

РЕКОНСТРУКЦИЯ АМПЛИТУДЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЕФЕКТА ПО СИГНАЛАМ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

© 2020 г. В.Н. Беркович^{1,*}, С.И. Буйло^{2,**}

¹Донской казачий государственный институт пищевых технологий и бизнеса (ДКГТПТиБ), филиал Московского государственного университета технологий и управления им. К.Г. Разумовского (Первый казачий университет), Россия 344007 Ростов-на-Дону, ул. Семашко, 55

²Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ЮФУ), Россия 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А
E-mail: *vberkovich@mail.ru; **sibulo@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.12.2019; после доработки 27.02.2020

Принята к публикации 03.03.2020

Рассмотрена задача об установившихся колебаниях, порождаемых дефектом в упругом материале, находящемся на стадии предразрушения в условиях плоского напряженного состояния. Исследован процесс излучения акустической эмиссии (АЭ) от дефекта, выходящего на свободную границу упругого тела. Поставлена задача восстановления амплитуд излучения дефекта по сигналам АЭ на свободной границе тела. Обратная задача восстановления исследована и решена на основе вариационного подхода. Приведены данные численного расчета параметров излучения для алюминия.

Ключевые слова: акустическая эмиссия, граничное интегральное уравнение, интегральное преобразование, математическая модель, неразрушающий контроль, обратная задача, предразрушающее состояние, плоское напряженное состояние, смешанная краевая задача, тензор Грина.

DOI: 10.31857/S0130308220040053

Как известно, метод акустической эмиссии (АЭ) обеспечивает уже вполне удовлетворительную достоверность при оценке стадий предразрушения исследуемого материала [1—5]. Тем не менее проблема повышения достоверности результатов АЭ диагностики всегда находилась в поле зрения специалистов. Одним из аналитических подходов к решению указанной проблемы является использование математического моделирования волнового процесса при появлении сигналов АЭ для получения дополнительной информации о взаимосвязи параметров АЭ с параметрами дефекта. Данный подход был реализован нами в работе [6] в рамках классической постановки краевой задачи динамической теории упругости, но лишь для случая антиплоской деформации, которая, к сожалению, неизбежно приводит к наличию трансляционной симметрии, что не является характерным для случаев возникновения АЭ излучения, имеющего достаточно локальный характер. Моделирование АЭ от дефекта в условиях плоского напряженного состояния представляется, на наш взгляд, более адекватным отражением изучаемого процесса.

Цель работы — разработка метода повышения достоверности восстановления амплитуд излучения растущего дефекта в условиях плоского напряженного состояния на основе построения физико-математической модели взаимосвязи между параметрами акустического излучения дефекта внутри упругого тела и откликом свободной поверхности этого тела.

Сформулированная проблема связана с решением обратных задач динамической теории упругости [7]. В настоящей работе развивается подход, который позволяет осуществить восстановление амплитуд излучения дефекта по сигналам АЭ, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений.

Для целей разработки математической модели и анализа рассматриваемой проблемы могут быть использованы соотношения плоской деформации теории упругости с параметрами λ^*, ν^* , которые, как известно [8], переходят в соответствующие соотношения плоского напряженного состо-

яния при замене коэффициента Пуассона ν^* на дробь $\nu = \frac{\nu^*}{1 + \nu^*}$ и параметра Лямэ λ^* на $\lambda = \frac{2\lambda^* \mu}{1 + 2\mu}$.

Описанные рассуждения порождают постановку следующей задачи.

1. Рассматривается математическая модель акустической эмиссии (АЭ) от линейного дефекта, выходящего под произвольным углом на границу упругого тела, находящегося в условиях плоского напряженного состояния. Поскольку в условиях нагружения тела сигналы АЭ излучает лишь последнее образовавшееся звено дефекта, ближайшее к свободной границе и, в конечном итоге,

выходящее на эту границу, будем рассматривать процесс распространения АЭ лишь от одного излучающего дефекта.

В рассматриваемой задаче тело моделируется упругой полуплоскостью, а линейный дефект — разрезом J конечной длины l , выходящим на границу Γ под углом α (рис.1).

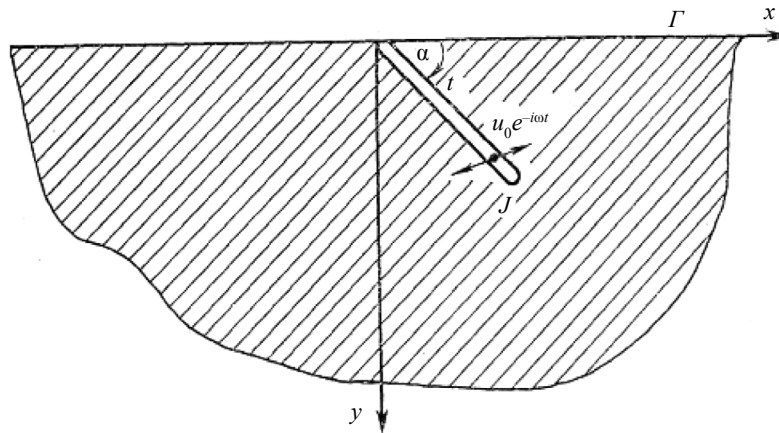


Рис. 1. Линейный дефект J , выходящий на свободную границу полупространства.

Предполагается, что берега разреза $J_{\pm}$ являются источниками плоских гармонических колебаний с векторами смещений $\mathbf{u}_0^{\pm}(x, y)e^{-i\omega t}$, $(x, y) \in J_{\pm}$.

В предположении установившихся колебаний изучается взаимосвязь между распределениями амплитуды вектора смещений $\mathbf{v}(x, y, t)$ на свободной границе Γ и на границе дефекта J . При отыскании вектора смещений точек полупространства в виде $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{u}(x, y)e^{-i\omega t}$ указанная постановка приводит к следующей смешанной краевой задаче для динамических уравнений плоской теории упругости [9] относительно комплексных амплитуд $\mathbf{u} = \{u_1(x, y), u_2(x, y)\}$:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(x, y) + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D\omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{J_{\pm}} = \mathbf{u}_0(x, y), \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})|_{\Gamma} = \mathbf{0},$$

где $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ — набла-оператор Гамильтона; λ, μ — параметры Лямэ; D — плотность материала; l — длина дефекта; $\mathbf{u}_0$ — амплитуда вектора смещений берегов дефекта; $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ — амплитуда вектора напряжений. Источники установившихся колебаний на границах разреза $J_{\pm}$ предполагаются когерентными и равноинтенсивными. При $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ смещения и напряжения исчезают и, кроме того, удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда [10].

Замечание 1. Появление импульсов АЭ от дефекта связано с высвобождением упругой энергии в зоне подрастания дефекта и генерирует, вообще говоря, нестационарный волновой процесс в упругом теле, возбуждающий колебания обеих границ дефекта, амплитуды которых неизвестны и подлежат определению. Поэтому размещение когерентных источников установившихся колебаний равной интенсивности на берегах дефекта будет приближенно описывать данный процесс и является, в некотором смысле, одним из промежуточных этапов математического моделирования этого процесса. Освобождение от указанных ограничений возможно на следующих этапах моделирования процесса АЭ при дальнейшем развитии данного подхода.

Для представления смещений, удовлетворяющих (1), воспользуемся формулой Бетти [10]:

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \hat{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) - \mathbf{u}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) \right\} dl_n, \quad (2)$$

где C — граница плоской области; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе C ; (x, y) — точка наблюдения; $\hat{\mathbf{G}}$ — тензор Грина для смещений; $\mathbf{T}^n$ — дифференциальный оператор напряжений. В рассматриваемом случае тензор $\hat{\mathbf{G}}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{T}^n \hat{\mathbf{G}} \Big|_{y=0} = \hat{\mathbf{0}} \quad (3)$$

и представляется в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) = \hat{\mathbf{G}}_0(kR^-) + \hat{\mathbf{G}}_0(kR^+) + \hat{\mathbf{G}}_1(x, y | \xi, \eta); \quad (4)$$

$$R^\pm = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y \pm \eta)^2}, \quad K^2 = D\omega^2 \mu^{-1}.$$

В выражении (4) тензора Грина $\hat{\mathbf{G}}$ использован фундаментальный тензор колебаний $\hat{\mathbf{G}}_0 = \{\hat{g}_{ij}(0)\}$, построенный в [11], тензор $\hat{\mathbf{G}}_1 = \{\hat{g}_{ij}(1)\}$ характеризует волноводное действие границы, связан с появлением поверхностных волн Релея и, как будет показано ниже, позволяет удовлетворить условию (3).

2. Получим вспомогательные соотношения для фундаментального тензора колебаний $\hat{\mathbf{G}}_0$. Его представление в инвариантной форме Лурье [12] имеет следующий вид ($\hat{\mathbf{E}}$ — единичный тензор):

$$\hat{\mathbf{G}}_0(x, y | \xi, \eta) = \frac{1}{\mu} H_0^{(1)}(kR) \hat{\mathbf{E}} - \frac{1}{D\omega^2} \nabla \nabla [H_0^{(1)}(\gamma kR) - H_0^{(1)}(kR)]; \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \{\delta_{ij}\}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \gamma^2 = a_p / a_s = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad k^2 = D\omega^2 \mu^{-1}.$$

В соотношении (5) $\nabla \nabla$ — тензор в форме диадного произведения вектор-операторов ∇ Гамильтона; $H_0^{(1)}(kR)$ — функция Ханкеля нулевого порядка; ω — круговая частота; k — волновое число поперечных волн; a_p, a_s — скорости продольных и поперечных волн соответственно; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; R — расстояние между точками «наблюдения» (x, y) и «источника» (ξ, η) . Для целей дальнейшего исследования представим функция Ханкеля в выражении (5) с помощью функции Макдональда $K_0(\kappa R)$ [13]:

$$H_0^{(1)}(kR) = \frac{2}{i\pi} K_0(\kappa R), \quad R = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi)}, \quad \kappa = -ik,$$

где ψ, φ — углы между положительным направлением оси абсцисс и полярными радиусами (ρ, r) точки «источника» и точки «наблюдения» соответственно. Тогда фундаментальный тензор колебаний примет вид:

$$\mu \hat{\mathbf{G}}_0(x, y | \xi, \eta) = \frac{2}{i\pi} \left\{ K_0(\kappa R) \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla [K_0(\gamma \kappa R) - K_0(\kappa R)] \right\}.$$

Для получения матричного представления этого тензора в полярной системе координат (ρ, ψ) необходимо в предыдущую формулу внести выражение оператора Гамильтона

$\nabla = \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\psi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$ в полярной системе координат и выполнить действия:

$$\nabla \nabla = \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\psi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\psi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \mathbf{e}_\psi \mathbf{e}_\psi \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\psi + \mathbf{e}_\psi \mathbf{e}_\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right).$$

При получении равенства были использованы методики преобразования тензоров в их диадном представлении [12], а также соотношения, получаемые непосредственно:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_\psi}{\partial \rho} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \psi} = \mathbf{e}_\psi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\psi}{\partial \psi} = -\mathbf{e}_\rho, \quad (6)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \quad \nabla \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\psi \mathbf{e}_\psi, \quad \nabla \mathbf{e}_\psi = -\frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho.$$

Учитывая формулы дифференцирования для функций Макдональда [14]:

$$\left(\frac{d}{zdz} \right)^m \left[z^{-\nu} K_{\nu+m}(z) \right] = (-1)^m z^{-\nu-m} K_{\nu+m}(z),$$

придем к соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} K_0(\kappa R) &= -\kappa K_1(\kappa R) \frac{\rho - r \cos(\psi - \varphi)}{R} = -\kappa K_1(\kappa R) \cos \theta; \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} K_0(\kappa R) &= \frac{1}{2} \kappa^2 [K_2(\kappa R) \cos \theta + K_0(\kappa R)]; \\ \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) K_0(\kappa R) &= -\frac{i\pi}{2} \frac{\delta(\rho - r) \delta(\psi - \varphi)}{\rho} - \frac{1}{2} \kappa^2 [K_2(\kappa R) \cos 2\theta - K_0(\kappa R)]; \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) K_0(\kappa R) &= \frac{1}{2} \kappa^2 K_2(\kappa R) \sin 2\theta, \quad \kappa = -ik, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака; θ — угол между полярным радиусом ρ источника и расстоянием R между точкой (ρ, ψ) локализации источника источником и точкой наблюдения (r, φ) . Используя соотношения (6), (7), получаем:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla [K_0(\gamma \kappa R) - K_0(\kappa R)] &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \left\{ [\gamma^2 \kappa^2 K_2(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_2(\kappa R)] \cos 2\theta + [\gamma^2 \kappa^2 K_0(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_0(\kappa R)] \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{e}_\psi \mathbf{e}_\psi \left\{ [\gamma^2 \kappa^2 K_2(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_2(\kappa R)] \cos 2\theta - [\gamma^2 \kappa^2 K_0(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_0(\kappa R)] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\psi + \mathbf{e}_\psi \mathbf{e}_\rho) [\gamma^2 \kappa^2 K_2(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_2(\kappa R)] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Тогда матричное представление тензора $\nabla \nabla [K_0(\gamma \kappa R) - K_0(\kappa R)]$ в полярной системе координат принимает вид:

$$\frac{1}{2} [\gamma^2 \kappa^2 K_2(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_2(\kappa R)] \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} [\gamma^2 \kappa^2 K_0(\gamma \kappa R) - \kappa^2 K_0(\kappa R)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основе полученных выражений приходим к следующему матричному представлению $\mathbf{G}$ фундаментального тензора колебаний $\mathbf{G}$ в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(r, \varphi | \rho, \psi) &= \mathbf{G}_0(r, \varphi | \rho, \psi) + \mathbf{G}_\gamma(r, \varphi | \rho, \psi); \\ \mu \mathbf{G}_0(r, \varphi | \rho, \psi) &= \frac{1}{i\pi} \left\{ K_0(\kappa R) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - K_2(\kappa R) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \right\}; \\ \mu \mathbf{G}_\gamma(r, \varphi | \rho, \psi) &= \frac{1}{i\pi} \gamma^2 \left\{ K_0(\gamma \kappa R) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + K_2(\gamma \kappa R) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \right\}; \\ R &= \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi)}, \quad \kappa = -ik, \quad \gamma^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения интегрального представления фундаментальной матрицы колебаний $\mathbf{G}_0(r, \varphi | \rho, \psi)$ (8) следует воспользоваться формулой Крама [14], из которой вытекают соотношения:

$$K_0(\kappa R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-i\tau}(\kappa \rho) K_{-i\tau}(\kappa r) \operatorname{ch}(\pi - |\psi - \varphi|) \tau d\tau; \quad (9)$$

$$K_2(\kappa R) \begin{Bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} K_{2-i\tau}(\kappa \rho) \operatorname{ch}(\pi - |\psi - \varphi|) \tau \\ \operatorname{Im} K_{2-i\tau}(\kappa \rho) \operatorname{sh}(\pi - |\psi - \varphi|) \tau \end{Bmatrix} K_{-i\tau}(\kappa r) d\tau.$$

При использовании матричного представления фундаментального тензора колебаний будем применять обозначения:

$$\mathbf{G}_0(r, \varphi | \rho, \psi) = \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\psi} \\ g_{\psi\rho} & g_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\rho}^{(1)} & u_{\rho}^{(2)} \\ u_{\psi}^{(1)} & u_{\psi}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{e}_{\rho} u_{\rho}^{(1)} + \mathbf{e}_{\psi} u_{\psi}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{e}_{\rho} u_{\rho}^{(2)} + \mathbf{e}_{\psi} u_{\psi}^{(2)} \end{cases}, \quad (10)$$

где для соответствующих компонент $u_{\rho}^{(2)} = g_{\rho\psi} = g_{\psi\rho} = u_{\psi}^{(1)}$ имеют место указанные равенства в силу симметрии фундаментального тензора колебаний. При этом каждая компонента матричного представления тензора колебаний содержит два слагаемых в соответствии с (4).

Окончательные матричные представления тензоров (4) с помощью (9) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{G}_0(r, \varphi | \rho, \psi) &= \frac{1}{i\pi} \left\{ K_0(\kappa R) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - K_2(\kappa R) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \right\}; \\ \mathbf{E} &= \{ \delta_{ij} \}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \gamma^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (i, j = 1, 2); \\ \hat{\mathbf{G}}_1(x, y | \xi, \eta) &= \{ g_{ij}(1) \}, \quad i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad (11)$$

$$g_{11}(1) = \frac{1}{k^2 \mu} \int_L \left\{ -\sigma_1 \sigma_2 e^{-(y+\eta)\sigma_2} - \alpha^2 e^{-(y+\eta)\sigma_1} + s \left[e^{-y\sigma_1 - \eta\sigma_2} + e^{-y\sigma_2 - \eta\sigma_1} \right] \right\} \frac{z^2 \sigma_2}{R(z)} e^{-iz|x-\xi|} dz;$$

$$\begin{aligned} g_{12}(1) &= \frac{1}{k^2 \mu} \int_L \left\{ -\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 e^{-(y+\eta)\sigma_2} + e^{-(y+\eta)\sigma_1} \right\} \frac{iz}{R(z)} e^{-i\alpha|x-\xi|} dz + \\ &+ \frac{1}{k^2 \mu} \int_L \left\{ s \left[\alpha^2 e^{-y\sigma_1 - \eta\sigma_2} + \sigma_1 \sigma_2 e^{-y\sigma_2 - \eta\sigma_1} \right] \right\} \frac{iz}{R(z)} e^{-iz|x-\xi|} dz; \end{aligned}$$

$$g_{21}(1) = -g_{12}(1), \quad s = z^2 - \frac{1}{2}k^2, \quad R(z) = s^2 - z^2 \sigma_1 \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{z^2 - \gamma^2 K^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{z^2 - K^2}.$$

Выбор компонент тензора $\hat{\mathbf{G}}_1$ позволяет удовлетворить условию (3). При получении компонент тензора $\hat{\mathbf{G}}_1$ в формулах (11) были использованы методы интегральных преобразований, а также представление функции Ханкеля $H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2})$ в форме интеграла Фурье по переменной x [14], ν — коэффициент Пуассона. В соответствии с принципом предельного поглощения [11], контур интегрирования L выходит из $-\infty$, обходит сверху отрицательный корень уравнения Релея $R(z) = 0$ и точки ветвления $z = -K$, $z = -\gamma K$, пересекает в нуле вещественную ось и, обходя снизу положительный корень уравнения Релея и точки ветвления $z = K$, $z = \gamma K$, уходит в $+\infty$. Дальнейшие преобразования компонент g_{ij} осуществляются с использованием известной в теории аналитических функций техники преобразования контурных интегралов и не приводятся ввиду их громоздкости.

3. Получим граничные интегральные соотношения между смещениями и напряжениями на дефекте J , моделирующем излучающее и выходящее на свободную границу Γ дефекта J . Выбирая

в (1.2) $C = \Gamma \cup J$, учитывая граничные условия (3), (4) и условия убывания на бесконечности, приходим к соотношению (T — оператор напряжений Лурье [12]):

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{J^+} \left\{ \hat{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta)]_J - [\mathbf{u}(\xi, \eta)]_J \cdot \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) \right\} dl_n; \quad (12)$$

$$2[\boldsymbol{\sigma}]_J = \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-, \quad 2[\mathbf{u}]_J = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-.$$

При наличии когерентности и равной интенсивности излучения источников на правом J^+ и J^- левом берегах разреза скачок смещений $[\mathbf{u}]_J$ обращается в 0. Тогда, устремляя в (12) точку наблюдения (x, y) на свободную границу Γ , получаем следующее выражение вектора смещений свободной границы Γ (τ — локальная координата вдоль разреза):

$$\pi \mathbf{u}(x, 0) = \int_0^l [2\mathbf{G}_0(KR) + \mathbf{G}_1(x, 0 | \xi, \eta)] \cdot \mathbf{p}(\tau) d\tau; \quad (13)$$

$$R = \sqrt{x^2 + l^2 - 2x\tau \cos \alpha}, \quad |x| > l;$$

$$2\mathbf{p}(\tau) = \mu^{-1} [\boldsymbol{\sigma}(\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha)]_J, \quad \mathbf{p} = \{p_i\}, \quad \mathbf{u} = \{u_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Соотношения (13) являются соотношениями связи смещений свободной поверхности и скачка вектора напряжений $\mathbf{p}(\tau)$ и смещений на разрезе J .

Получим интегральное уравнение относительно скачка вектора напряжений $\mathbf{p}(t)$. Для этого в соотношении (12) устремим точку наблюдения (x, y) на правый берег разреза J_+ . В результате приходим к граничному интегральному уравнению (ГИУ):

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{\pi} \int_0^l \mathbf{k}(r, \rho) \cdot \mathbf{p}(\rho) d\rho = \mathbf{f}(r), \quad 0 \leq r \leq l; \quad (14)$$

$$\mathbf{k}(r, \rho) = \mathbf{G}_0(KR_1^-) + \mathbf{G}_0(KR_2^+) + \mathbf{G}_1(x, \eta | \xi, \eta);$$

$$R_1^- = |r - \rho|, \quad R_2^+ = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos 2\alpha};$$

$$\mathbf{f}(r) = l^{-1} \mathbf{u}^\pm(\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha), \quad \tau = lr.$$

Элементы матриц $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1$ определяются компонентами тензоров $\hat{\mathbf{G}}_0, \hat{\mathbf{G}}_1$ с помощью соотношений (10), (11). Полученное интегральное представление тензора $\hat{\mathbf{G}}$, позволяет представить оператора $\mathbf{K}$ левой части ГИУ (2.3), в виде $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, где оператор $\mathbf{K}_0$ порождается составляющими $\mathbf{G}_0$ ядра ГИУ и является однозначно обратимым оператором, а оператор $\mathbf{K}_1$, порождаемый составляющей $\mathbf{G}_1$ ядра ГИУ, — вполне непрерывным. Указанные результаты предварительно доказываются для случая $\kappa > 0$, а затем используются принципы аналитического продолжения в область комплексной плоскости κ , содержащую точку $\kappa = -ik$. Свойства операторов $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1$ в пространствах дробной гладкости [15] Соболева—Слободецкого $W_2^{\pm 1/2}(0, 1)$ детально рассмотрены в [16, 17]. Это позволяет свести ГИУ (14) к эквивалентной системе ГИУ II рода с вполне непрерывным оператором и сделать известные выводы о разрешимости, построить решение методом [16] и восстановить волновое поле в пространствах Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$.

4. Для реализации сформулированного подхода воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского [18] и введем функционал действия $H(\mathbf{u})$:

$$H(\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} a(\mathbf{v}) dt - \int_{t_1}^{t_2} b(\mathbf{v}) dt, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, t), \quad \forall t_2 > t_1 > 0, \quad (15)$$

где $W(\mathbf{v})$ — упругий потенциал относительно вектора смещений $\mathbf{v}$, D — плотность материала среды. Известно, что из условия стационарности $\delta H(\mathbf{v}) = 0$ функционала Гамильтона-Остроградского (15), вытекают все соотношения, определяющие начально-краевую задачу для системы уравнений теории упругости.

Для случая установившихся колебаний $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{u}(x, y) \exp(-i\omega t)$ в силу произвольности моментов времени $t_2 > t_1$ условие стационарности функционала $H(\mathbf{v})$ приводит к условию минимума функционала

$$\Psi(\mathbf{g}) = a(\mathbf{g}) + \frac{1}{2} \omega^2 D \iint_{\Omega} \mathbf{g}^2 d\Omega > 0, \quad (16)$$

где вектор $\mathbf{g}$ — действительная либо мнимая части комплексного вектора амплитуды $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$. Для построения приближенного представления комплексных амплитуд смещений среды от излучающего дефекта J будем отыскивать эти амплитуды, приближая их линейными комбинациями вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &\approx \sum_{n=1}^N A_n \mathbf{u}_n(x, y) = \mathbf{u}_N(x, y); \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{G}(x, y | \xi_n, \eta_n) \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\xi_n, \eta_n) \notin \Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты A_n подлежат определению. Система квадратично суммируемых вектор-функций $\{\mathbf{u}_n(x, y)\}$, $n = 1, 2, \dots$ обладает свойством полноты [10] в любой конечной подобласти Ω^* , если последовательность точек (ξ_n, η_n) имеет точку сгущения при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что приближение линейными комбинациями (17) можно осуществить с любой степенью точности, и, в частности, в смысле $\Psi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, когда N достаточно велико. Условие $\delta\Psi(\mathbf{u}) = 0$ есть условие минимума функционала $\Psi(\mathbf{u})$, который достигается на точном решении задачи [18].

Неизвестные коэффициенты A_n отыскиваются из условий минимума функционала $\Psi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)$, используя полноту системы функций $\{\mathbf{u}_n(x, y)\}$, $n = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют граничному условию $\sigma(\mathbf{u}_n)|_{\Gamma} = 0$.

Приравнявая нулю производные $\frac{\partial\Psi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)}{\partial A_n} = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ и преобразуя левые части полученных уравнений с помощью формул Грина, а также учитывая, что выбранные вектор-функции $\mathbf{u}_n(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1), граничным условиям (2) и условиям на бесконечности краевой задачи (1), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных A_n :

$$\sum_{k=1}^N A_k \int_J \mathbf{u}_m \cdot \sigma(\mathbf{u}_k) dl - \int_J \mathbf{f} \cdot \sigma(\mathbf{u}_m) dl = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

В соотношениях (18) $\sigma(\mathbf{u}_m)$ — вектор напряжений, вычисленный на N векторах полной системы $\{\mathbf{u}_m\}$. Однозначная разрешимость уравнений (17) вытекает из однозначной разрешимости системы ГИУ (14). Подставляя найденные $A_j = A_j(\mathbf{f} | l, \alpha)$ как линейные функционалы от амплитуды $\mathbf{f}$ сигналов АЭ, излучаемых дефектом, в выражение смещений (13) свободной поверхности Γ , получим интегральное соотношение связи неизвестных амплитуд смещений $\mathbf{f}$, распределенных на дефекте J с амплитудами смещений $\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{f}^*$, полученными на основе измерений на свободной поверхности.

Для восстановления амплитуд $\mathbf{f}$ излучения дефекта на основе результатов измерений $\mathbf{f}^*(x_m, 0)$, $m = 1, 2, \dots, M$ достаточно представить интеграл $\int_J \mathbf{f} \cdot \sigma(\mathbf{u}_n) dl$ в виде конечной суммы с помощью квадратурной формулы, а затем применить известные процедуры метода наименьших квадратов для оценки параметров вектора амплитуд смещений свободной поверхности $y = 0$:

$$\sum_{k=1}^P \left[\sum_{n=1}^N A_n(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \dots, \mathbf{f}_P | \omega, l, \alpha) \mathbf{u}_n(x_k, 0) - \mathbf{f}^*(x_k, 0) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (19)$$

В выражении (19) $\mathbf{f}_1 = \{f_{11}, f_{12}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{f_{21}, f_{22}\}$, $\mathbf{f}_3 = \{f_{31}, f_{32}\}$, ..., $\mathbf{f}_P = \{f_{P1}, f_{P2}\}$ — неизвестные значения компонент вектора амплитуд $\mathbf{f}$ в P узлах квадратурной формулы для контура J_+ . Восстановленные амплитуды позволяют восстановить также и вектор амплитуды скачков напряжений $\mathbf{p}(\rho)$ на дефекте J с помощью ГИУ (14).

5. Для получения численных результатов введем эллиптические координаты (ξ, η) , связанные с контуром дефекта J по формулам ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к J):

$$t = l \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad n = l \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi.$$

Тогда весь контур J -дефекта $t = l \cos \eta$ будет представлен соотношениями $\xi = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, и ГИУ преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{k}(\cos \eta, \cos \eta') \cdot \mathbf{p}(\cos \eta') \sin \eta' d\eta = \mathbf{f}(\cos \eta), \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Предполагая, что функция $\mathbf{f}(\cos \eta)$ разлагается в ряд Фурье, а, следовательно, и в ряд по функциям Матье $ce_m(\eta', q)$ [19], ограничимся рассмотрением случая

$$\mathbf{f}(\cos \eta) = \mathbf{f} \cos(kl \cos \eta), \quad \mathbf{f} = \{f_i\}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Пользуясь тем, что выбранная система функций Матье обладает полнотой, будем отыскивать решение (20) в форме ряда по функциям Матье:

$$\mathbf{p}(\cos \eta') = \frac{1}{\sin \eta'} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_{2n} ce_{2n}(\eta', q) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_{2n+1} ce_{2n+1}(\eta', q) \right]; \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_m = \{x_i(m)\}, \quad \mathbf{p} = \{p_i\}, \quad q = \frac{K^2 l^2}{4}, \quad 0 \leq \eta' \leq \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots).$$

В выражении (21) векторы $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m(q, \gamma)$ подлежат определению. При этом скачок вектора напряжений $\mathbf{p}(\cos \eta')$ в концевой точке разреза содержит характерную для контактных задач теории упругости степенную особенность, определяемую в используемых координатах множителем $\sin \eta'$, как показано в работе [20]. В этой работе в функциях Матье построено точное решение смешанной задачи об антиплоских колебаниях полосового штампа на границе упругого полупространства, где возникает ГИУ, аналогичное рассматриваемому.

Подставим решение в форме (21) в уравнение (20), умножим обе части на $ce_m(\eta, q)$ и произведем интегрирование по отрезку $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$. В результате громоздких преобразований, а также использования известных соотношений для функций Матье, придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторных постоянных $\mathbf{x}_m$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}_{sm}(q) \cdot \mathbf{x}_m = B_s(q) f^s, \quad B_s(q) = \pi A_0^s(q) \frac{ce_s(\alpha, q)}{ce_s(\frac{\pi}{2}, q)}; \quad (22)$$

$$f^s = \begin{cases} f, & s = 2k \\ 0, & s = 2k + 1 \end{cases}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

При получении (22) использовалась полнота на отрезке $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ системы функций Матье, $A_0^s(q)$ — нулевой коэффициент разложения функций $ce_s(\alpha, q)$ по косинусам. Матричные коэффициенты системы (22) выражаются следующими интегралами:

$$\mathbf{G}_{sm}(q) = \frac{16}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_s(\eta, q) d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{G}(\eta, \eta') ce_s(\eta', q) d\eta' \quad (s, m = 0, 1, 2, \dots); \quad (23)$$

$$\mathbf{G}(\eta, \eta') = \mathbf{G}(l \cos \eta \cos \alpha, 0 | l \cos \eta' \cos \alpha, l \cos \eta \sin \alpha).$$

При исследовании процессов излучения волн от микродефектов в частотном диапазоне 0,1—5,0 МГц для реальных конструкционных материалов оказывается, что $q \approx 10^{-6}$. Поэтому вычисление интегралов (23) производилось приближенно с точностью $O(q^2)$. В результате вычислений матрицы $\mathbf{G}_{sm}(q)$ приобретают вид:

$$\mu \mathbf{G}_{sm}(q) = \mathbf{G}_{0sm}(q) + \mathbf{G}_{1sm}(q). \quad (24)$$

Выражение элементов матрицы $\mathbf{G}_{sm}(q)$ имеют достаточно громоздкий вид и содержат значения обычных $ce_{2s}(0, q)$, $ce_{2s}(\frac{\pi}{2}, q)$ и модифицированных $Me_{2m}^{(1)}(0, q)$ функций Матье, $A_0^{2s}(q)$ — коэф-

коэффициенты разложения функций Матье в тригонометрический ряд, а также τ_R — положительный корень приведенного к безразмерному виду уравнения Релея:

$$R(\tau) = (\tau - 0.5)^2 - \tau\sqrt{\tau - 1}\sqrt{\tau - \gamma^2} = 0.$$

Элементы матриц $\mathbf{G}_{0sm}(q) = \{g_{ij}(0; s, m)\}$, $\mathbf{G}_{1sm}(q) = \{g_{ij}(1; s, m)\}$ имеют следующее асимптотическое поведение ($q \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} g_{11}(0; 0, 0) &= 2(1 + \gamma^2) \ln q [1 + O(q^2)]; \\ g_{22}(0; 0, 0) &= 2(1 + \gamma^2) \ln q [1 + O(q^2)]; \\ g_{11}(0; s, m) &= -2\varepsilon_{sm} \delta_{sm} (1 + \gamma^{2+2m}) + o(q^{2m-1}); \\ g_{22}(0; s, m) &= 2\varepsilon_{sm} \delta_{sm} (1 - \gamma^{2+2m}) + o(q^{2m-1}); \\ g_{ij}(1; s, m) &= O\left[\frac{(q/4)^{m+s}}{(2s)!(2m)!}\right], \quad s, m = 1, 2, \dots; \\ \varepsilon_{sm} &= 1 + (-1)^s \cos 2m\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая соотношения (24), (25), получим систему:

$$\mathbf{G}_{0sm}(q) \mathbf{x}_s = B_s(q) \mathbf{f}^s - \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}_{1sm}(q) \cdot \mathbf{x}_m. \quad (26)$$

Анализ асимптотических свойств коэффициентов (26) на основе (25) показывает, что для исследования и эффективного решения систему (26) следует преобразовать. Введем переобозначения:

$$\mathbf{D}_{ss}(q) = \mathbf{G}_{0ss}(q) = \{g_{ij}(0; s, m)\}, \quad \mathbf{R}_{sm}(q) = \mathbf{G}_{1sm}(q) = \{g_{ij}(1; s, m)\}.$$

Положим в (26) $s = 0$ и отделим от бесконечной суммы слагаемое $\mathbf{D}_{ss}(q)$ при $m=0$, содержащее x_0 , а также отделим слагаемое $\mathbf{R}_{sm}(q)$, соответствующее положительному корню τ_R уравнения Релея. Это позволяет выразить через x_0 остальные неизвестные и преобразовать систему к виду ($s = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \left\{ B_s(q) \mathbf{E} - \mathbf{R}_{s0}(q) \cdot [\mathbf{D}_{00}(q) + \mathbf{R}_{00}(q)]^{-1} \right\} \cdot \mathbf{D}_{ss}^{-1}(q) \cdot \mathbf{f}^s - \\ &- \mathbf{D}_{ss}^{-1}(q) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{R}_{sm}(q) - \mathbf{R}_{s0}(q) \cdot [\mathbf{D}_{00}(q) + \mathbf{R}_{00}(q)]^{-1} \cdot \mathbf{R}_{0m}(q) \right\} \cdot \mathbf{x}_m. \end{aligned} \quad (27)$$

Введем пространство $s(\nu)$ векторных последовательностей $\mathbf{X} = \{x_s(j)\}$, $s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$, сходящихся к нулю с весом s^β в норме:

$$\|\mathbf{X}\|_{s(\beta)} = \sup_{S \geq 0} \sup_{j \geq 1} |x_S(j) s^\beta| < \infty, \quad \beta > 0.$$

Учитывая (25), (27), можно доказать полную непрерывность оператора левой части (27) в пространстве $s(\beta)$, $\beta > 0$. Это позволяет сделать известные из данной теории заключения о разрешимости бесконечной системы (27) и строить ее приближенное решение методом урезания.

Ограничиваясь нулевым приближением, можно получить следующие матричные представления тензоров $\hat{\mathbf{G}}_0, \hat{\mathbf{G}}_1$:

$$\begin{aligned} 2\mu \mathbf{G}_0(kR) &= \mathbf{E} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\gamma^2 J_p(\gamma Kt) H_p^{(1)}(\gamma Kr) + J_p(Kt) H_p^{(1)}(Kr) \right] \cos \alpha p - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\gamma^2 J_{p-2}(\gamma Kt) H_p^{(1)}(\gamma Kr) + J_{p-2}(Kt) H_p^{(1)}(Kr) \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha p & (-1)^p \sin \alpha p \\ (-1)^p \sin \alpha p & -\cos \alpha p \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mu \mathbf{G}_1(x, 0 | x', y') = \frac{\pi \sigma_R^2 \tau_R^{-1}}{\Delta(\tau_R)} \mathbf{T}_R \cdot \left\{ \sigma_R \tau_R^{-2} \exp[-K(\sigma_{1R} y' + i \tau_R x')] - \right. \\ \left. - \exp[-k(\sigma_{2R} y' + i \tau_R x')] \right\} \exp(iK \tau_R x) + O(q^2);$$

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} i\sigma_{1R} & \sigma_R \tau_R^{-1} \\ -\sigma_R \tau_R^{-1} & i\sigma_{2R} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \sigma_{1R} & -i\sigma_R \tau_R^{-1} \\ i\sigma_R \tau_R^{-1} & \sigma_{2R} \end{pmatrix};$$

$$\Delta(\tau_R) = (1 - \gamma^2) \tau_R^6 + 0,5 \tau_R^2 - 0,125;$$

$$\sigma_{2R} = \sqrt{\tau_R^2 - 1}, \quad \sigma_{2R} = \sqrt{\tau_R^2 - \gamma^2}, \quad \sigma_R = \tau_R^2 - 0,5, \quad q_1 = \gamma^2 q.$$

Внесем выражения (27), (28) в правую часть (13) и с учетом (25) произведем интегрирование. Тогда, в нулевом приближении, приходим к следующему асимптотическому представлению комплексной амплитуды вектора смещений свободной поверхности $\Gamma(\tau_R > 0$ — корень уравнения Релея):

$$\mu \mathbf{u}_1(x, 0) = \mathbf{A}_0(q) H_0^{(1)}(K |x|) + \mathbf{B}_0(\gamma^2 q) H_0^{(1)}(\gamma K |x|) + \mathbf{R}(q, \gamma) e^{iK \tau_R |x|} + \\ + 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_m(q) H_{2m}^{(1)}(K |x|) + \mathbf{B}_m(\gamma^2 q) H_{2m}^{(1)}(\gamma K |x|) + O(q^2), \quad |x| > l. \quad (29)$$

Амплитуды $\mathbf{A}_m(q)$, $\mathbf{B}_m(\gamma^2 q)$ определяются компонентами тензора $\hat{\mathbf{G}}_0$, амплитуда $\mathbf{R}(q)$ — компонентами тензора $\hat{\mathbf{G}}_1$.

По полученным результатам с использованием (29) проводился численный анализ. В качестве исходного материала выбирался алюминий Al. Расчеты представлены для $l = 10^{-4}$ м, $\text{Re} u_0(x, 0) = 0,01l$, $\text{Im} u_0 = 0,02l$ на расстояниях x от начала координат. Переменным параметром являлась частота 0,1—5,0 МГц.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) смещений $\text{Re} u_1(x, 0)$ приведена на рис. 2 для расстояний $x = 0,25$ м (сплошная линия) и $x = 5$ м (штриховая линия) от точки выхода дефекта на свободную поверхность Γ . Обращение амплитуд в бесконечность на резонансных частотах связано с отсутствием затухания в идеально упругой среде, используемой в рассмотренной математической модели. Детальное изучение данных анализа приводит к качественным результатам, которые аналогичны полученным при изучении установившихся колебаний упругого полупространства с излучающим конечным разрезом, выходящим на границу в условиях антиплоского сдвига [15].

Предлагаемое исследование дает аналитическое описание характера волнового поля при плоском напряженном состоянии среды, возбуждаемой излучающим дефектом для случая его выхода на свободную поверхность. Используя представление (12), связывающее вектор амплитуды смещений и скачок напряжений на дефекте J , а также соотношение (29) АЧХ смещений свободной поверхности, можно восстановить амплитуды излучения дефекта.

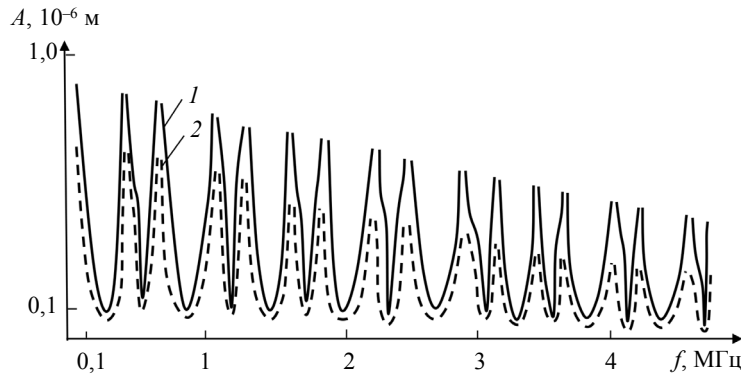


Рис. 2. Частотная характеристика амплитуды смещения свободной поверхности. Параметры излучения: $\text{Re} u_0 = 10^{-5}$ м; $\text{Im} u_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ м трещины; $l = 10^{-4}$ м, $\alpha = 45^\circ$.
1 — на расстоянии 0,25 м от дефекта; 2 — на расстоянии 5 м от дефекта.

Замечание 2. Метод наименьших квадратов в (19) приводит к конечной системе линейных уравнений относительно неизвестных векторов-амплитуд смещений границ дефекта J , при этом коэффициенты системы зависят от ω , l , α . Тогда равенство нулю определителя этой системы порождает резонансное соотношение, связывающее частоту ω с критическими значениями величин l , α и соответствующее случаю подрастания дефекта. Угол α в рассматриваемом случае известен, поскольку линейные дефекты при развитии в окрестности свободной границы тела в условиях плоского напряженного состояния выходят на эту границу под углом, близким к 45° , как показано на рис. 1 и соответствует надписям к рис. 2. Таким образом, из представленной выше математической модели вытекает наличие зависимости резонансной частоты в АЧХ от критической длины дефекта на стадии его подрастания.

Однако в случае предразрушающего состояния решение обратной задачи восстановления характеристики прочности (скачка амплитуд напряжений на дефекте J) на основе восстановленных амплитуд излучения дефекта осуществляется для нерезонансных значений частот АЧХ [7].

Таким образом, предлагаемая модель позволяет исследовать связь параметров акустического излучения дефекта внутри тела в условиях, близких к плоскому напряженному состоянию (например, внутри тонких оболочечных конструкций) с параметрами акустического сигнала (смещения) на его поверхности, что может быть использовано при решении задач повышения достоверности результатов АЭ диагностики.

Работа поддержана Южным федеральным университетом и Минобрнауки РФ (проект № ВнГр/2020-04-ИМ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буйло С.И. Физико-механические, статистические и химические аспекты акустико-эмиссионной диагностики. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. 184 с.
2. Иванов В.И., Барат В.А. Акустико-эмиссионная диагностика. М.: Спектр, 2017. 368 с.
3. Буйло С.И. Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. 192 с.
4. Буйло С.И. Диагностика предразрушающего состояния материалов по параметрам амплитудного распределения сигналов сопутствующего акустического излучения // Дефектоскопия. 2012. № 11. С. 32—45.
5. Builo S.I. Physical, Mechanical and Statistical Aspects of Acoustic Emission Diagnostics / In: Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. New York: Nova Science Publishers. Chapter 15. 2013. 444 p.
6. Berkovich V.N., Builo S.I. Reconstructing the Amplitudes of Radiation of a Defect Based on Acoustic Emission Signals at the Free Boundary of a Massive Body // Russian Journal of Nondestructive testing. 2019. V. 55. No. 4. P. 262—267. [Беркович В.Н., Буйло С.И. Восстановление амплитуд излучения дефекта по сигналам акустической эмиссии на свободной границе массивного тела // Дефектоскопия. 2019. № 4. С. 15—20.]
7. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. 175 с.
8. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1977. 272 с.
9. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1977. 275 с.
10. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
11. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1958. 280 с.
12. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
13. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л.: Наука, 1968. 358 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Сер. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1969. 343 с.
15. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 478 с.
16. Беркович В.Н. О точном решении одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 327—330.
17. Беркович В.Н. Акустическое излучение в упругой среде от внутреннего дефекта с изломом // Междун. научн.-иссл. журнал. 2018. № 3. С. 11—14.
18. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. Главное изд-во физ.-мат. лит., 1970. 512 с.
19. Мак-Лаклан Н.В. Теория и приложения функций Маттье / Пер. с англ. М.: Наука. Изд. иностр. лит., 1953. 474 с.
20. Бородачев Н.М. Динамическая контактная задача в случае деформации продольного сдвига // Прикл. мех. 1973. Т. 9. Вып. 5. С. 231—234.