

К РАСЧЕТУ ПОЛЯ КОНЕЧНОГО МАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

© 2019 г. В.В. Дякин¹, О.В. Кудряшова^{1,*}, В.Я. Раевский^{1,**}

¹ Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук,
Россия 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 18
E-mail: *kudryashova_ov@imp.uran.ru; **raevskii@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 08.04.2019; после доработки 17.05.2019
Принята к публикации 24.05.2019

Разработан алгоритм численного решения прямой линейной задачи магнитостатики по вычислению поля от конечного цилиндра с постоянной магнитной проницаемостью μ . В ходе численных экспериментов установлены параметры дискретизации системы уравнений, выполнены проверки решения на соответствие результатам точно решаемых задач, обозначены границы применимости бесконечной модели цилиндра и намечены перспективы дальнейшего использования численного алгоритма и компьютерной программы.

Ключевые слова: теоретические задачи магнитостатики, магнитная дефектоскопия, интегродифференциальное уравнение магнитостатики, линейная задача магнитостатики, поле магнитного цилиндра, реализация метода конечных элементов.

DOI: 10.1134/S0130308219100038

ВВЕДЕНИЕ

В научном обороте широко используются бесконечные модели, призванные служить неким приближением при рассмотрении в чем-то похожих конечных тел. При этом делается ряд оговорок, обосновывающих такую замену и убеждающих считать ее оправданной. И действительно, бесконечные модели приносят немалую пользу, например, могут упростить задачу, сделать ее разрешимой аналитически или хотя бы привести к такому виду, на основе которого может быть построена эффективная по точности решения и приемлемым затратам машинного времени и машинной памяти вычислительная процедура.

Что касается тел с цилиндрической симметрией, хорошо известна задача о бесконечном магнитном цилиндре с постоянной магнитной проницаемостью, помещенном в бесконечную магнитную среду с иной магнитной проницаемостью в однородном внешнем поле, перпендикулярном оси цилиндра. Решение здесь представляется в элементарных функциях [1, с. 245]. Это самая первая теоретическая задача магнитостатики, которая была приспособлена для нужд магнитной дефектоскопии еще в 30-х годах прошлого столетия. В [2] можно найти решение по расчету поля бесконечного магнитного цилиндра при условии неоднородного намагничивания. Выражения для компонент результирующего поля уже не являются столь простыми и записываются через специальные функции.

Осуществлялись попытки и по внедрению дефекта вовнутрь цилиндра. Ранее мы обращались к решению задачи линейной магнитостатики для тела в виде цилиндра, содержащего внутреннее несоосное включение такой же цилиндрической формы, но отличающееся значением магнитной проницаемости. Используя переход к бицилиндрическим координатам, было получено аналитическое решение [3, 4]. Кроме того, к решению данной задачи был применен и один полуаналитический метод, позволяющий в реальном времени получать результат с контролируемой точностью [5]. Второй подход был использован и для решения задачи о полом цилиндра (трубе) с бесконечно протяженным цилиндрическим дефектом [6]. В [3—6] дефектная область также является неограниченной, как и то тело, в котором она находится.

Естественно возникает потребность рассмотреть задачу магнитостатики для следующих тел: однородный конечный цилиндр (а), конечный цилиндр с внутренним (разумеется, конечным) дефектом (б), однородный полый конечный цилиндр (труба) (в), конечный фрагмент трубы с внутренним дефектом (г). Выполнение задач именно в этом порядке позволит тестировать последующую на основе предыдущей и даст возможность оценить качество и точность результата — предстоит осуществить численное решение. Сейчас мы приступаем к работе над первым пунктом программы.

Для реализации этой задачи мы обратились к методу конечных элементов [7]. Предположение о постоянстве магнитной проницаемости позволило свести трехмерную задачу к двумерной и тем самым обеспечить практически приемлемые точность решения и время расчета.

Рассматриваемая в данной работе задача не только может быть использована как инструмент тестирования более сложных перечисленных выше задач, но и как инструмент для решения обрат-

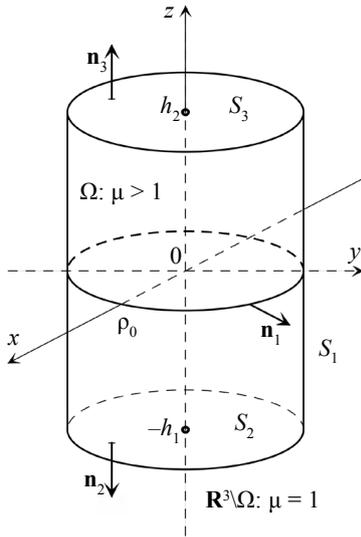


Рис. 1.

ной задачи по определению на основе анализа зависимостей компонент магнитного поля от координат геометрических и физических параметров магнитного цилиндра, к которому нет доступа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется тело Ω , ограниченное поверхностью S , геометрический образ которой представлен на рис.1. Цилиндрический фрагмент поверхности обозначим через S_1 (радиус цилиндра равен ρ_0), а круги в плоскостях $z = -h_1$ и $z = h_2$ обозначим через S_2 и S_3 соответственно. Примем, что тело Ω является магнетиком с магнитной проницаемостью μ , не зависящей ни от величины поля, ни от координат: $\mu = \text{const}$. Считаем, что магнетик помещен во внешнее намагничивающее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, вид которого пока не оговариваем. Поставим задачу найти результирующее поле.

В качестве математической основы возьмем интегродифференциальное уравнение магнитостатики [8], записанное относительно вектор-функции напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$,

которое для магнетика с постоянной магнитной проницаемостью μ , ограниченного поверхностью S , имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \frac{\mu - 1}{4\pi} \nabla \int_S \frac{H_n^\Omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad (1)$$

где $H_n^\Omega(\mathbf{r}')$ — составляющая вектора \mathbf{H} , взятая на поверхности S изнутри области Ω (на это указывает верхний символ в обозначении) вдоль внешнего по отношению к этой области единичного вектора нормали \mathbf{n} , построенного в точке $\mathbf{r}' \in S$.

Вид уравнения (1) определяет следующую последовательность действий: сначала нужно найти значение функции H_n^Ω на S , после чего выполнить подстановку H_n^Ω в (1). При этом (1) становится выражением по вычислению поля в произвольной точке пространства за исключением точек, принадлежащих S .

Для вывода уравнения относительно функции $H_n^\Omega(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$, умножим обе части (1) на вектор \mathbf{n} и положим, что $\mathbf{r} \in \Omega$. Получим уравнение

$$H_n^\Omega(\mathbf{r}) + \frac{\mu - 1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_S \frac{H_n^\Omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = H_n^0(\mathbf{r}), \quad (2)$$

в котором осуществим предельный переход при $\mathbf{r} \rightarrow S$, используя формулу предельного значения для нормальной производной потенциала простого слоя [9]

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_S \frac{H_n^\Omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow S} 2\pi H_n^\Omega(\mathbf{r}) + \int_S H_n^\Omega(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (3)$$

Таким образом, из (2) получаем окончательное уравнение относительно значения нормальной составляющей искомого поля на внутренней стороне поверхности S

$$H_n^\Omega(\mathbf{r}) + \frac{\chi}{2\pi} \int_S H_n^\Omega(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{2}{\mu + 1} H_n^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (4)$$

где $\chi := (\mu - 1)/(\mu + 1)$.

Учитывая, что поверхность S есть объединение поверхностей S_1 , S_2 и S_3 , на основе (4) записываем систему интегральных уравнений относительно нормальных составляющих на каждом из этих фрагментов

$$\left\{ H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}) + \frac{\chi}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{S_j} H_{n_j}^{\Omega}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'_j = \frac{2}{\mu + 1} H_{n_i}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_i, \quad i = 1, 2, 3, \right. \quad (5)$$

где \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$) — единичный вектор нормали на поверхности с соответствующим номером.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ И ЕЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Решение системы (5) будем искать численными методами. Для этого построим разбиения:

$$\{z_l\}_{l=1}^{N_z} : z_1 = -h_1; z_{l+1} = z_l + \Delta_z; \Delta_z = \frac{h_1 + h_2}{N_z - 1} \text{ — шаг; } N_z \text{ — число точек, } N_z \geq 2;$$

$$\{\varphi_l\}_{l=1}^{N_\varphi} : \varphi_1 = 0; \varphi_{l+1} = \varphi_l + \Delta_\varphi; \Delta_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi - 1} \text{ — шаг; } N_\varphi \text{ — число точек, } N_\varphi \geq 2;$$

$$\{\rho_l\}_{l=1}^{N_\rho} : \rho_1 = 0; \rho_{l+1} = \rho_l + \Delta_\rho; \Delta_\rho = \frac{\rho_0}{N_\rho - 1} \text{ — шаг; } N_\rho \text{ — число точек, } N_\rho \geq 2.$$

Таким образом, цилиндрическая поверхность оказывается разбитой на совокупность элементов $\{S_{1m}\}_{m=1}^{N_1}$, где $N_1 = (N_z - 1)(N_\varphi - 1)$, а нижняя и верхняя грани — на множества элементов $\{S_{2m}\}_{m=1}^{N_2}$, и $\{S_{3m}\}_{m=1}^{N_3}$, где $N_2 = N_3 = (N_\rho - 1)(N_\varphi - 1)$; $N := N_1 + 2N_2$ — общее число фрагментов. Через \mathbf{r}_{im} обозначим радиус-вектор «центра» отдельно взятой m -й площадки на i -м элементе поверхности, цилиндрические координаты которого принимаем как среднее арифметическое соответствующих граничных значений координат на этой площадке. Далее предположим, что значение нормальной составляющей вектора напряженности магнитного поля является неизменным внутри отдельно взятой площадки: $H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}) \approx H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}_{im})$, если $\mathbf{r} \in S_{im}$, $m = 1, 2, \dots, N_i$, $i = 1, 2, 3$.

В результате дискретизации система интегральных уравнений (5) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}_{im})$

$$\left\{ H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}_{im}) + \frac{\chi}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{N_j} \mathbb{A}_{mk}^{(i,j)} H_{n_j}^{\Omega}(\mathbf{r}_{jk}) = \frac{2}{\mu + 1} H_{n_i}^0(\mathbf{r}_{im}), \right. \quad (6)$$

где $\mathbb{A}_{mk}^{(i,j)}$ — матричные элементы системы:

$$\mathbb{A}_{mk}^{(i,j)} := \left(\int_{S_{jk}} \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'_{jk} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{im}}, \quad (7)$$

и где на $S_1 := \frac{\partial}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}$; на $S_2 := \frac{\partial}{\partial n_2} = -\frac{\partial}{\partial z}$; на $S_3 := \frac{\partial}{\partial n_3} = \frac{\partial}{\partial z}$.

Матрица коэффициентов системы состоит из девяти блоков

$$\begin{pmatrix} \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(1,1)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_1; N_1} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(1,2)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_1; N_2} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(1,3)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_1; N_3} \\ \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(2,1)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_2; N_1} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(2,2)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_2; N_2} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(2,3)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_2; N_3} \\ \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(3,1)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_3; N_1} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(3,2)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_3; N_2} & \left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(3,3)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_3; N_3} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

1). Запишем выражения матричных элементов блока $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(1,1)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_1; N_1}$, при вычислении которых имеем в виду, что как точки $\mathbf{r}_{1m} = (\rho_0, \varphi_{1m}, z_{1m})$, так и область интегрирования

$S_{1k} = \{ \mathbf{r}' = (\rho_0, \varphi', z') : \varphi' \in [\varphi_{1k} - \delta_\varphi, \varphi_{1k} + \delta_\varphi] \text{ и } z' \in [z_{1k} - \delta_z, z_{1k} + \delta_z] \}$, где $\delta_\varphi = \frac{\Delta_\varphi}{2}$ и $\delta_z = \frac{\Delta_z}{2}$, находятся на цилиндрической поверхности. При $m \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{mk}^{(1,1)} &= -2\rho_0^2 \int_{\varphi_{1k}-\delta_\varphi}^{\varphi_{1k}+\delta_\varphi} d\varphi' \sin^2 \frac{\varphi_{1m}-\varphi'}{2} \int_{z_{1k}-\delta_z}^{z_{1k}+\delta_z} \frac{dz'}{\left(4\rho_0^2 \sin^2 \frac{\varphi_{1m}-\varphi'}{2} + (z_{1m}-z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{t}{\sqrt{4\rho_0^2+t^2}} \left[F(\Psi_{mk}^+, \kappa(t)) - F(\Psi_{mk}^-, \kappa(t)) \right]_{t=z_{1k}-z_{1m}-\delta_z}^{t=z_{1k}-z_{1m}+\delta_z}, \end{aligned}$$

где $\kappa^2(t) := \frac{4\rho_0^2}{4\rho_0^2+t^2}$; $\Psi_{mk}^\pm := \frac{\pi - \varphi_{1m} + \varphi_{1k} \pm \delta_\varphi}{2}$; $F(\Psi, \kappa) = \int_0^\Psi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \vartheta}}$ — неполный эллиптический интеграл первого рода.

При $m = k$ интеграл является несобственным, но сходящимся. Для его вычисления окружаем точку \mathbf{r}_{1m} окрестностью, совпадающей по форме с элементарной площадкой, вычисляем возникающие интегралы и переходим к пределу, стягивая окрестность в точку \mathbf{r}_{1m} . Таким образом, получаем выражение

$$\mathbb{A}_{mm}^{(1,1)} = -\frac{2\delta_z}{\sqrt{4\rho_0^2 + \delta_z^2}} \left[F\left(\frac{\pi + \delta_\varphi}{2}, \kappa\right) - F\left(\frac{\pi - \delta_\varphi}{2}, \kappa\right) \right], \quad (9)$$

где $\kappa^2 := \frac{4\rho_0^2}{4\rho_0^2 + \delta_z^2}$.

2). Для матричных элементов блоков $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(i,1)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_i; N_i}$, где $i = 2, 3$, точка $\mathbf{r}_{im} = (\rho_{im}, \varphi_{im}, \eta_i)$ принадлежит нижней (где $i = 2$ и $\eta_2 = -h_1$) или верхней грани (где $i = 3$ и $\eta_3 = h_2$), а интегрирование осуществляется по фрагменту цилиндрической поверхности, поэтому окончательное выражение также легко записывается через неполные эллиптические интегралы первого рода:

$$\mathbb{A}_{mk}^{(i,1)} = \frac{2\rho_0(-1)^i}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho_{im}^2 + (z' - \eta_i)^2 + 2\rho_0\rho_{im}}} \left[F(\Psi_{mk}^+, \kappa(z')) - F(\Psi_{mk}^-, \kappa(z')) \right]_{z'=z_{1k}-\delta_z}^{z'=z_{1k}+\delta_z},$$

где $\kappa^2(z') := \frac{4\rho_0\rho_{im}}{\rho_0^2 + \rho_{im}^2 + (z' - \eta_i)^2 + 2\rho_0\rho_{im}}$ и $\Psi_{mk}^\pm := \frac{\pi - \varphi_{im} + \varphi_{1k} \pm \delta_\varphi}{2}$.

3). При записи расчетных формул матричных элементов блоков $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(1,j)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_1; N_j}$, где $j = 2, 3$, учитываем, что точка $\mathbf{r}_{1m} = (\rho_0, \varphi_{1m}, z_{1m}) \in S_{1m} \in S_1$, а интегрирование осуществляется по фрагменту S_{jk} плоской грани: $S_{jk} = \{ \mathbf{r}' = (\rho', \varphi', \eta_j) : \rho' \in [\rho_{jk} - \delta_\rho, \rho_{jk} + \delta_\rho] \text{ и } \varphi' \in [\varphi_{jk} - \delta_\varphi, \varphi_{jk} + \delta_\varphi] \}$, где $\delta_\rho = \frac{\Delta_\rho}{2}$, $\eta_2 = -h_1$ и $\eta_3 = h_2$. Здесь легко снимается интегрирование по переменной ρ' [10, с. 97]:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{mk}^{(1,j)} &= -\int_{\varphi_{jk}-\delta_\varphi}^{\varphi_{jk}+\delta_\varphi} d\varphi' \int_{\rho_{jk}-\delta_\rho}^{\rho_{jk}+\delta_\rho} d\rho' \frac{\rho_0\rho' - \rho'^2 \cos(\varphi_{1m} - \varphi')}{\left(\rho_0^2 + \rho'^2 + (z_{1m} - \eta_j)^2 - 2\rho_0\rho' \cos(\varphi_{1m} - \varphi')\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \int_{\varphi_{jk}-\delta_\varphi}^{\varphi_{jk}+\delta_\varphi} d\varphi' F(\rho', \varphi'; \rho_0, \varphi_{1m}, z_{1m}, \eta_j) \Big|_{\rho'=\rho_{jk}-\delta_\rho}^{\rho'=\rho_{jk}+\delta_\rho}, \end{aligned}$$

где $F(\rho', \varphi'; \rho, \varphi, z, \eta) :=$

$$= \frac{\rho \sin^2(\varphi - \varphi')(\rho^2 + (z - \eta)^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')) - \rho'(z - \eta)^2 \cos(\varphi - \varphi')}{(\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi') + (z - \eta)^2) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - \eta)^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}} +$$

$$+ \cos(\varphi - \varphi') \ln \left[2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - \eta)^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')} + 2\rho' - 2\rho \cos(\varphi - \varphi') \right]. \quad (10)$$

Подынтегральная функция уже не так проста, однако полученный определенный интеграл тоже может быть представлен в виде комбинации неполных эллиптических интегралов, но уже и первого, и второго, и третьего родов. Выражение выглядит крайне громоздким, мы не будем приводить его здесь.

4). Блоки $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(2,2)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_2; N_2}$ и $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(3,3)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_3; N_3}$ полностью состоят из нулевых элементов.

5). Матричные элементы блоков $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(i,j)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_i; N_j}$, где $(i, j) = (2, 3)$ или $(3, 2)$, определяются из выражений:

$$\mathbb{A}_{mk}^{(i,j)} = -(h_1 + h_2) \int_{\varphi_{jk} - \delta_\varphi}^{\varphi_{jk} + \delta_\varphi} d\varphi' \int_{\rho_{jk} - \delta_\rho}^{\rho_{jk} + \delta_\rho} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho_{im}^2 + \rho'^2 + (h_1 + h_2)^2 - 2\rho_{im}\rho' \cos(\varphi_{im} - \varphi'))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= (h_1 + h_2) \int_{\varphi_{jk} - \delta_\varphi}^{\varphi_{jk} + \delta_\varphi} d\varphi' G(\rho', \varphi'; \rho_{im}, \varphi_{im}, \eta_i, \eta_j) \Big|_{\rho' = \rho_{jk} - \delta_\rho}^{\rho' = \rho_{jk} + \delta_\rho} =$$

$$= -\frac{h_1 + h_2}{2\sqrt{a_{im} + b_{im}}} \left(v_{1;im} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{v_{im}}} - \frac{\rho'}{\rho_{im}} \right) \Pi(\psi, v_{1;im}, \kappa_{im}) \Big|_{\psi_{mk}^-}^{\psi_{mk}^+} - v_{2;im} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{v_{im}}} + \frac{\rho'}{\rho_{im}} \right) \Pi(\psi, v_{2;im}, \kappa_{im}) \Big|_{\psi_{mk}^-}^{\psi_{mk}^+} \right) \Big|_{\rho' = \rho_{jk} - \delta_\rho}^{\rho' = \rho_{jk} + \delta_\rho},$$

где $G(\rho', \varphi'; \rho, \varphi, z, \eta) := \frac{\rho^2 + (z - \eta)^2 - \rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}{(\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi') + (z - \eta)^2) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - \eta)^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}};$ (11)

$$a_{im} := \rho_{im}^2 + \rho'^2 + (h_1 + h_2)^2; \quad b_{im} := 2\rho_{im}\rho'; \quad \kappa_{im}^2 := \frac{2b_{im}}{a_{im} + b_{im}};$$

$$v_{im} := \frac{\rho_{im}^2}{(h_1 + h_2)^2}; \quad v_{1;im} := -\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{v_{im}}}}; \quad v_{2;im} := -\frac{2}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{v_{im}}}};$$

$$\psi_{mk}^\pm := \frac{\pi - \varphi_{im} + \varphi_{jk} \pm \delta_\varphi}{2};$$

$$\Pi(\psi, v, \kappa) := \int_0^\psi \frac{d\psi}{(1 + v \sin^2 \psi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{— неполный эллиптический интеграл третьего рода.}$$

Элементы вектора-столбца правой части системы (6) вычисляются на основе заданного выражения вектора напряженности внешнего намагничивающего поля $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$: $H_{n_i}^0(\mathbf{r}_{im}) = (\mathbf{H}^0(\mathbf{r}_{im}), \mathbf{n}_{im})$, где \mathbf{n}_{im} — единичный вектор внешней к области Ω нормали, построенной в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_{im} , принадлежащей элементу разбиения S_{im} , $i = 1, 2, 3$, $m = 1, 2, \dots, N_i$. Если подробнее, то $\mathbf{n}_{1m} = (\cos \varphi_{1m}, \sin \varphi_{1m}, 0)$, $\mathbf{n}_{2m} = (0, 0, -1)$ и $\mathbf{n}_{3m} = (0, 0, 1)$. При расчетах мы остановились на случаях однородного внешнего поля с абсолютной величиной H^0 , ориентированного либо вдоль оси ox , либо вдоль оси oz . Численные значения компонент результирующего поля выдаются нормированными H^0 и вводится обозначение $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} / H^0$.

На языке программирования Fortran с использованием стандартной программы решения системы линейных алгебраических уравнений с оценкой числа обусловленности C [11] были составле-

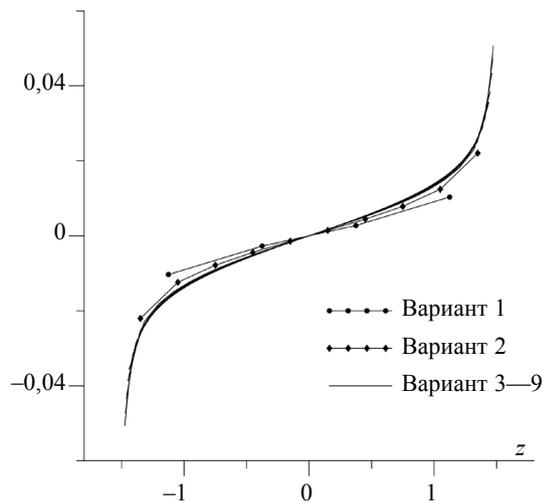
ны программы решения системы (6) со следующими формами представления матричных элементов $\left\{ \mathbb{A}_{mk}^{(i,j)} \right\}_{m=1; k=1}^{N_i; N_j}$ ($i = 1, 2, 3$, и $j = 1, 2, 3$): (1) — из расчета по формуле приближенного значения двойного интеграла как произведения значения подынтегральной функции в точке $\mathbf{r}_{jk} \in S_{jk}$ на площадь элемента S_{jk} ($j = 1, 2, 3$ и $k = 1, \dots, N_j$); (2) — из расчета по формуле приближения соответствующего определенного интеграла; (3) — из расчета через неполные эллиптические интегралы. При этом во всех случаях матричные элементы вида $\left\{ \mathbb{A}_{mm}^{(1,1)} \right\}_{m=1}^{N_1}$, расположенные на диагонали данного блока, вычислялись исключительно по формуле (9). В ходе расчетов использовались параметры разбиения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Вариант	N_z	N_φ	N_p	N_1	N_2	N	$C <$	Время счета <
1	4	6	3	24	18	60	100	1 с
2	10	10	5	100	50	200	100	2 с
3	20	20	10	400	200	800	200	20 с
4	25	25	15	625	375	1375	300	1 мин
5	30	30	20	900	600	2100	300	2 мин
6	40	40	20	1600	800	3200	300	5 мин
7	50	50	20	2500	1000	4500	300	12 мин
8	60	60	20	3600	1200	6000	300	25 мин
9	70	70	30	4900	2100	9100	400	80 мин

При выполнении численных экспериментов установлено, что для всех форм представления матричных элементов, начиная с шестого варианта происходит стабилизация двух значащих цифр окончательного значения результирующего поля (формулы для расчета его компонент приводятся в следующем пункте) при внешнем поле, направленном вдоль оси цилиндра, и четырех — при внешнем поле, направленном поперек этой оси. Выполненные численные расчеты отразили очевидное: с ростом числа элементов разбиения приближение как двойного, так и определенного интеграла по формуле среднего значения становится более точным. Таким образом, оказывается достаточно использовать первый или второй варианты представления матричных элементов. Мы выбрали второй из них, для этого же случая в последней колонке таблицы указано время расчета на ПК Pentium с достаточно скромными возможностями: тактовой частотой 2,67 ГГц и оперативной памятью 1 Гб. Было бы весьма интересно ознакомиться с результатами решения аналогичной задачи, полученными с помощью пакета стандартных программ Ansys, а также сравнить затраты машинных ресурсов. К сожалению, не удалось найти публикации на эту тему.

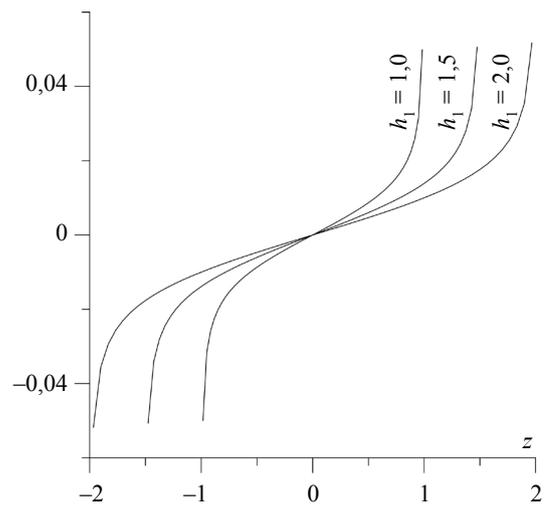
Результат численного решения системы (6) — массив значений нормальной составляющей \tilde{H}_n^Ω результирующего поля на площадках разбиения.



На рис. 2 представлены графики зависимости $\tilde{H}_n^\Omega(z)$ для всех вариантов расчета, указанных в табл. 1 и при условии, что внешнее поле ориентировано вдоль оси oz : $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$. Видно, что с ростом N точки графика стремятся уложиться на единую кривую. При наиболее возможном удалении от торцов (около точки $z = 0$) значение нормальной составляющей находится вблизи нуля, что согласуется с очевидным результатом решения задачи о бесконечном магнитном цилиндре в постоянном продольном его оси внешнем поле. На рис. 3 приведены графики $\tilde{H}_n^\Omega(z)$ для различных значений длины цилиндра, и с ее увеличением видна тенденция к снижению значе-

Рис. 2. Зависимость нормальной составляющей результирующего поля на поверхности S_1 от координаты z при различных значениях плотности разбиений; $h_1 = h_2 = 1,5$; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$.

Рис. 3. Зависимость нормальной составляющей результирующего поля на поверхности S_1 от координаты z при различных значениях $h_1 = h_2$; плотность разбиения по варианту 8; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$.



ния функции вблизи $z = 0$. Исходя из этого можно судить, что при таком внешнем поле цилиндр, продольный размер которого хотя бы в два раза превышает его диаметр, при измерениях посередине вполне можно рассматривать как неограниченный.

Рис. 4 иллюстрирует результаты расчета значения нормальной составляющей результирующего поля в сечении $z = 0$ при условии, что внешнее поле имеет вид $\mathbf{H}^0 = (H^0, 0, 0)$. Согласно точному решению соответствующей задачи о бесконечном цилиндре, $\tilde{H}_n^\Omega(\varphi) = \frac{2}{\mu+1} \cos \varphi [1]$. Из рисунка видно, что точки укладываются на эту кривую, разве что вблизи экстремумов заметно небольшое отличие, которое можно объяснить влиянием торцов цилиндра:

на рис. 5 в увеличенном масштабе приводятся графики тех же зависимостей, построенные для различных значений величин h_1 и h_2 ($h_1 = h_2$), и видно, что с их увеличением расчетная кривая приближается к теоретической.

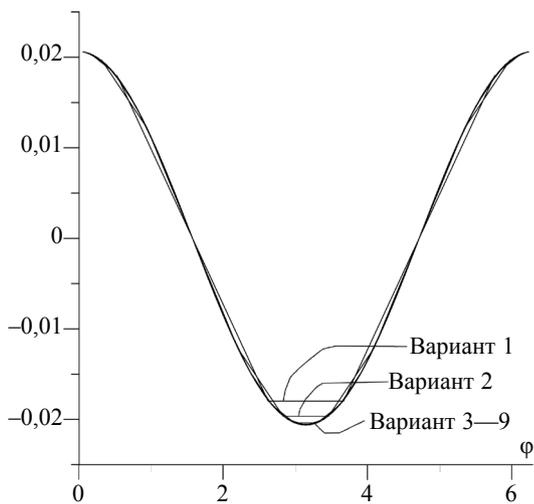


Рис. 4. Зависимость нормальной составляющей результирующего поля на поверхности S_1 от координаты φ в плоскости $z = 0$ при различных значениях плотности разбиений; $h_1 = h_2 = 1,5$; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (H^0, 0, 0)$.

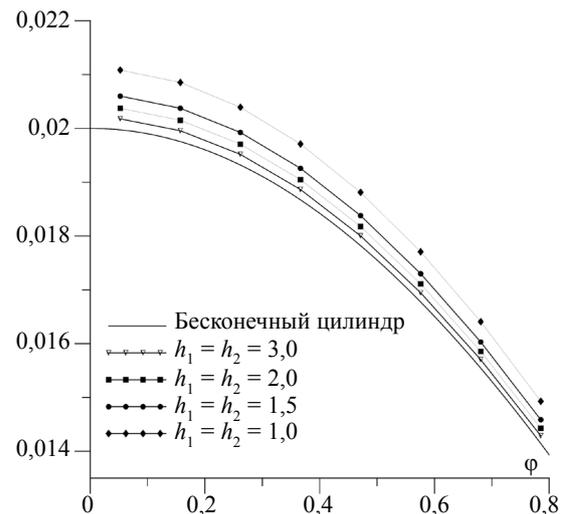


Рис. 5. Зависимость нормальной составляющей результирующего поля на поверхности S_1 от координаты φ в плоскости $z = 0$ при плотности разбиений по варианту 8 и при различных значениях $h_1 = h_2$; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (H^0, 0, 0)$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОЛЯ

Следующий этап численных расчетов — получение значения результирующего поля. Для этого на основе (1) с учетом принятых правил дискретизации записываем выражение

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) - \frac{\mu-1}{4\pi} \nabla \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{N_i} H_{n_i}^\Omega(\mathbf{r}_{im}) \int_{S_{im}} \frac{dS'_{im}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad (12)$$

исходя из которого, после вычисления производных, выписываем окончательные формулы для расчета компонент результирующего в цилиндрических координатах:

$$H_{\tau}(\mathbf{r}) = H_{\tau}^0(\mathbf{r}) - \frac{\mu - 1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{N_i} H_{n_i}^{\Omega}(\mathbf{r}_{im}) J_{\tau,im}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

где под символом τ понимается ρ , φ или z .

Выражения для $J_{\tau,im}(\mathbf{r})$ получены снятием интегрирования по одной из переменных:

$$J_{\rho,im}(\mathbf{r}) = -\rho_0 \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} d\varphi' H(\varphi') (\rho - \rho_0 \cos(\varphi - \varphi'));$$

$$J_{\varphi,im}(\mathbf{r}) = -\rho_0^2 \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} d\varphi' H(\varphi') \sin(\varphi - \varphi');$$

$$J_{z,im}(\mathbf{r}) = -\rho_0 \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi') + t^2}} \Bigg|_{t=z_{im}-z-\delta_z}^{t=z_{im}-z+\delta_z},$$

где

$$H(\varphi') := \frac{t}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi')) \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi') + t^2}} \Bigg|_{t=z_{im}-z-\delta_z}^{t=z_{im}-z+\delta_z}.$$

Для $i = 2, 3$ при $\eta_2 = -h_1$ и $\eta_3 = h_2$ имеем

$$J_{\rho,im}(\mathbf{r}) = \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} d\varphi' F(\rho', \varphi'; \rho, \varphi, z, \eta_i) \Big|_{\rho'=\rho_{im}-\delta_{\rho}}^{\rho'=\rho_{im}+\delta_{\rho}},$$

где функция F определяется по формуле (10). Далее,

$$J_{\varphi,im}(\mathbf{r}) = \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} d\varphi' \sin(\varphi - \varphi') G(\rho', \varphi'; \rho, \varphi, z, \eta_i) \Big|_{\rho'=\rho_{im}-\delta_{\rho}}^{\rho'=\rho_{im}+\delta_{\rho}},$$

где функция G определяется по формуле (11). И, наконец,

$$J_{z,im}(\mathbf{r}) := -(z - \eta_i) \int_{\varphi_{im}-\delta_{\varphi}}^{\varphi_{im}+\delta_{\varphi}} \frac{(\rho' - \rho \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi'}{(\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi') + (z - \eta_i)^2) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - \eta_i)^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}} \Bigg|_{\rho'=\rho_{im}-\delta_{\rho}}^{\rho'=\rho_{im}+\delta_{\rho}}.$$

Для получения итогового значения приближенной величины результирующего поля по формуле (13) каждый из данных определенных интегралов заменялся на произведение значения подынтегральной функции в точке φ_{im} с длиной $2\delta_{\varphi}$ отрезка интегрирования.

На основе результатов численных экспериментов построены различные зависимости. На рис. 6а, б представлены графики $\tilde{H}_{\rho}(\rho, \varphi, z)$ и $\tilde{H}_z(\rho, \varphi, z)$ соответственно, полученные в результате расчетов при $\rho = \text{const}$ и $\varphi = 0$ с внешним полем, направленным вдоль оси oz . Что касается функции $\tilde{H}_{\varphi}(\rho, \varphi, z)$, то при таком внешнем поле она обращается в ноль, что подтверждают и расчеты. Точки экстремума-компоненты и точки перегиба z -компоненты вполне четко указывают на продольный размер цилиндра.

Если точки, в которых вычисляются значения компонент результирующего поля, располагаются вблизи цилиндра, то вблизи экстремумов проявляется влияние выбранной плотности разбиений, что наглядно иллюстрирует рис. 7а: расположенная выше группа кривых $\tilde{H}_{\rho}(0, 51, 0, z)$, полученная для вариантов разбиений с пятого по восьмой, существенно отражает упомянутое влияние по сравнению с аналогичной группой кривых $\tilde{H}_{\rho}(0, 6, 0, z)$. По мере отдаления от цилиндра абсолютные значения компонент поля закономерно уменьшаются (рис. 7б и 8).

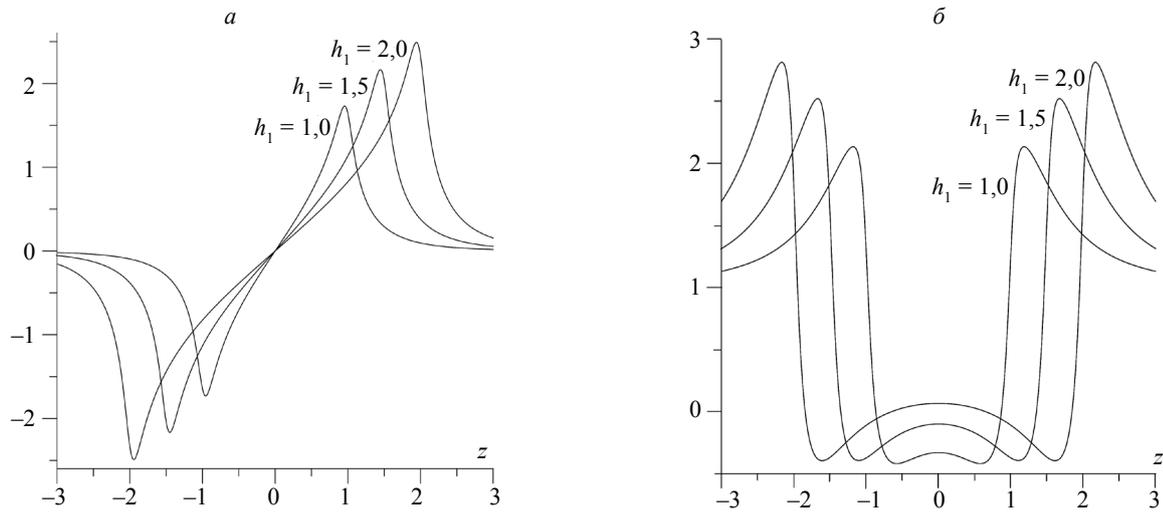


Рис. 6. *a* — зависимость ρ -компоненты результирующего поля от координаты z при $\rho = 0,6$ и при различных значениях $h_1 = h_2$; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$; *б* — зависимость z -компоненты результирующего поля от координаты z при $\rho = 0,6$ и при различных значениях $h_1 = h_2$; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$.

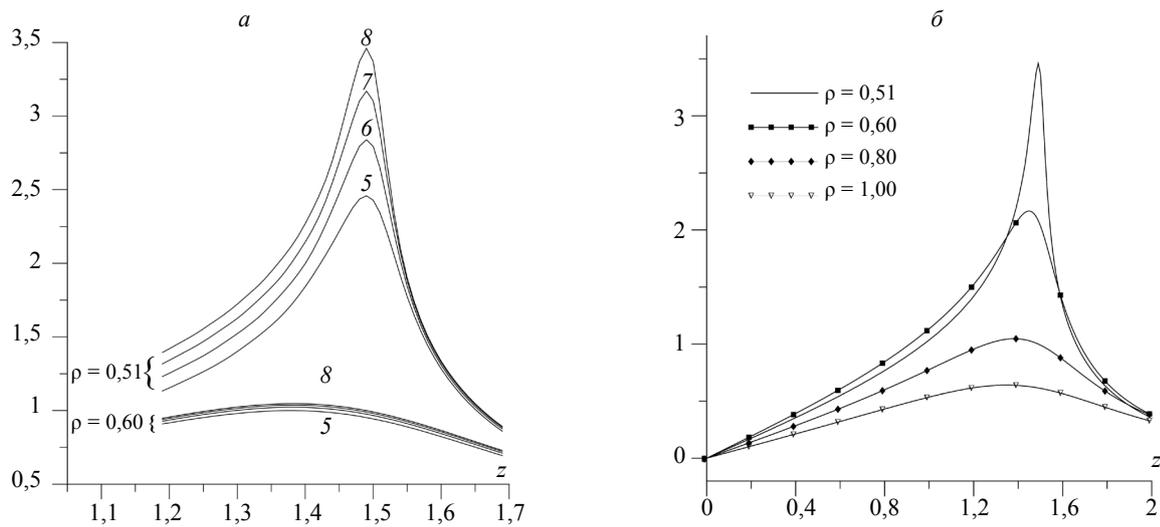


Рис. 7. *a* — зависимость ρ -компоненты результирующего поля от координаты z при различных значениях ρ и при $h_1 = h_2 = 1,5$ вблизи $z = 1,5$ для вариантов разбиений от 5 до 8; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$; *б* — зависимость ρ -компоненты результирующего поля от координаты z при различных значениях ρ и при $h_1 = h_2 = 1,5$ вблизи $z = 1,5$ для варианта разбиения 8; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$.

Задача о бесконечном круговом цилиндре с постоянной магнитной проницаемостью, помещенном в перпендикулярное его оси однородное внешнее поле, имеет простое решение в элементарных функциях. В цилиндрических координатах [1]:

$$H_\rho(\rho, \varphi) = H^0 \left(1 + \chi \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \cos \varphi; \quad H_\varphi(\rho, \varphi) = H^0 \left(-1 + \chi \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \sin \varphi; \quad H_z = 0. \quad (14)$$

В декартовых координатах [1]:

$$H_x(x, y) = H^0 \left(1 + \chi \rho_0^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right); \quad H_y(x, y) = 2H^0 \chi \rho_0^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (15)$$

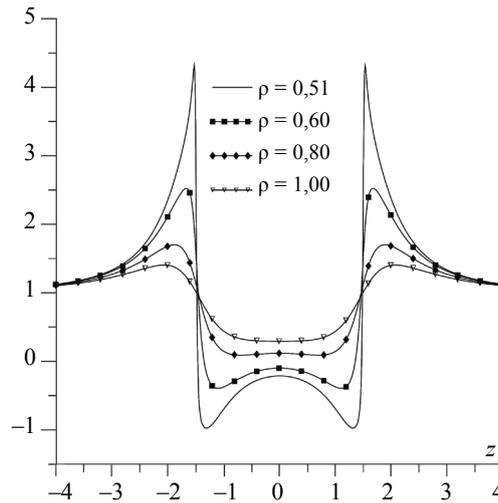


Рис. 8. Зависимость z -компоненты результирующего поля от координаты z при различных значениях ρ при $h_1 = h_2 = 1,5$ для варианта разбиения 8; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H^0)$.

Как и следовало ожидать, с увеличением продольного размера цилиндра кривые для компонент результирующего поля, построенные в равноудаленной от обоих концов плоскости, имеют тенденцию сходиться к аналитической кривой. Рис. 9а и б отражают эту закономерность: здесь на фоне графиков функций $\tilde{H}_x(x, 0)$ и $\tilde{H}_y(x, 0)$ даны расчетные кривые, соответствующие различным значениям $h_1 = h_2$.

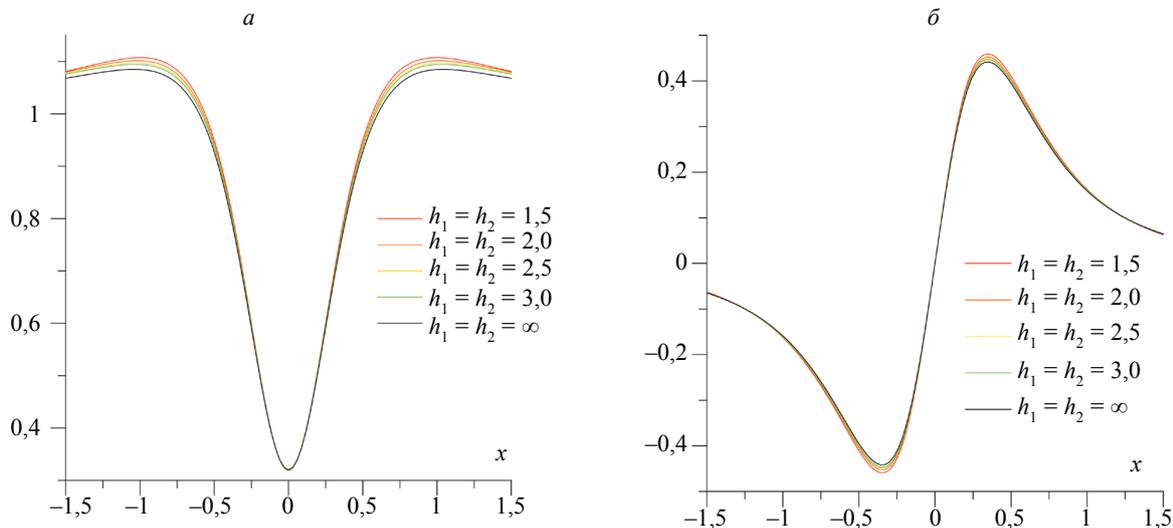


Рис. 9. а — зависимость x -компоненты результирующего поля от координаты x при $y = 0,6$ и $z = 0$ при различных значениях $h_1 = h_2$ на фоне кривой для бесконечного цилиндра; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (H^0, 0, 0)$; б — зависимость y -компоненты результирующего поля от координаты x при $y = 0,6$ и $z = 0$ при различных значениях $h_1 = h_2$ на фоне кривой для бесконечного цилиндра; $\rho_0 = 0,5$; $\mu = 99$; внешнее поле $\mathbf{H}^0 = (H^0, 0, 0)$.

К обратной задаче магнитостатики следует относиться с большой осторожностью, поскольку даже в узкой постановке она может не иметь единственного решения — эта проблема достаточно подробно раскрыта в работе [12]. Однако, рассматривая полученные кривые зависимостей компонент поля от координат, видим, что они существенно отличаются по своей форме от аналогичных кривых для шара. Таким образом, по результатам измерений вполне возможно вынести суждение о форме магнитного тела и даже об его геометрических размерах, если к нему нет видимого доступа. Детальное рассмотрение этого вопроса оставим на следующую публикацию.

Другая часть работы будет связана с развитием алгоритма при усложнении формы магнетика. Как минимум, планируется рассмотреть цилиндр внутренним с дефектом, используя при этом результаты настоящей работы как эталон.

Работа выполнена в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Квант», номер госрегистрации АААА-А18-118020190095-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неразрушающий контроль и диагностика / Справочник под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1995. 487 с.
2. Дякин В.В., Сандовский В.А. Теория и расчет накладных вихретоковых преобразователей. М.: Наука, 1981. 136 с.
3. Дякин В.В., Умергаллина О.В., Сандовский В.А. Точное решение одной задачи магнитостатики в бицилиндрических координатах // Дефектоскопия. 1999. № 6. С. 29—35.
4. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. Точное решение одной задачи магнитостатики в биполярных координатах (продолжение) // Дефектоскопия. 2016. № 12. С. 48—58.
5. Дякин В.В., Кудряшова О.В. Дефект в цилиндре // Дефектоскопия. 2012. № 4. С. 41—55.
6. Дякин В.В., Кудряшова О.В. Дефект в трубе // Дефектоскопия. 2012. № 10. С. 3—17.
7. *Philippe Ciarlet*. The Finit Element Method for Elliptic Problems. North-Holland Publishing Company, Amsterdam — New York — Oxford, 1978. 512 p.
8. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 278 с.
9. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.
11. *George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, Cleve B. Moler*. Computer Methods for Mathematical Computations. PRENTICE-HALL, INC, ENGLWOOD CLIFFS, N.J. 07632, 1977. 279 p.
12. *Dyakin V. V., Kudryashova O. V., Raevskii V. Y.* On the Well-Posedness of the Direct and Inverse Problem of Magnetostatics. Part 2 // Russian Journal of Nondestructive testing. 2018. V. 54. No. 10. P. 687—697. [Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К вопросу корректности прямой и обратной задачи магнитостатики. Часть 2 // Дефектоскопия. 2018. № 10. С. 15—24.]