ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 89–97

МАТЕМАТИКА

УДК 519.16 + 519.85

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЕРИИ АСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

© 2023 г. Е. Д. Незнахина[1,2,*], Ю. Ю. Огородников [1,2,], К. В. Рыженко[1,***],**
Член-корреспондент РАН М. Ю. Хачай [1,**]**

Поступило 19.09.2023 г.
После доработки 18.10.2023 г.
Принято к публикации 05.11.2023 г.

Обосновываются первые алгоритмы с константными оценками точности для серии асимметричных постановок задач маршрутизации: задачи о штейнеровском цикле, задачи коммивояжера с призами, задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов и др. В большинстве своем предложенные алгоритмы опираются на оригинальные схемы сведения исследуемых постановок к вспомогательным постановкам асимметричной задачи коммивояжера и прорывные результаты О. Свенссона, Я. Тарнавски, Л. Вега и В. Трауб, Й. Вигена в области эффективной аппроксимируемости данной задачи. Алгоритм для задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов опирается на технику, связанную с более глубокой модификацией подхода Свенссона-Трауб.

Ключевые слова: асимметричная задача коммивояжера, приближенные алгоритмы, константная оценка точности, задача о штейнеровском цикле минимального веса, задача маршрутизации транспорта, задача о покрытии графа ограниченным числом циклов

DOI: 10.31857/S268695432360218X, **EDN:** CYSMDZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье приведены недавние авторские результаты в области полиномиальной аппроксимируемости актуальных задач комбинаторной оптимизации, заданных на реберновзвешенных ориентированных графах с асимметричными функциями потерь и являющихся обобщениями классических задач коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) [1] и маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem, VRP) [2].

Исследуемое семейство задач включает NP-трудные в сильном смысле задачи, успешность проектирования для которых точных алгоритмов с полиномиальной трудоемкостью ввиду известной гипотезы $P \neq NP$ представляется сомнительной. Поэтому наибольший интерес в области алгоритмического анализа данных задач сконцентрирован вокруг методов, основанных на том или ином компромиссе между производительностью и точностью получаемых решений.

Наряду с традиционными методами ветвления (*branch-and-bound*, *branch-and-cut*, *branch-and-price*) [3], эвристиками и метаэвристиками [4], заметное место среди подходов к алгоритмическому анализу этих задач занимают *приближенные алгоритмы* [5, 6], обладающие априорными теоретическими оценками точности и трудоемкости.

По определению приближенным алгоритмом с оценкой точности (фактором аппроксимации) $\alpha > 1$ для задачи комбинаторной минимизации называется полиномиальный алгоритм, находящий для произвольной постановки задачи допустимое решение, стоимость которого превышает ее оптимальное значение не более чем в α раз. В общем случае фактор аппроксимации $\alpha = \alpha(n)$ является функцией от размера исследуемой постановки задачи (как правило выражаемого в терминах числа вершин соответствующего графа n). Поэтому особого интереса заслуживают комбинаторные задачи, принадлежащие аппроксимационному классу APX, для которых обосновано существование приближенных алгоритмов с фиксированной оценкой точности $\alpha = \text{const}$.

Как известно, *метрические* версии большинства исследуемых нами задач, постановки которых задаются неориентированными графами с неотрицательными функциями транспортных за-

[1]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
[2]*Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: eneznakhina@yandex.ru*
***E-mail: yogorodnikov@gmail.com*
****E-mail: kseniarizhenko@gmail.com*
*****E-mail: mkhachay@imm.uran.ru*

трат, удовлетворяющими *неравенству треугольника*, обладают такими приближенными алгоритмами. Обоснование этого факта восходит к классическим результатам Н. Кристофидеса и А. Сердюкова [7, 8] для задачи коммивояжера и М. Хаймовича и А. Ринной Кана для задачи маршрутизации транспортных средств ограниченной грузоподъемности (Capacitated VRP, CVRP) [9].

В то же время вопрос о возможности полиномиальной аппроксимируемости асимметричных постановок маршрутных задач в классе алгоритмов с константными оценками точности долгие годы оставался открытым. Так, вплоть до 2018 г. наилучшим по точности для асимметричной задачи коммивояжера (Asymmetric Traveling Salesman Problem, ATSP) считался алгоритм [10] с $\alpha = O(\log n/\log\log n)$. Прорывным результатом в этом направлении стала работа О. Свенссона, Я. Тарнавски и Л. Вега [11], в которой предложен первый приближенный алгоритм для задачи ATSP с фиксированным фактором аппроксимации. Усовершенствованная версия этого технически сложного в обосновании и в реализации алгоритма представлена в работе В. Трауб и Й. Вигена [12] и имеет оценку точности $22+\varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

В данной статье приведены первые приближенные алгоритмы с константными оценками точности для серии асимметричных постановок задач маршрутизации: задачи о штейнеровском цикле, задачи коммивояжера с призами, задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов и др.

В большинстве своем предложенные в работе алгоритмы основаны на полиномиальном сведении исследуемой задачи к одной или нескольким вспомогательным постановкам ATSP с последующим применением алгоритма Свенссона-Трауб. Идея подобного сведения, конечно же, не является новой и применялась в более ранних работах (см., напр., [16]). Однако полученные авторами данной статьи результаты опережают известные по точности аппроксимации.

Исключение составляет аппроксимируемость задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов в классе полиномиальных алгоритмов с фиксированным фактором, обоснование которой потребовало более глубокой адаптации подхода, предложенного в работах [11, 12].

Полные версии представленных результатов опубликованы в недавних работах авторов [13—15].

2. ЗАДАЧИ О ШТЕЙНЕРОВСКОМ ЦИКЛЕ И СЕЛЬСКОМ ПОЧТАЛЬОНЕ

Зададимся произвольным реберно-взвешенным ориентированным графом $G = (V, E, c)$ с неотрицательной весовой функцией, удовлетворяющей неравенству треугольника: для произвольных дуг (v,u), (u,w) и (v,w) справедливо соотношение

$$c(v,w) \le c(v,u) + c(u,w). \tag{1}$$

В задаче о штейнеровском цикле (Steiner Cycle Problem, SCP) требуется построить минимальный по весу замкнутый маршрут, посещающий выделенное подмножество $T \subseteq V$ терминальных вершин. Задача очевидно труднорешаема, поскольку в частном случае при $|T| = n$ совпадает с классической задачей коммивояжера. В свою очередь в также труднорешаемой задаче сельского почтальона (Rural Postman Problem, RPP) необходимо построить замкнутый маршрут минимальной стоимости, включающий каждую терминальную дугу из заданного подмножества $R \subseteq E$. С помощью добавления фиктивных вершин на дуги из выделенного подмножества и разделения транспортных издержек между индуцированными дугами возможно обосновать сведение RPP к подходящей постановке SCP [13] с сохранением стоимости допустимых решений, что гарантирует аппроксимируемость данных постановок с одним и тем же фактором.

Теорема 1. *Существование α-приближенного алгоритма для задачи ATSP с неравенством треугольника влечет аппроксимируемость задач SCP и RPP в классе α-приближенных полиномиальных алгоритмов.*

3. ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С НЕДЕЛИМЫМ СПРОСОМ

Задача маршрутизации заключается в поиске набора замкнутых маршрутов минимального суммарного веса для идентичных по грузоподъемности транспортных средств, начинающихся на складе и удовлетворяющих в совокупности спрос всех потребителей.

Условие асимметричной задачи маршрутизации с ограничением на грузоподъемность и неоднородным потребительским спросом (Capacitated Vehicle Routing Problem with Unsplittable Client Demands, CVRP-UCD) задается упорядоченной парой (G, D), где $G = (V, E, c, d)$ — взвешенный ориентированный сильно связный граф, в котором $V = X \cup \{O\}$: X — множество потребителей и $\{O\}$ — склад, весовая функция $c : E \to \mathbb{Z}_+$ определяет транспортные издержки и удовлетворяет неравенству треугольника (1), функция $d : X \to \mathbb{Z}_+$ задает потребительский спрос, а D — грузоподъемность имеющихся в распоряжении транспортных средств.

Допустимым маршрутом в исследуемой задаче является упорядоченная пара $R_i = (\Pi_i, d_i)$, в которой $\Pi_i = O, x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}, O$ — цикл в графе G, возмож-

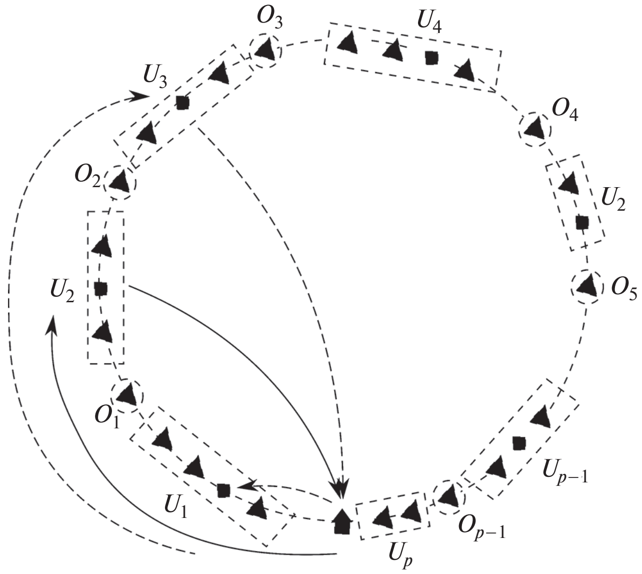

Рис. 1. Приближенное решение задачи маршрутизации транспорта.

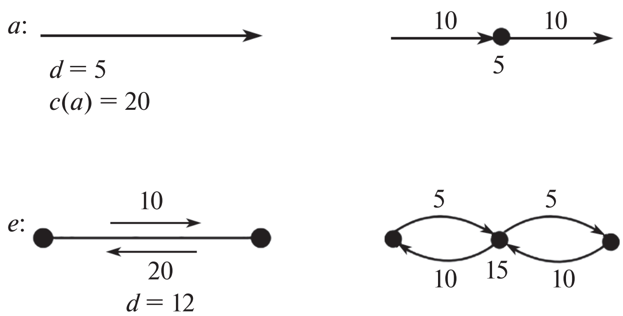

Рис. 2. Добавление фиктивных вершин на дугу и ребро.

но, посещающий некоторые вершины более одного раза, $d_i : X \to \mathbb{Z}_+$ – функция спроса, удовлетворяемого в вершинах Π_i, так что $d_i(x_{i_j}) \in \{0, d(x_{i_j})\}$ для $j = \overline{1, l}$ и выполняется ограничение на грузоподъемность $\sum_{j=1}^{l} d_i(x_{i_j}) \leq D$. Вес (стоимость) маршрута R_i совпадает с суммарной стоимостью входящих в него дуг. Задача состоит в построении множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \ldots, R_s\}$ минимальной суммарной стоимости, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Алгоритм 1

1. Выделим множество $T \subseteq V$, содержащее потребителей с ненулевым спросом и особую вершину-склад O.

2. Построим для исходного графа и множества терминальных вершин T α-приближенное решение C задачи о штейнеровском цикле.

3. Определим разбиение цикла C на максимально полные по включению фрагменты U_1, $U_2, \ldots, U_k$ и следующих за ними выделенных потребителей с ненулевым спросом $O_1, O_2, \ldots, O_m$, так что суммарный спрос вершин в любом из фрагментов разбиения не превосходит D (рис. 1).

4. Построим множество маршрутов $R_1, \ldots, R_{k+m}$ как набор кратчайших циклических маршрутов, каждый из которых содержит фрагмент или выделенного потребителя из разбиения, удовлетворяет их общий спрос и содержит склад.

5. Найденное семейство маршрутов $S = \{R_1, \ldots, R_{k+m}\}$ искомое.

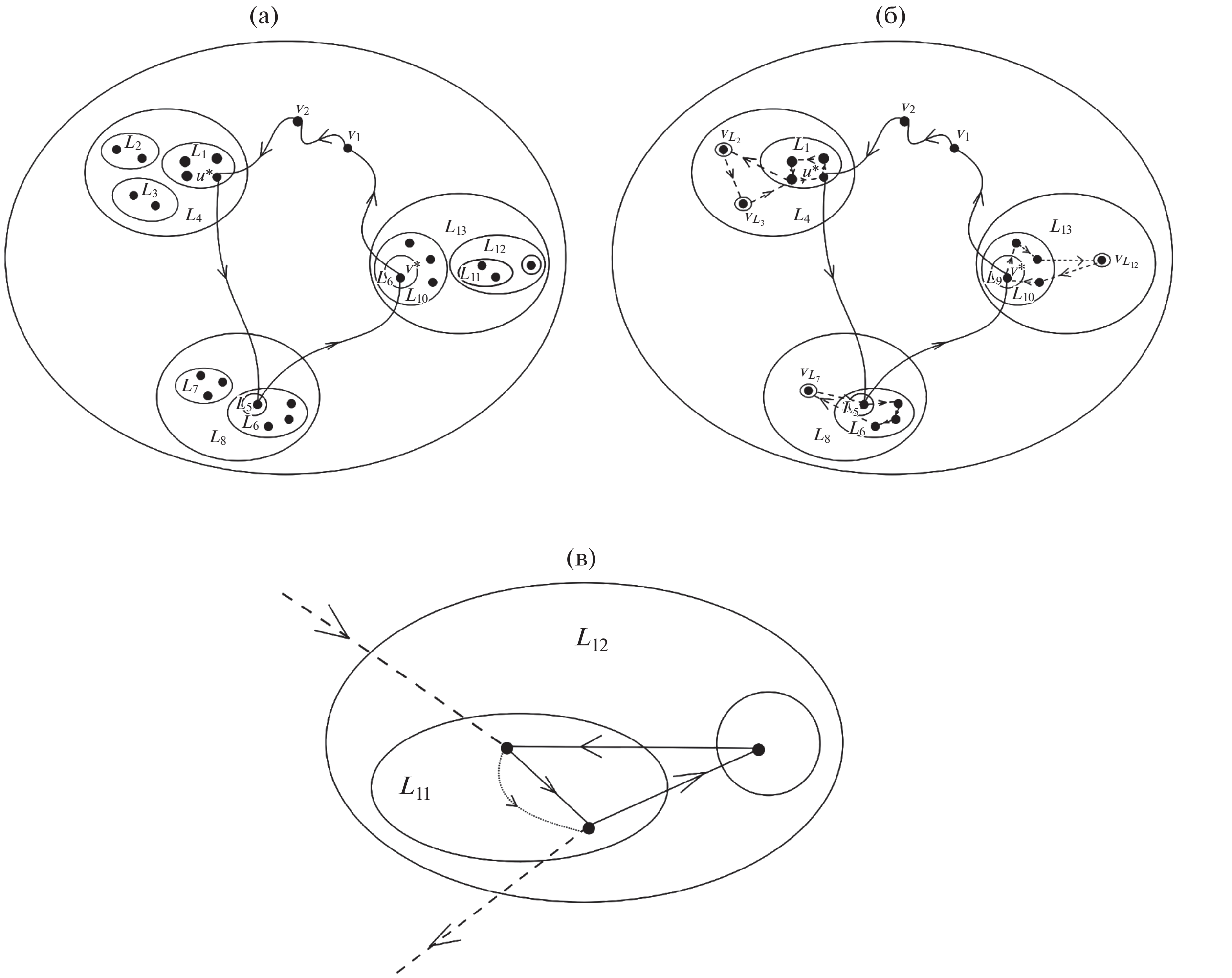

Рис. 3. (а): получение прототипа хребта $\mathcal{B}$ (волнистая линия) для $S = \{v_1, v_2\}$; (б): сжатие подмножеств $L \in \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}$ и получение эйлерова мультимножества ребер в графе G' с помощью (κ, η)-алгоритма; (в): результат применения $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ для множества L_{12} и дополнение результата $\mathcal{L}$-путем (пунктирная линия).

В плане построения алгоритмов с гарантированными оценками точности двойственная для задачи маршрутизации постановка – это задача обхода дуг и ребер со спросом на смешанных графах (Capacitated Arc Routing Problem, CARP) [16], в которой также требуется построить набор замкнутых маршрутов, отвечающих ограничениям на грузоподъемность и полностью удовлетворяющих весь заданный спрос, не разграничивая требования между транспортными средствами в парке. Нетрудно показать [13] с помощью преобразования исходного графа, добавления фиктивных вершин на дуги и ребра с ненулевым спросом и разделения транспортных издержек между инцидентными новым вершинам дугами (рис. 2), что асимметричные постановки CARP и CVRP-UCD эквивалентны, в результате задача обхода дуг имеет тот же коэффициент аппроксимации.

Теорема 2. *Из существования α-приближенного алгоритма для ATSP следует, что*

(i) *алгоритм 1 строит $(3\alpha + 2)$-приближенное решение задачи ACVRP-UCD*;

(ii) *задача* CARP *на смешанных графах обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с тем же фактором аппроксимации*.

Отметим, что значение $3\alpha + 2$ для CARP с неравенством треугольника существенно улучшает предыдущий известный результат $8\alpha \cdot (C + 1) + 27$ [16], где C – это количество компонент связности в подграфе, индуцированном дугами и ребрами с ненулевым спросом, а α, по-прежнему, коэффициент аппроксимации ATSP.

4. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА С ПРИЗАМИ

В работе [14] обоснована полиномиальная аппроксимируемость асимметричной задачи коммивояжера с призами (Prize Collecting Traveling Salesman Problem, PCATSP) в классе алгоритмов с константной оценкой точности. Предложенный авторами алгоритм опирается на полиномиальное сведение к вспомогательной постановке ATSP, получаемой в результате округления оптимального решения вещественной релаксации исходной задачи.

Зададимся полным ориентированным графом $G = (V, E, c, \pi)$ с неравенством треугольника относительно весовой функции c, $\pi : V \to \mathbb{R}_+$ задает штрафы за непосещение допустимым маршрутом вершин. Требуется построить маршрут $R = x_{i_1}, e_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, e_k, x_{i_1}$, где $k = \overline{0,n}$, для которого стоимость с учетом штрафов минимальна:

$$\mathrm{cost}(R) = \sum_{i=1}^{k} c(e_i) + \sum_{v \in V \setminus \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}} \pi(v).$$

Очевидно, что в частном случае при достаточно больших значениях штрафов для всех вершин заданного графа задача коммивояжера с призами эквивалентна классической задаче коммивояжера, как следствие, является труднорешаемой даже на евклидовой плоскости [17]. В работе [18] для метрической постановки задачи был предложен $\frac{5}{2}$-приближенный алгоритм, использующий идею округления дробных решений релаксации задачи целочисленного линейного программирования и алгоритм Кристофидеса–Сердюкова для индуцированной метрической TSP в качестве “черного ящика”. Воспользуемся аналогичным подходом при построении алгоритма с константным фактором аппроксимации для общей постановки PCATSP.

Рассмотрим вспомогательную постановку $\mathrm{PCATSP}_{\{u,v\}}$ с дополнительным ограничением: произвольный допустимый маршрут проходит через вершины $\{u, v\} \subset V$. Легко видеть, что оптимум исходной задачи соответствует минимуму среди решений всевозможных постановок $\mathrm{PCATSP}_{\{u,v\}}$ или значению целевой функции для “пустого” маршрута R_{emp}, не посещающего ни одной вершины. Для $\mathrm{PCATSP}_{\{u,v\}}$ используем следующую модель задачи целочисленного линейного программирования:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{w \in V} \pi_w (1 - y_w) \tag{2}$$

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w)) \quad (w \in V), \tag{3}$$

$$x(\delta(S)) \geqslant 2 \ (S \subset V : |S \cap \{u,v\}| = 1), \tag{4}$$

$$x(\delta(S)) \geqslant 2 y_w \quad (S \subseteq V \setminus \{u,v\},\, w \in S), \tag{5}$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+, \quad y_w \in \{0,1\}, \tag{6}$$

$$y_u = y_v = 1, \tag{7}$$

ограничения (3) обеспечивают эйлеровость, а (4), (5) – связность индуцированного подграфа, в свою очередь y_v указывает, посещается ли вершина $v \in V$ допустимым маршрутом.

Алгоритм 2

1. Сопоставим исходной задаче PCATSP семейство вспомогательных постановок $\mathrm{PCATSP}_{\{u,v\}}$ для всевозможных $\{u, v\} \subset V$.

2. Для каждой задачи из семейства найдем $(\overline{x}, \overline{y})_{\{u,v\}}$ – оптимальное решение соответствующей $\mathrm{PCATSP}_{\{u,v\}}$ вещественной релаксации с ограничениями в виде неравенств $x_e \geqslant 0$ и $0 \leqslant y_w \leqslant 1$. Выделим множество вершин $T_{\{u,v\}} \subseteq V$, для которых значения $\overline{y}$ не менее $\frac{\alpha}{\alpha + 1}$, и найдем α-приближенное решение $R_{\{u,v\}}$ задачи ATSP на индуцированном подграфе $G[T_{\{u,v\}}]$.

3. Решение определяется следующим соотношением

$$\overline{R} = \begin{cases} \arg\min\{\mathrm{cost}(R_{\{u,v\}})\}, \text{ если } \min\{\mathrm{cost}(R_{\{u,v\}}) + \sum_{w \in V} \pi_w\}, \\ R_{\mathrm{emp}}, \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 3. *Алгоритм 2 находит* $(\alpha + 1)$*-приближенное решение задачи PCATSP.*

Для перечисленных выше результатов использовался подход, основанный на полиномиальном сведении исследуемой задачи к одной или нескольким вспомогательным постановкам задачи ATSP. При построении алгоритма для задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов обратимся к более глубокой адаптации подхода Свенссона-Трауб.

5. ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ ГРАФА ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

Задача о покрытии минимальной стоимости графа не более чем k циклами (Minimum-weight k-Size Cycle Cover Problem, Min-k-SCCP) является известной комбинаторной задачей, занимающей "промежуточное" положение между полиномиально разрешимой задачей о назначениях и NP-трудной в сильном смысле задачей коммивояжера. Как известно [19], симметричная версия задачи при произвольном фиксированном k наследует аппроксимационные свойства задачи TSP:

– аппроксимируемость задачи в общем случае с фактором $\alpha = \Omega(2^n)$ влечет равенство $P = NP$;

– метрическая постановка задачи допускает аппроксимацию с константным фактором;

– в конечномерных числовых пространствах фиксированной размерности задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных схем (PTAS).

Обратимся к асимметричной постановке задачи, условие которой задается упорядоченной парой (G, c), где $G = (V, E)$ – ориентированный граф, в котором $|V| > k$, а стоимости перемещения по произвольной дуге $e = (u, v)$ определяются весовой функцией $c : E \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей неравенству треугольника (1). Требуется построить остовный эйлеров подмультиграф без изолированных вершин $(V, F) \subset G$ минимальной стоимости $c(F) = \sum_{e \in F} c_e x_e$, число компонент связности которого не превосходит k. Здесь и ниже используем x_e для обозначения кратности вхождения дуги e в мультимножество F.

Предлагаемый подход основан на последовательном сведении исходной постановки к аппроксимации вспомогательных задач, первую из которых договоримся называть *специализированной* и обозначать Min-k-SCCP$_S$. Условие задачи Min-k-SCCP$_S$ задается кортежем (G, c, S), где $S \subset V$, $|S| = k$, а множество допустимых решений стеснено дополнительным ограничением: каждая компонента связности произвольного допустимого подграфа должна иметь непустое пересечение с подмножеством S.

Лемма 1. *Для произвольного фиксированного $k > 1$ аппроксимируемость задачи Min-k-SCCP$_S$ в классе приближенных алгоритмов с фактором $\alpha \geqslant 1$ влечет полиномиальную аппроксимируемость задачи Min-k-SCCP с той же оценкой точности.*

Воспользуемся стандартными обозначениями $\delta^+(U) = \{(v, u) \in E : v \in U, u \notin U\}$ и $\delta^-(U) = \delta^+(V \setminus U)$ для исходящего и входящего разрезов, порождаемых непустым подмножеством $U \subset V$, и их объединения $\delta(U) = \delta^+(U) \cup \delta^-(U)$. В частном случае $U = \{v\}$ договоримся использовать сокращение $\delta(v) = \delta(\{v\})$.

Запишем для задачи Min-k-SCCP$_S$ следующую модель целочисленного линейного программирования (ILP-модель):

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \tag{9}$$

$$x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0 \quad (v \in V), \tag{10}$$

$$x(\delta(U)) \geqslant 2$$
$$((\varnothing \neq U \subset V \setminus S) \vee (U = \{u\} : u \in S)), \tag{11}$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+ \quad (e \in E). \tag{12}$$

Здесь целевая функция (9) выражает стоимость искомого подграфа, ограничение (10) гарантирует его эйлеровость, а ограничение (11) обеспечивает отсутствие изолированных вершин и выполнение ограничения на число компонент связности. Договоримся использовать обозначения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{D}$ для вещественной релаксации данной модели и двойственной к ней задачи линейного программирования.

По аналогии с подходом, предложенным в работах [11, 12], сведем далее задачу построения приближенного алгоритма для задачи Min-k-SCCP$_S$ к аппроксимации *сильно ламинарных* постановок данной задачи. Условие сильно ламинарной постановки задачи Min-k-SCCP$_S$ задается кортежем $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$, где:

$G = (V, E)$ – сильно связный ориентированный граф, $|V| > k$;

S – k-элементное подмножество V;

$\mathcal{L}$ – ламинарное семейство[1] подмножеств $V \setminus S$, для каждого элемента L которого индуцированный подграф $G[L]$ сильно связен;

$x : E \to \mathbb{R}_+$ – допустимое решение подсистемы (10)–(11), удовлетворяющее соотношению $x(\delta(L)) = 2$ при каждом $L \in \mathcal{L}$;

y – отображение $\mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$.

Из классических соотношений двойственности следует, что произвольный кортеж $\mathcal{I}$ индуцирует постановку $(G, \bar{c}, S)$ задачи Min-k-SCCP$_S$, весовая функция $\bar{c}$ которой задается соотношением

$$\bar{c}_e = \bar{c}(e) = \sum_{L \in \mathcal{L} : e \in \delta(L)} y_L \quad (e \in E),$$

а оптимальное значение вещественной релаксации $\mathcal{P}_{ind}$ и двойственной к ней задачи линейного программирования $\mathcal{D}_{ind}$ – соотношением

[1] Семейство подмножеств $\mathcal{L}$ называется ламинарным, если для произвольных $A, B \in \mathcal{L}$ выполняется одна из трех альтернатив: $A \subseteq B$, $B \subset A$ или $A \cap B = \varnothing$.

$$\mathrm{LP}(\mathcal{I}) = \mathrm{OPT}(\mathcal{P}_{\mathrm{ind}}) = \\ = \sum_{e\in E}\overline{c}_e x_e = \sum_{L\in\mathcal{L}} 2y_L = \mathrm{OPT}(\mathcal{D}_{\mathrm{ind}}). \quad (13)$$

Лемма 2. *Пусть для некоторого* $\alpha \geq 1$ *существует полиномиальный алгоритм, сопоставляющий произвольной сильно ламинарной постановке* $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, l, S, x, y)$, $l \leq k$ *приближенное решение, стоимость которого не превосходит* $\alpha\sum_{e\in E}\overline{c}_e x_e$. *Тогда для задачи Min-*k*-SCCP*$_S$ *существует полиномиальный алгоритм, находящий для произвольной постановки* (G, c, S) *допустимое решение стоимости* $c(F) \leqslant \alpha\cdot\mathrm{OPT}(\mathcal{P})$.

Таким образом, аппроксимируемость исходной задачи Min-k-SCCP нами редуцирована к задаче построения приближенного алгоритма для сильно ламинарных постановок задачи. Для описания этого алгоритма нам потребуется несколько дополнительных определений и обозначений.

Пусть $u, v \in V$ и $W \in \mathcal{L}\cup\{V\}$ – минимальное по включению множество, содержащее обе вершины. Путь $P_{u,v}$, соединяющий вершины u и v в сильно связном подграфе $G[W]$ графа G и посещающий каждое подмножество $L \in \mathcal{L}$ не более одного раза, называется *$\mathcal{L}$-путем*. Весовой характеристикой $\mathcal{L}$-пути $P_{u,v}$ между вершинами $u, v \in W$ назовем величину $D_W(u,v) = \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}: L\subseteq W,\\ L\cap P_{u,v}\neq\varnothing}} 2y_L$.

Диаметром множества W назовем величину $D_W = \max_{u,v\in W} D_W(u,v)$.

Хребтом называется связный эйлеров мультиподграф $B \subset G$, в котором $V(B)\cap L \neq \varnothing$ для произвольного $L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2} = \{L\in\mathcal{L} : |L| \geq 2\}$. Упорядоченную пару $(\mathcal{I}, B)$ назовем *вертебральной*.

Вслед за работой [12] (κ,η)-алгоритмом для произвольных $\kappa,\eta \geqslant 0$ договоримся называть алгоритм с полиномиальной трудоемкостью, достраивающий хребет B произвольной вертебральной пары $(\mathcal{I}, B)$ до связного эйлерова подмультиграфа $(V, E(B)\cup F')$, так что

$$c(F') \leq \kappa\mathrm{LP}(\mathcal{I}) + \eta\sum_{v\in V\setminus V(B):\{v\}\in\mathcal{L}} 2y_{\{v\}},$$

где LP задается соотношением (13).

Лемма 3. *Для произвольных* $k > 1$, $\varepsilon > 0$ *и класса вертебральных пар* $(\mathcal{I}, B)$, *где* $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$ – *сильно ламинарная постановка задачи Min-*k*-SCCP*$_S$ *и* B – *произвольный хребет, содержащий подмножество* S, *существует* (κ,η)*-алгоритм при* $\kappa = 2$ *и* $\eta = 14 + \varepsilon$.

Перейдем к описанию алгоритма для сильно ламинарной постановки Min-k-SCCP$_S$. В качестве параметров выступают (κ,η)-алгоритм, достраивающий хребет B до остовного связного эйлерова подграфа, и алгоритм Свенссона-Трауб $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ для поиска приближенных решений вспомогательных сильно ламинарных постановок ATSP, на выходе алгоритм строит связный эйлеров подмультиграф (V, F) графа G. Основная идея заключается в построении соответствующей исходной постановки $\mathcal{I}$ вертебральной пары, в которой все вершины из множества S принадлежат хребту, применении к построенной паре (κ,η)-алгоритма, в случае, если результирующий подмультиграф не является остовным и эйлеровым, дополнении его вспомогательными маршрутами и $\mathcal{L}$-путями.

Алгоритм 3

1. Построим заготовку хребта $\mathcal{B}$.

1.1. Выберем такие $u^*, v^* \in V$, для которых $D_V = D_V(u^*, v^*)$, и построим путь P_{u^*,v^*}.

1.2. Пронумеровав произвольным образом вершины заданного множества $v_1,\ldots,v_k \in S$, построим $\mathcal{L}$-пути $P_{v^*,v_1}, P_{v_1,v_2},\ldots,P_{v_k,u^*}$ и получим заготовку хребта $\mathcal{B} = P_{u^*,v^*}\cup P_{v^*,v_1}\cup P_{v_1,v_2}\ldots\cup P_{v_k,u^*}$ путем последовательного объединения путей (рис. 2).

2. Проверим, посещает ли $\mathcal{B}$ все множества из ламинарного семейства $L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2}$. Пусть $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}$ – семейство максимальных по включению множеств $L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2}$ среди тех, что остались непосещенными подграфом $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}} = \varnothing$, пара $(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ является вертебральной. Применив к ней (κ,η)-алгоритм, получим мультимножество дуг F'' и перейдем к завершающему шагу 7. В противном случае продолжаем вычисления с шага 3.

3. Сформируем вертебральную пару $(\mathcal{I}', \mathcal{B})$. Для этого перейдем к новой постановке

$$\mathcal{I}' = (G', \mathcal{L}', k, S, x', y')$$

путем сжатия каждого $L \in \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}$ в соответствующую дополнительную вершину v_L. В результате такого преобразования получаем новый орграф

$$G' = \left(\left(V\setminus\bigcup_{L\in\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}} L\right)\cup\left(\bigcup_{L\in\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}} v_L\right), E\setminus\bigcup_{L\in\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}} E[L]\right),$$

новое ламинарное семейство

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}\setminus\{L\in\mathcal{L} : (\exists U\in\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}} : L\subseteq U)\}\bigcup_{L\in\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}}\{v_L\},$$

не включающее множества $L \in \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}$ и их подмножества и дополненное синглетонами $\{v_L\}$.

Определим x' как x на множество дуг графа G', а двойственные переменные $y' : \mathcal{L}' \to \mathbb{R}_+$ зададим следующим образом:

$$y'_L = \begin{cases} y_L, & \text{если } L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'; \\ y_L + D_L/2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению $(\mathcal{I}', \mathcal{B})$ – вертебральная пара.

4. Применим (κ, η)-алгоритм к вертебральной паре $(\mathcal{I}', \mathcal{B})$ и получим эйлерово мультимножество ребер F' в графе G' (см. рис. 2).

5. Вернемся к постановке $\mathcal{I}$. Применив алгоритм $\mathcal{A}^*_{ATSP}$, построим приближенное решение задачи коммивояжера для каждого подграфа $G[L]$, индуцированного произвольным множеством $L \in \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}$, множество дуг которого назовем F_L. Для сохранения эйлеровости окончательного решения дополним его $\mathcal{L}$-путями P_L (см. рис. 2). Количество вызовов алгоритма $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ равно $|\mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}| = O(n)$.

6. Объединим все полученные мультимножества в $F'' = \left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\overline{\mathcal{B}}}} (F_L \mathbin{\dot\cup} P_L) \right) \mathbin{\dot\cup} F'$.

7. Положим $F = E(\mathcal{B}) \mathbin{\dot\cup} F''$.

Результатом работы алгоритма является эйлеров подграф (V, F).

По построению, Алгоритм 3 находит допустимое решение для заданной сильно ламинарной постановки $\mathcal{I}$ и обладает полиномиальной трудоемкостью. Верхняя оценка его фактора аппроксимации приведена в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть для заданных $\kappa, \eta \geqslant 0$ существует (κ, η)-алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$. Тогда для произвольной сильно ламинарной постановки Min-k-$SCCP_S$ алгоритм* 3 *находит за полиномиальное время решение (V, F) стоимости*

$$c(F) \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} (3\kappa + \eta + 2) \cdot \mathrm{LP}\mathcal{I}, & \text{при } k \le 2\kappa + \eta \\ (\kappa + k + 2) \cdot \mathrm{LP}\mathcal{I}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Основной результат данного раздела следует из лемм 1–4.

Теорема 4. *Для произвольных $k \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ задача Min-k-SCCP допускает аппроксимацию в классе α-приближенных полиномиальных алгоритмов, где α определяется как*

$$\alpha = \begin{cases} 22 + \varepsilon, & \text{если } k \le 18 + \varepsilon, \\ 4 + k, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В развитие пионерского подхода Свенссона-Трауб в данной работе предложены первые полиномиальные приближенные алгоритмы с фиксированными теоретическими оценками точности для ряда асимметричных постановок маршрутных задач комбинаторной оптимизации. Среди открытых вопросов отметим предполагаемое распространение предложенного подхода на более широкий класс оптимизационных задач. Кроме того, представляет интерес вопрос уточнения найденных верхних оценок, в том числе путем проведения численных экспериментов на современных библиотеках текстовых примеров (напр., [20]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данное исследование поддержано Российским научным фондом, грант № 22-21-00672, https://rscf.ru/project/22-21-00672/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gutin G., Punnen A.P.* The Traveling Salesman Problem and Its Variations. Springer US, Boston, MA, 2007.
2. *Toth P., Vigo D.* Vehicle Routing. Problems, Methods, and Applications. SIAM, Philadelphia, 2014.
3. *Desrosiers J. and Lübbecke M.E.* Branch-Price-and-Cut Algorithms. In Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science (eds. J.J. Cochran, L.A. Cox, P. Keskinocak, J.P. Kharoufeh and J.C. Smith). Wiley and Sons, NJ. 2015.
4. *Gendreau M., Potvin J.-Y.* Handbook of Metaheuristics. Springer. 2019.
5. *Vazirani V.* Approximation algorithms. Springer. Berlin. 2003.
6. *Williamson D.P., Shmoys D.B.* The Design of Approximation Algorithms. New York, USA, 2011.
7. *Christofides N.* Worst-case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem // Technical Report 388. Graduate School of Industrial Administration. Carnegie-Mellon University. 1976.
8. *Сердюков А.И.* О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. 1978. Т. 17. С. 76–79.
9. *Haimovich M., Rinnooy Kan A.H.G.* Bounds and Heuristics for Capacitated Routing Problems // Mathematics of Operations Research. 1985. V. 10. № 4. P. 527–542.
10. *Asadpour A., Goemans M.X., Mądry A., Gharan S.O., Saberi A.* An $O(\log n / \log\log n)$-approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem // Operations Research. 2017. V. 65. № 4. P. 1043–1061.
11. *Svensson O., Tarnawski J., Vegh L.A.* A constant-factor approximation algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem // J. ACM. 2020. V. 67. № 6. P. 1–53.
12. *Traub V., Vygen J.* An improved approximation algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem // SIAM Journal on Computing. 2022. V. 51. № 1. P. 139–173.

13. *Khachay M., Neznakhina E., Ryzhenko K.* Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to the Asymmetric Traveling Salesman Problem // Proc. Steklov Inst. Math. 2022. V. 319. № 1. P. S140–S155.
14. *Rizhenko K., Neznakhina K., Khachay M.* Fixed ratio polynomial time approximation algorithm for the Prize-Collecting Asymmetric Traveling Salesman Problem // Ural Math. Journal. 2023. V. 9. № 1. P. 135–146.
15. *Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д., Рыженко К.В.* Полиномиальная аппроксимируемость асимметричной задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29. № 3. С. 261–273.
16. *van Bevern R., Hartung S., Nichterlein A., Sorge M.* Constant-factor approximations for capacitated arc routing without triangle inequality // Operations Research Letters. 2014. V. 42. № 4. P. 290–292.
17. *Papadimitriou C.* Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. V. 4. P. 237–244.
18. *Bienstock D., Goemans M.X., Simchi-Levi D., Williamson D.* A note on the Prize-Collecting Traveling Salesman Problem // Math. Program. 1993. V. 59. P. 413–420.
19. *Khachay M., Neznakhina K.* Approximability of the Minimum-Weight k-Size Cycle Cover Problem // J. of Global Optimization. 2016. V. 66. № 1. P. 65–82.
20. VRP-REP: the vehicle routing problem repository. http://www.vrp-rep.org/ Дата обращения 12.09.23.

APPROXIMATION ALGORITHMS WITH CONSTANT FACTORS FOR A SERIES OF ASYMMETRIC ROUTING PROBLEMS

E. D. Neznakhina[a,b], **Yu. Yu. Ogorodnikov**[a,b], **K. V. Rizhenko**[a], **and** Corresponding member of the RAS **M. Yu. Khachay**[a]

[a] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia*
[b] *Ural federal university, Ekaterinburg, Russia*

In this paper, the first fixed-ratio approximation algorithms are proposed for the series of asymmetric settings of the well-known combinatorial routing problems. Among them are the Steiner cycle problem, the prize-collecting traveling salesman problem, the minimum cost cycle cover problem by a bounded number of cycles, etc. Almost all the proposed algorithms rely on original reductions of the considered problems to auxiliary instances of the Asymmetric Traveling Salesman Problem and employ the breakthrough approximation results for this problem obtained recently by O. Svensson, J. Tarnawski, L. Végh, V. Traub and J. Vygen. On the other hand, approximation of the cycle cover problem was proved by more deep extension of their approach.

Keywords: asymmetric traveling salesman problem, approximation algorithm, constant ratio, Steiner cycle problem, Vehicle Routing Problem, Cycle Cover Problem