

УДК 517.984.52

ОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРАКА

© 2023 г. А. М. Савчук^{1,*}, И. В. Садовничая^{1,**}

Представлено академиком Б.С. Кашиным

Поступило 26.06.2023 г.

После доработки 25.10.2023 г.

Принято к публикации 01.11.2023 г.

В работе изучается вопрос о построении и оценках сильно непрерывной операторной группы, порожденной одномерным оператором Дирака, действующем в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. Потенциал предполагается суммируемым. Доказано, что эта группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ и в пространствах \mathbb{H}_U^θ , $\theta > 0$, учитывающих краевые условия. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. Кроме того, получены оценки на рост группы.

Ключевые слова: оператор Дирака, суммируемый потенциал, операторная группа

DOI: 10.31857/S2686954323600568, **EDN:** CZLLLF

Рассмотрим одномерный оператор Дирака

$$\mathcal{L}y = \mathbf{B}y' + P(x)y,$$

$$\text{где } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$x \in [0, \pi]$, $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. Предполагается, что краевые условия

$$Uy = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0$$

регулярны по Биркгофу, т.е. $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Здесь J_{ik} – определитель, составленный из i -го и k -го столбцов матрицы $U = (u_{ij})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4}$. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ определен на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{y \in W_1^1[0, \pi] : \mathcal{L}y \in \mathbb{H}, Uy = 0\}.$$

Функция $P(x)$ – комплекснозначная, $p_j \in L_1[0, \pi]$. Работа посвящена построению и оценкам сильно непрерывной операторной группы

$$T(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, ищется решение динамического уравнения

$$i \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{B}\mathbf{u} + P(x)\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}.$$

Показано, что указанная группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ и в пространствах \mathbb{H}_U^θ , $\theta \in (0, 1]$, построенных по оператору \mathcal{L} с помощью комплексной интерполяции

$$\mathbb{H}_U^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^1]_\theta.$$

В частности, \mathbb{H}_U^θ совпадает с классическим пространством бесселевых потенциалов \mathbb{H}^θ при $\theta \in [0, 1/2)$. Пространство \mathbb{H}_U^1 – это классическое пространство Соболева $(W_2^1[0, \pi])^2$, суженное на краевые условия $Uy = 0$. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. Кроме того, получены оценки вида

$$\|T(t)\| \leq C(1 + |t|^p)e^{\beta|t|}. \quad (1)$$

Несложно показать, что спектр невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi} \ln z_0 + 2n$ и $-\frac{i}{\pi} \ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 – корни квадратного уравнения

$$J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0, \quad (2)$$

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: savchuk@cosmos.msu.ru

**E-mail: ivsad@yandex.ru

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\text{Im } z \in (-\pi, \pi]$. В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну. В случае, если дискриминант квадратного уравнения (2) равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны. Краевые условия будем называть *сильно регулярными*, если $(J_{12} + J_{34})^2 \neq 4J_{23}J_{14}$. Обозначим $\kappa_0 = -\frac{i}{\pi} \ln z_0$, $\kappa_1 = -\frac{i}{\pi} \ln z_1 - 1$. Справедливо следующее утверждение (см. [1, 2]).

Лемма 1. *Любой регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом представим в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$, ограниченного в \mathbb{H} оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения и компактной резольвенты. В частности, если краевые условия сильно регулярны, то оператор V можно взять конечномерным.*

Спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Их нумерацию (с учетом алгебраической кратности) можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства

$$\lambda_n = n + \kappa_{\lfloor n/2 \rfloor} + o(1), \quad |n| \rightarrow \infty,$$

причем геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений совпадают, т.е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в \mathbb{H} .

Таким образом, оператор iA порождает сильно непрерывную группу в \mathbb{H} . Возмущение генератора группы ограниченным оператором снова дает генератор группы.

Теорема 1. *Оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ порождает в \mathbb{H} сильно непрерывную операторную группу. Базисность Рисса позволяет записать группу явно*

$$T(t)\mathbf{u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{u}, \mathbf{z}_n) e^{i\lambda_n t} \mathbf{y}_n$$

Здесь $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — система СПФ, собственные функции нормированы $\|\mathbf{y}_n\| = 1$, присоединенные выбираются классически (максимальные цепочки по Келдышу). $\{\mathbf{z}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — биортогональная система — собственные и присоединенные функции сопряженного оператора. Для нормы $\|T(t)\|$ справедлива оценка (1), где $\beta = \sup |\text{Im} \lambda_n|$, точная грань берется по всем собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Кроме того, если $P \in L_\kappa$ при $\kappa > 1$, то β ограничено зависит от $\|P\|_\kappa$.

Константа в оценке $\|T(t)\| \leq Ce^{\beta t}$ есть константа Рисса базисов $\{\mathbf{y}_n\}$ и $\{\mathbf{z}_n\}$. В более ранних рабо-

тах авторов показано, что при фиксации краевых условий она зависит только от $\|P\|_\kappa$, $\kappa > 1$.

Заметим далее, что оператор $(\mathcal{L} - \lambda_0 I)^{-1}$ является изоморфизмом пространства \mathbb{H} на пространство \mathbb{H}_U^1 . Тогда из существования операторной группы $\exp(i\mathcal{L}_{P,U})$ в \mathbb{H} следует ее ограниченное действие и в \mathbb{H}_U^1 . Случай пространства \mathbb{H}_U^0 получается из доказанного интерполяцией оператора $\exp(i\mathcal{L}_{P,U})$.

В пространствах L_μ при $\mu \neq 2$ вместо базисности Рисса доказана лишь базисность Шаудера системы СПФ, что не позволяет напрямую определить операторную группу. Критерий Хилле–Иосиды трудно проверяем. Оценок на $\|(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-k}\|$ нет. Достаточный признак существования полугруппы (А.М. Гомилко, [3]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|(\mathcal{L}_{P,U} - (\sigma + i\tau)I)^{-2}\| d\sigma < \infty$$

(в гильбертовом случае является критерием), по-видимому, не выполнен. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом. Тогда оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ является генератором сильно непрерывной операторной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в $(L_\mu[0, \pi])^2$ для любого $\mu \in (1, \infty)$. При этом справедливы оценки вида*

$$\|T(t)\| \leq C \exp(\beta t) \|T_0(t)\|,$$

T_0 — группа, порожденная оператором с нулевым потенциалом, числа β и C зависят только от $\|P\|_{L_1}$.

Идея доказательства заключается в использовании операторов преобразования и асимптотик для собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ специального вида, полученных в статье С. Альбервио, Р. Гринива и Я. Микитюка [4]:

$$\lambda_n = n + e_n(p), \quad e_n(p) = \int_0^\pi p(x) e^{inx} dx,$$

где функция p определяется потенциалом — если $P \in L_\kappa$, то и $p \in L_\kappa$.

С историей вопроса и близкими результатами можно ознакомиться в работах [2, 5–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкалик А.А. // УМН. 1979. Т. 34. № 5(209). С. 235–236.
2. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. // Math. Notes. 2014. V. 96 № 5. P. 777–810.

3. *Гомилко А.М.* // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33 № 4. С. 66–69.
4. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* // Russian J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 4. P. 406–42.
5. *Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
6. *Djakov P., Mityagin B.* // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. № 4. P. 1361–1375.
7. *Beigl A., Eckhardt J., Kostenko A., Teschl G.* // J. Math. Phys. 2015. V. 56, 012102.
8. *Djakov P., Mityagin B.* // Russ. Math. Surv. 2020. V. 75. № 4. P. 587–626.
9. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* // Совр. мат-ка. Фунд. напр-я. 2020. Т. 66. № 3. С. 373–530.
10. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.

OPERATOR GROUP GENERATED BY A ONE-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM

A. M. Savchuk^a and I. V. Sadovnichaya^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, we construct a strongly continuous operator group generated by a one-dimensional Dirac operator acting in the space $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. The potential is assumed to be summable. It is proved that this group is well-defined in the space \mathbb{H} and in the Sobolev spaces $\mathbb{H}_{\mu}^{\theta}$, $\theta > 0$, with fractional index of smoothness θ and under boundary conditions U . Similar results are proved in the spaces $(L_{\mu}[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. In addition we obtain estimates for the growth of the group as $t \rightarrow \infty$.

Keywords: Dirac operator, summable potential, operator group