' \right] = 0; \quad (67)$$

$$b_1^{(3)}(r) - 2\lambda\sqrt{\pi} \left[t \int_0^1 b_1^{(1)}(z') \gamma_1(r, 1, t(1-z')) dz' + \int_0^1 b_1^{(2)}(r') \gamma_1(r, r', t) dr' \right] = 0, \quad (68)$$

где согласно (40), (41):

$$\alpha_0(1, b, q) = \frac{b\delta(1, b, q)}{2\sqrt{\pi}} \left[P_{\frac{1}{2}}^0(\varepsilon(1, b, q)) - 2bP_{\frac{1}{2}}^1(\varepsilon(1, b, q)) \right]; \quad (69)$$

$$\gamma_0(a, b, q) = \frac{bq\delta(a, b, q)}{2\sqrt{\pi}} P_{\frac{1}{2}}^0(\varepsilon(a, b, q)); \quad (70)$$

$$\alpha_1(1, b, q) = \frac{b\delta(1, b, q)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{2-b^2-q^2}{3} P_{\frac{1}{2}}^1(\varepsilon(1, b, q)) + \frac{2b}{3} P_{\frac{1}{2}}^2(\varepsilon(1, b, q)) \right]; \quad (71)$$

$$\gamma_1(a, b, q) = \frac{bq\delta(a, b, q)}{\sqrt{\pi}} P_{\frac{1}{2}}^1(\varepsilon(a, b, q)). \quad (72)$$

В соответствии с этим, для случая постоянного внешнего поля формулы (43)—(45) для цилиндрических координат поля реакции \mathbf{H}^R упрощаются таким образом, что в (43) и (45) ненулевыми оказываются только два первых члена ряда, а в (44)—только первый член ряда.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе, и план практической реализации предложенного подхода.

1. В рамках обсуждаемого подхода нахождение напряженности результирующего магнитного поля от однородного цилиндра конечных размеров, помещенного во внешнее магнитное поле произвольной конфигурации, сводится к решению некоторого количества систем трех одномерных линейных интегральных уравнений (34)—(36) и (37)—(39), после чего компоненты напряженности вычисляются непосредственно по формулам (43)—(45).

2. Приведен вид упомянутых систем и формул для компонент напряженности поля для частных случаев постоянного внешнего поля и поля на оси цилиндра.

3. Авторы отдают себе отчет в том, что для завершения исследования предлагаемого подхода нужна его компьютерная реализация, позволяющая для конкретных физических и геометри-

ческих параметров задачи построить графики результирующих полей, провести тестирование полученных результатов на их соответствие физическим законам явления, выполнить проверку работы данного подхода и его программной реализации на предельных частных случаях с известными аналитическими ответами, оценить быстроту сходимости и т.д. Однако в рамках одной настоящей статьи это сделать невозможно из-за ограничения на ее объем. Упомянутая выше работа уже практически завершена и будет представлена отдельной статьей.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Квант» (“Quantum”) № АААА-А18-118020190095-4 и при поддержке проекта №18-10-2-8 Программы УрО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сапожников А.Б. Теоретические основы магнитной дефектоскопии металлических тел. Томск: Изд-во ТГУ, 1980. 308 с.
2. Дякин В.В., Кудряшова О.В. Дефект в цилиндре // Дефектоскопия. 2012. № 4. С. 41—55.
3. Dyakin V.V., Kudryashova O.V. et al. To the Calculation of the Field of a Finite Magnetic Cylinder // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2019. V. 55. No. 10. P. 734—745. [Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К расчету поля конечного магнитного цилиндра // Дефектоскопия. 2019. № 10. С. 24—34.]
4. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. О проблемах использования пакетов универсальных программ для решения задач магнитостатики // Дефектоскопия. 2018. № 11. С. 23—34.
5. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
6. Дякин В.В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 404 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
8. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 423 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, произведений. Санкт-Петербург: БВХ-Петербург, 2011. 1232 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1981. 800 с.