

УДК 519.63

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА В СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СХЕМАХ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров<sup>1,\*</sup>, В. И. Голубев<sup>1,2,\*\*</sup>,  
А. В. Шевченко<sup>1,2,\*\*\*</sup>, И. С. Никитин<sup>2,\*\*\*\*</sup>

Поступило 02.06.2023 г.  
После доработки 19.10.2023 г.  
Принято к публикации 03.11.2023 г.

В настоящей работе рассматривается задача построения численного решения системы уравнений акустики в фиксированной области пространства с границей. Физически она соответствует процессу распространения сейсмических волн в геологических средах при проведении сейсмической разведки месторождений углеводородов. Рассматриваемая система уравнений в частных производных первого порядка является гиперболической. Для построения ее численного решения применяется сеточно-характеристический метод на расширенном пространственном шаблоне. Данный подход позволяет построить схему повышенного порядка аппроксимации во внутренних точках расчетной области, однако требует аккуратного построения решения вблизи ее границ. В работе предложен подход, позволяющий сохранить повышенный порядок расчетной схемы вплоть до границы включительно. Проведена серия верификационных компьютерных расчетов.

*Ключевые слова:* акустические волны, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, граничные условия, порядок аппроксимации

DOI: 10.31857/S2686954323600465, EDN: ANRFWD

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость численного решения линейных гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка возникает при описании широкого круга технологических процессов. К ним относятся, например, процесс проведения неразрушающего контроля композиционных материалов [1] и сейсмическая разведка месторождений углеводородов [2]. Отличительными особенностями данных волновых задач являются повышенные требования к точности вычислительных алгоритмов и отсутствию нефизических осцилляций, в том числе на разрывных решениях.

На сегодняшний день разработаны различные методы, позволяющие построить численное решение системы линейных гиперболических урав-

нений с постоянными и с переменными, в том числе, разрывными коэффициентами. К ним относятся конечно-разностные [3], конечно-элементные [4] и конечно-объемные схемы [5]. В последнее время активно развивается сеточно-характеристический метод [6], изначально предложенный для задач газовой динамики [7]. Он хорошо зарекомендовал себя применительно к задачам сейсмической разведки при использовании акустического [8], линейного изотропного [9] и анизотропного [10] упругого, двухконтинуального [11] и упруго-вязкопластического [12] приближений. Значительные усилия были приложены для построения конечно-разностных и спектральных схем повышенного порядка аппроксимации [13, 14]. Подробное исследование диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем для линейного уравнения переноса представлено в работах [15, 16]. Среди широкого класса сеточно-характеристических схем наибольшее практическое применение получила схема третьего порядка аппроксимации [17]. При этом важным аспектом является корректная реализация граничных условий, согласованных по порядку аппроксимации с используемой внутри расчетной области схемой. Яркими примерами значимых достижений в данном направлении является построение граничных условий четвертого порядка

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: petrov@mipt.ru

\*\*E-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

\*\*\*E-mail: alexshevchenko@phystech.edu

\*\*\*\*E-mail: i\_nikitin@list.ru

для конечно-разностных схем [14] и третьего порядка для конечно-объемных схем [18].

В настоящей работе предложен подход, позволяющий сохранить третий порядок сеточно-характеристической расчетной схемы вплоть до границы расчетной области включительно. Исследован случай одномерной задачи о динамическом нагружении акустической среды. Представлены результаты проведенных компьютерных расчетов, подтверждающие преимущества предложенного подхода.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений акустики, использующаяся для описания динамического поведения геологической среды при распространении в ней сейсмических волн, имеет вид [19]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) рассматривается на множестве  $(\vec{r}, t) \in D \times [0, T]$ , где  $D$  – ограниченная область в  $R^3$ . На кусочно-гладкой границе  $\partial D$  задано граничное условие  $p(\vec{r}, t) = P(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \partial D, t \in [0, T]$ , где  $P(\vec{r}, t)$  – заданная непрерывная функция. Вместе с начальными условиями  $\vec{V}(\vec{r}, 0) = \vec{V}_0(\vec{r}, 0)$ ,  $p(\vec{r}, 0) = p_0(\vec{r}, 0) \quad \forall \vec{r} \in D$  это задает корректную по Адамару дифференциальную начально-краевую задачу.

Искомые функциями пространства и времени являются:  $p$  – отклонение давления от его равновесного значения,  $\vec{V}$  – скорость частиц среды. Механическими параметрами среды при этом выступают: плотность  $\rho(\vec{r})$  и скорость распространения волн сжатия-разрежения  $c(\vec{r})$ . При выводе системы (1) предполагается, что в исходном равновесном состоянии среда покоится как целое, и внешние силы на систему не действуют.

Рассмотрим одномерную динамическую задачу для однородной (коэффициенты задачи не зависят от пространственной координаты) акустической среды. Определяющая система уравнений в данном случае представима в матричном виде:

$$\vec{q}_t + \mathbf{A} \vec{q}_x = \vec{0}, \quad (2)$$

где нижние индексы  $x$  и  $t$  обозначают дифференцирование по координате и времени соответственно. В вектор  $\vec{q}$  включены все искомые функции задачи, а матрица  $\mathbf{A}$  не зависит от координаты и имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho & 0 \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Исходная система уравнений (1) в частных производных первого порядка является гиперболической, что позволяет представить матрицу  $\mathbf{A}$  в виде произведения трех матриц  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1}$ , где

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho c & -\rho c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

После перехода в инварианты Римана ( $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \omega^- \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \vec{U}$ ) система уравнений (2) представляется в виде двух линейных однородных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t} + c \frac{\partial \omega^+}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega^-}{\partial t} - c \frac{\partial \omega^-}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Используя свойства аналитических решений данных уравнений  $\omega^+(x, t + \tau) = \omega^+(x - c\tau, t)$  и  $\omega^-(x, t + \tau) = \omega^-(x + c\tau, t)$ , сеточно-характеристический подход сводит исходную дифференциальную задачу к задаче пространственной интерполяции полиномом заданной степени. На практике для сохранения достаточной точности получаемого численного решения на применяемых расчетных сетках используется полином третьей степени  $P_3(x)$ . Данная расчетная схема обладает дополнительным преимуществом – минимизацией численных осцилляций на разрывных решениях. Это обусловлено ее близостью в пространстве неопределенных коэффициентов к области монотонных по Фридрихсу схем [20, 21]. После расчета значений обоих инвариантов на следующем временном слое, значения компонента вектора  $\vec{q}$  однозначно восстанавливаются из соотношений (4). Данная расчетная схема является явной, а ее область устойчивости задается стандартным критерием Куранта-Фридрихса-Леви:  $\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1$ .

Для построения интерполянта  $P_3(x)$  требуются значения вектора  $\vec{q}^n$  в четырех точках пространственного шаблона для каждого из уравнений (5)–(6). Для уравнения (5) это точки  $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$ , для уравнения (6) –  $(x_{m-1}, x_m,$

$x_{m+1}, x_{m+2}$ ), где  $m$  – индекс узла, в котором рассчитывается решение в следующий момент времени  $n + 1$ . В том случае, если расчет производится вдали от границ расчетной области, описанный алгоритм может быть применен напрямую.

Однако вблизи границ возникают определенные ситуации, требующие аккуратного рассмотрения. В дальнейшем для определенности будем рассматривать только уравнение (5) вблизи левой границы расчетной области. Обобщение на случай уравнения (6) и правой границы расчетной области может быть проведено полностью аналогично. Рассмотрим отдельно процедуру вычисления значений на следующем временном слое в узле, отстоящем на один шаг пространственной сетки от границы (см. рис. 1а) и в узле, непосредственно находящемся на границе (см. рис. 1б).

Как видно из рис. 1а, непосредственное использование процедуры полиномиальной интерполяции  $P_3(x)$  возможно лишь для расчета значений  $\omega^-$ . При этом узел  $x_{-1}$ , формально необходимый для расчета значения  $\omega^+$  в данной точке, находится за границей расчетной области. Будем рассматривать данный узел как фиктивный, значения искомого вектора  $\vec{q}^n(x_{-1})$  в котором должны быть заданы каким-либо образом до начала расчета. Построим интерполянт второй степени  $P_2(x)$  по значениям  $\omega^+$ , известным в узлах  $(x_0, x_1, x_2)$ , и заполним значения в фиктивном узле  $x_{-1}$  так, чтобы  $\omega^+(x_{-1}) = P_2(x_{-1})$ . Отметим, что данное соотношение определяет не единственным образом значение вектора  $\vec{q}^n(x_{-1})$  в фиктивном узле. Данная неединственность будет снята в дальнейшем. После проделанных действий возможно формальное применение исходной схемы на полном расширенном шаблоне. При этом интерполяция с  $P_3(x)$  приведет к восстановлению того же значения в точке  $x^* = x_1 - c\tau$ , которое было получено при использовании  $P_2(x)$  на узлах  $x_0, x_1, x_2$ .

Перейдем теперь к рассмотрению ситуации, когда обрабатываемый узел находится непосредственно на границе расчетной области (см. рис. 1б). Для расчета значения  $\omega^-$  необходимо его значение в узле  $x_{-1}$ . Применим уже использованный ранее нами подход. Построим интерполяционный полином  $P_2(x)$  по значениям  $\omega^-$ , известных в узлах  $(x_0, x_1, x_2)$ , и заполним значения в фиктивном узле  $x_{-1}$  так, чтобы  $\omega^-(x_{-1}) = P_2(x_{-1})$ . Одновременно это снимает отмеченную ранее неединственность значений  $\vec{q}^n(x_{-1})$  в фиктивном узле. Рассмотрим теперь задачу расчета значения  $\omega^+(x_0)$  на

следующем временном слое. Поскольку характеристика, соответствующая положительному собственному значению, выходит за границу расчетной области, требуется использование иного подхода. Пусть на рассматриваемой границе расчетной области задано значение давления, возможно, как функция времени  $P(t)$ . Из соотношений (4) можно записать, что

$$P(t) = \frac{\rho c}{2} (\omega^+(x_0, t) - \omega^-(x_0, t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

Таким образом, значение искомого инварианта  $\omega^+(x_0)$  может быть вычислено как

$$\begin{aligned} \omega^+(x_0, t + \tau) &= \frac{2}{\rho c} P(t + \tau) + \omega^-(x_0, t + \tau) = \\ &= \frac{2}{\rho c} P(t + \tau) + P_3(x_0 + c\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что задание любого иного совместного граничного условия для задачи (2) приведет к построению аналогичного соотношения, в явном виде задающего значение искомого инварианта  $\omega^+(x_0)$ . В дальнейшем будем называть построенную выше расчетную схему “схемой с квадратичными продолжением”. В противовес этому будем использовать термин “схема с константным продолжением”, если неизвестное значение искомого функции на текущем временном слое в фиктивном узле задается простой константной экстраполяцией:  $\vec{q}^n(x_{-1}) = \vec{q}^n(x_0)$ .

Заметим, что предложенный подход построения вычислительного алгоритма вблизи границы расчетной области является не единственным из возможных. Например, в работе [22] предложен метод аналитического продолжения решения, обеспечивающий сохранение повышенного порядка аппроксимации схемы. Преимуществом описанного нами выше метода представляется его простота в обобщении на случай произвольных одномерных линейных гиперболических систем уравнений.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе была проведена эмпирическая оценка порядка сходимости описанного вычислительного алгоритма. Рассматривалась задача распространения акустических волн в среде протяженностью 1000 м с плотностью 1000 кг/м<sup>3</sup> и скоростью распространения волн 1500 м/с. Рассматривалась исходно покоящаяся ненагруженная среда, на левой границе которой задавалось значение давления по следующему закону

$$P(t) = \sin^4(20\pi t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

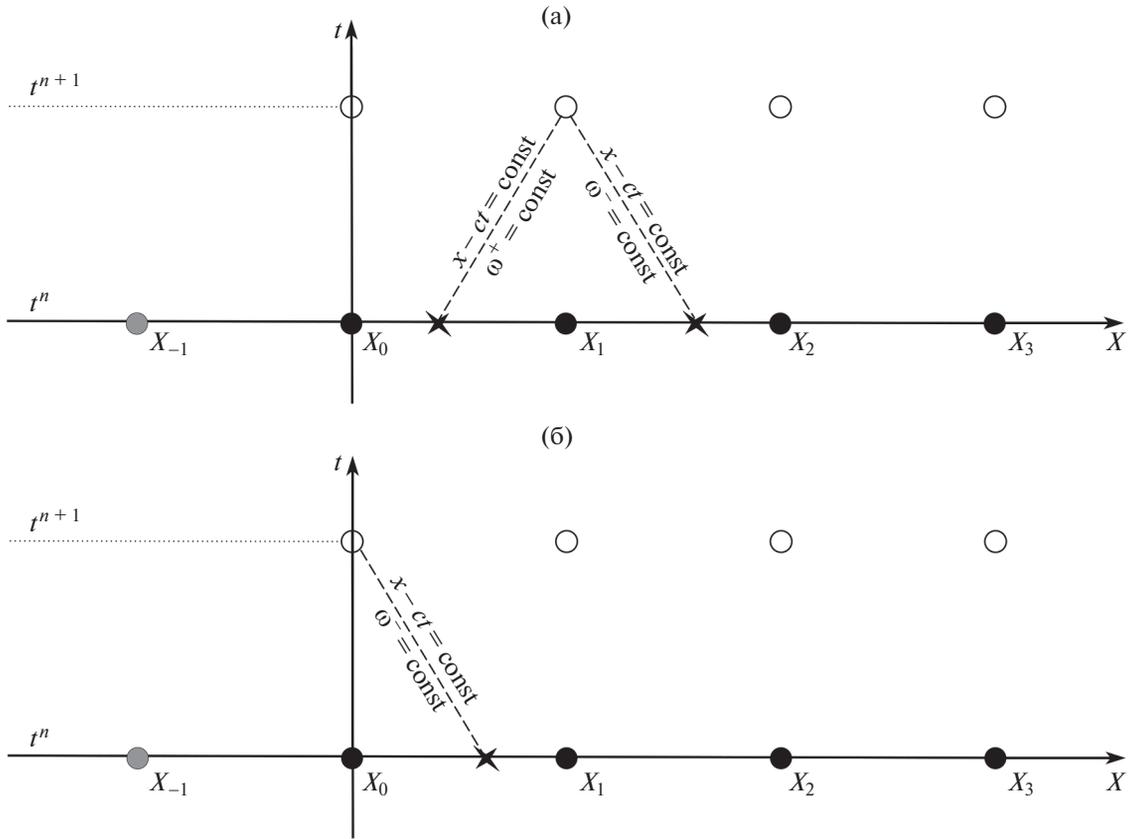


Рис. 1. К расчету значений искомых функций в приграничных узлах.

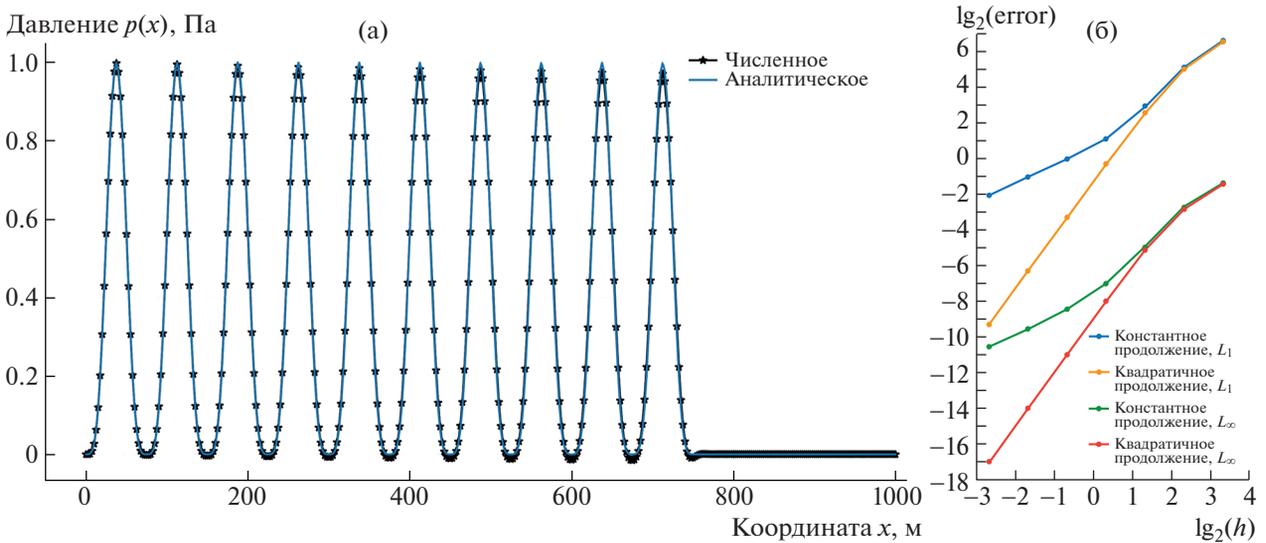


Рис. 2. (слева) аналитическое и численное решения задачи (10); (справа) зависимость ошибки по двум нормам от мелкости расчетной сетки.

Данная задача решалась вплоть до момента 0.5 с физического времени, за которое испускаемое возмущение еще не достигало правой границы расчетной области. Гладкое аналитическое решение данной задачи может быть записано в виде

$$p(x, 0.5) = \begin{cases} 0, & 750 < x \leq 1000, \\ \sin^4\left(\frac{\pi}{75}x - 10\pi\right), & 0 \leq x \leq 750. \end{cases} \quad (10)$$

На рис. 2 представлено полученное численное решение задачи (10), а также зависимость ошибок

**Таблица 1.** Результаты исследования сходимости “схемы с квадратичным продолжением”

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_{inf}$	Порядок по $L_1$	Порядок по $L_{inf}$
10	92.7889	0.3668	—	—
5	32.3485	0.1389	1.5203	1.4006
2.5	5.9299	0.0286	2.4476	2.2805
1.25	0.7940	0.0039	2.9007	2.8888
0.625	0.1001	0.0005	2.9881	2.9850
0.31250	0.0125	0.0001	2.9987	2.9976
0.15625	0.0016	0.0000	3.0001	2.9997

**Таблица 2.** Результаты исследования сходимости “схемы с константным продолжением”

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_{inf}$	Порядок по $L_1$	Порядок по $L_{inf}$
10	97.0202	0.3791	—	—
5	34.1853	0.1477	1.5049	1.3598
2.5	7.5925	0.0319	2.1707	2.2119
1.25	2.1471	0.0076	1.8222	2.0597
0.625	0.9755	0.0028	1.1382	1.4344
0.31250	0.4803	0.0013	1.0221	1.0946
0.15625	0.2396	0.0007	1.0036	1.0187

по нормам  $L_1$  и  $L_{inf}$ . Для сравнения представлены результаты, получаемые при использовании стандартной “схемы с константным продолжением”, снижающей общий порядок расчетного алгоритма до первого. В табл. 1–2 представлены значения полученной ошибки решения при расчете на серии измельчающихся расчетных сеток, а также эмпирически рассчитанный порядок сходимости по двум последовательным расчетам.

Анализ результатов проведенных расчетов подтверждает сохранение построенной расчетной схемой третьего порядка сходимости вплоть до границы расчетной области включительно.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен процесс построения сеточно-характеристических схем повышенного порядка аппроксимации для линейных гиперболических систем уравнений. На примере одномерной акустической системы представлен вычислительный алгоритм, основанный на сведении исходной дифференциальной задачи в частных производных к задаче поли-

номиальной интерполяции. Во внутренних точках расчетной области использование широкого шаблона позволило обеспечить третий порядок аппроксимации. Подробно рассмотрены практические вопросы, возникающие при расчете значений инвариантов Римана вблизи и на самой границе расчетной области. Предложен общий подход, основанный на однозначном задании значений вектора искомых функций в фиктивном узле, выходящем из области интегрирования. Данная процедура позволяет далее применить исходные расчетные формулы на широком шаблоне. Проведенная эмпирическая оценка порядка сходимости итогового расчетного алгоритма подтвердила сохранение третьего порядка сходимости вплоть до границы включительно.

Отметим, что преимуществом предложенного подхода является возможность его непосредственного обобщения на произвольные одномерные линейные гиперболические системы уравнений. Одной из них, представляющей практический интерес для расчета задач сейсмической разведки, является модель линейно упругой среды. При этом вопрос обобщения схемы на много-

мерный случай требует дополнительного исследования, хотя для внутренних точек расчетной области уже разработаны соответствующие подходы [23].

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках Госзадания ИАП РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krautkrämer J., Krautkramer H.* Ultrasonic Testing of Materials. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1990.
2. *Ba J., Du Q., Carcione J., Zhang H., Müller T.M.* Seismic Exploration of Hydrocarbons in Heterogeneous Reservoirs: New Theories, Methods and Applications. 2015.
3. *Мочо P., Kristek J., Kristekova M., Valovčan J., Galis M., Gregor D.* Material Interface in the Finite-Difference Modeling: A Fundamental View. Bulletin of the Seismological Society of America. 2022. Vol. 113. No. 1. P. 281–296.
4. *Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.-A., Ling O., Igel H., Bader M.* A stable discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics in 3D geometrically complex elastic solids using physics based numerical fluxes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. V. 389. P. 114386.
5. *Vogl C., Leveque R.* A High-Resolution Finite Volume Seismic Model to Generate Seafloor Deformation for Tsunami Modeling. Journal of Scientific Computing. 2017. Vol. 73. P. 1204–1215.
6. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 2018. — 287 с.
7. *Massau J.* (1899) Memoire sur l'integration graphique aux derives partielles. — F.: Meyer van Loo, 1899. — 190 p.
8. *Петров И.Б., Голубев В.И., Анкипович Ю.С., Фаворская А.В.* Численное моделирование акустических процессов в градиентных средах сеточно-характеристическим методом. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 51–56.
9. *Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V.* Grid-Characteristic Method on Overlapping Curvilinear Meshes for Modeling Elastic Waves Scattering on Geological Fractures. Minerals. 2022. Vol. 12. P. 1597.
10. *Петров И.Б., Голубев В.И., Петрухин В.Ю., Никитин И.С.* Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 59–64.
11. *Петров И.Б., Голубев В.И., Шевченко А.В.* О задаче акустической диагностики прискважинной зоны. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
12. *Голубев В.И., Никитин И.С., Бураго Н.Г., Голубева Ю.А.* Явно-неявные схемы расчета динамики упруго-вязкопластических сред с малым временем релаксации. Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1, С. 1–11.
13. *Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V.* The Implementation of Spectral Element Method in a CAE System for the Solution of Elasticity Problems on Hybrid Curvilinear Meshes. Model. Simul. Eng. 2017. Vol. 1. P. 1797561.
14. *Dovgilevich L., Sofronov I.* High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach. Applied Numerical Mathematics. 2015. Vol. 93. P. 176–194.
15. *Головизнин В.М., Соловьев А.В.* Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018, 198 с.
16. *Головизнин В.М., Соловьев А.В.* Диссипативные и дисперсионные свойства разностных схем для линейного уравнения переноса на меташаблоне 4×3, Матем. моделирование, 33:6 (2021), 45–58; Math. Models Comput. Simul., 14:1 (2022), 28–37.
17. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. Доклады Академии наук. 1968. Т. 180, № 6. С. 1303–1305.
18. *Nishikawa H., Van Leer B.* Towards High-Order Boundary Procedures for Finite-Volume and Finite-Difference Schemes. 2023. <https://doi.org/10.2514/6.2023-1605>
19. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. — М.: Наука, 1970.
20. *Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations. Comput. Math. and Math. Phys. 2006. Vol. 46. P. 1560–1588.
21. *Kholodov A. S.* The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. Vol. 20. No. 6. P. 234–253.
22. *Шевченко А.В., Голубев В.И.* Граничные и контактные условия повышенного порядка аппроксимации для сеточно-характеристических схем в задачах акустики. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 9. С. 1–15.
23. *Голубев В.И., Шевченко А.В., Петров И.Б.* Повышенные порядки точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления. Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14. № 4. С. 899–910.

## ABOUT THE BOUNDARY CONDITION APPROXIMATION IN THE HIGHER-ORDER GRID-CHARACTERISTIC SCHEMES

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov<sup>a</sup>, V. I. Golubev<sup>a,b</sup>, A. V. Shevchenko<sup>a,b</sup>, and I. S. Nikitin<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),  
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>b</sup>*Institute of Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russian Federation*

In this paper, we consider the problem of constructing a numerical solution to the system of equations of an acoustic medium in a fixed domain with a boundary. Physically, it corresponds to the process of the seismic wave propagation in geological media during the procedure of the seismic exploration of hydrocarbon deposits. The system of partial differential equations under consideration is hyperbolic. To construct its numerical solution, a grid-characteristic method is used on an extended spatial stencil. This approach makes it possible to construct a higher-order approximation scheme at the internal points of the computational domain. However, it requires a careful construction of the numerical solution near the boundaries. In this paper, the approach that preserves the increased approximation order up to the boundary is proposed. The verification numerical simulations were carried out.

*Keywords:* acoustic waves, computer simulation, grid-characteristic method, boundary conditions, approximation order