ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 12–19

МАТЕМАТИКА

УДК 531.01

ДИНАМИКА СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

© 2023 г. Т. В. Сальникова[1,*], Е. И. Кугушев[1,], А. А. Демидов[1,***]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 22.03.2023 г.
После доработки 21.09.2023 г.
Принято к публикации 13.10.2023 г.

Рассматривается динамическая система с ограничениями в виде линейных дифференциальных неравенств. Доказано, что в общем случае при наличии таких связей движение является безударным. Показана возможность реализации таких связей силами вязкого трения. Приведен пример неголономной системы, для которой с помощью численного моделирования показано, как с увеличением степени анизотропии происходит переход от системы с анизотропным вязким трением к системе с односторонними дифференциальными связями.

Ключевые слова: неголономные системы, односторонние дифференциальные связи, анизотропное вязкое трение

DOI: 10.31857/S2686954323600167, **EDN:** ZCARVS

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы динамики механических систем, на движение которых наложены ограничения в виде дифференциальных неравенств. Связи такого вида называются односторонними, или неголономными дифференциальными связями. Они упоминаются в работах [1, 2], однако конкретный интерес к ним проявился лишь в начале текущего века [3, 4]. В указанных работах предлагался вывод уравнений движения таких систем, основанный на локальных или интегральных вариационных принципах [5, 6], и приводился пример такой системы – односторонний конек Чаплыгина. В [3] показывается безударность односторонних дифференциальных связей в однородном случае. В [4] ставится вопрос о реализации таких связей силами анизотропного вязкого трения, и дается пример такой реализации для конька Чаплыгина.

В данной работе показывается безударность односторонних дифференциальных связей в общем случае. Показывается возможность реализации таких связей силами анизотропного вязкого трения. Для некоторых систем методами компьютерного моделирования показывается, как с ростом анизотропности происходит предельный переход от систем с анизотропным вязким трением к системе с односторонми дифференциальными связями.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И БЕЗУДАРНОСТЬ

Классический подход к теории односторонних связей состоит в распространении понятия пространства виртуальных перемещений на односторонние связи. В этом случае к виртуальным перемещениям относятся перемещения, направленные не только по касательной к границе связей, но и внутрь области допустимой для движения. Такой подход предлагается в работах [1, 2]. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек с радиус-векторами $\vec{r}_1,\dots\vec{r}_N$. Объединим их радиус-векторы $\vec{r}_i$, $i = 1,\dots,N$ в один вектор $x = (\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) \in R^{3N}$.

Пусть на систему наложены k двухсторонних дифференциальных связей $A(x,t)\dot{x} + b(x,t) = 0$, где A – матрица размером $3N \times k$, $b \in R^k$ – вектор. Пусть также на систему наложено s односторонних дифференциальных связей

$$W(x,t)\dot{x} + h(x,t) \le 0, \tag{1}$$

где W – матрица размером $3N \times s$, $h \in R^s$ – вектор. Здесь и далее для вектора $u = (u_1,\dots,u_n) \in R^n$

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
*E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com
**E-mail: kugushevei@yandex.ru
***E-mail: ademich8@gmail.com

выражение $u \le 0$ означает, что неотрицательны все его координаты $u_i \le 0$, $i = 1,\ldots,n$.

Если все неравенства (1) строгие, то мы находимся внутри области, допускаемой односторонними связями. В этом случае односторонние связи не влияют на движение системы. Если в момент времени t в точке фазового пространства $(x,\dot{x})$ хотя бы одно из неравенств (1) становится равенством, то будем говорить, что система вышла на границу односторонних связей. В этом случае на движение системы влияют только те неравенства, которые стали равенствами. Отметим особо, что в дальнейшем, при использовании неравенств (1) в граничных точках, будет подразумеваться, что в данную систему неравенств входят только неравенства, обращающиеся в равенство.

Введем пространство виртуальных перемещений как множество векторов $\delta x = (\delta\vec{r}_1,\ldots,\delta\vec{r}_N)$ из R^{3N}. Для заданного положения точек системы x и заданного момента времени t вектор $\delta x \in R^{3n}$ называется виртуальным перемещением, если для него выполняются равенства $A(x,t)\delta x = 0$, а также, но только для граничных точек, выполняются неравенства $W(x,t)\delta x \le 0$. Эти неравенства означают, что виртуальные скорости сдвига вдоль виртуального перемещения направлены внутрь области, допускаемой для движения односторонними связями, или же по касательной к границе связей.

Касательными перемещениями будем называть виртуальные перемещения, для которых выполняются строгие равенства $W(x,t)\delta x = 0$. Касательные перемещения образуют гиперплоскость в R^{3N}, которую мы будем называть плоскостью удара.

Мы считаем, что при выходе на границу односторонних дифференциальных связей возникают ударные реакции, импульсы которых будем обозначать $R^{(p)} = (R_1^{(p)},\ldots,R_N^{(p)})$. Связи будем называть идеальными, если ударные импульсы направлены внутрь области, допускаемой для движения односторонними связями. Это значит, что для любых виртуальных перемещений выполняется неравенство

$$(R^{(p)},\delta x) \ge 0. \qquad (2)$$

Заметим, что если δx касательное перемещение, то $-\delta x$ тоже касательное перемещение. Поэтому для касательных перемещений в случае идеальных связей выполнено равенство $(R^{(p)},\delta x) = 0$.

Сформулируем теперь принцип виртуальных перемещений Даламбера–Лагранжа. Пусть в момент t система выходит на границу односторонних дифференциальных связей. Применяя принцип освобождения от связей, освободим систему от связей, заменив их реакциями связей. В соответствии с классической теорией удара постулируем, что существуют пределы справа и слева скоростей точек системы $V^- = \dot{x}(t-0)$, $V^+ = \dot{x}(t+0)$. Тогда

$$A(x,t)V^+ + b(x,t) = 0, \quad W(x,t)V^+ + h(x,t) \le 0$$

$$A(x,t)V^- + b(x,t) = 0, \quad W(x,t)V^- + h(x,t) = 0.$$

В соответствии с теоремой об изменении импульса системы в момент выхода на границу односторонних связей, изменение импульсов точек системы равно ударным импульсам реакций связей:

$$MV^+ = MV^- + R^{(p)}.$$

Здесь M – матрица масс системы.

Введя обозначение $\Delta V = V^+ - V^-$, получаем $R^{(p)} = M\Delta V$. Тогда условие идеальности (2) можно записать следующим образом

$$(M\Delta V,\delta x) \ge 0 \qquad (3)$$

Выполнение этого соотношения для любых виртуальных перемещений

$$A\delta x = 0, \quad W\delta x \le 0 \qquad (4)$$

будем называть принципом виртуальных перемещений в нашем случае. Для касательных перемещений выполнено

$$(M\Delta V,\delta x) = 0, \quad \forall \delta x : A\delta x = 0, \quad W\delta x = 0. \qquad (5)$$

В соответствии с правилом множителей Лагранжа получаем отсюда, что найдутся векторы $\lambda^{(p)} \in R^k$, $\mu^{(p)} \in R^s$ такие, что

$$M\Delta V = A^T\lambda^{(p)} + W^T\mu^{(p)}. \qquad (6)$$

Здесь выражение B^T означает транспонирование матрицы B.

Для V^+, V^- и ΔV имеем

$$AV^+ + b = 0, \quad AV^- + b = 0,$$

$$WV^+ + h \le 0, \quad WV^- + h = 0.$$

Значит

$$A\Delta V = 0, \quad W\Delta V \le 0. \qquad (7)$$

Для краткости введем несколько обозначений. Пусть Φ – матрица размером $3N \times (k+s)$, составленная из строк матриц A и W, так, что сверху расположены строки матрицы A, а под ними – строки матрицы W. Также введем вектор $\nu^{(p)}$, составленный из последовательно расположенных компонент векторов $\lambda^{(p)}$ и $\mu^{(p)}$

$$\Psi = \begin{pmatrix} A \\ W \end{pmatrix} \quad \nu^{(p)} = (\lambda_1^{(p)},\ldots,\lambda_k^{(p)},\mu_1^{(p)},\ldots,\mu_s^{(p)}).$$

Тогда $M\Delta V = A^T\lambda^{(p)} + W^T\mu^{(p)}$ и $A\Delta V = 0, W\Delta V = 0$ запишутся следующим образом

$$M\Delta V = \Phi^T\nu^{(p)}, \quad \Phi\Delta V \le 0.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для $\nu^{(p)}$

$$\Phi M^{-1}\Phi^T\nu^{(p)} \le 0. \tag{8}$$

Связи, наложенные на систему будем называть независимыми, если ранг матрицы Φ максимален, т.е. равен $k + s$. Матрица масс M симметрическая, положительно определенная. Если связи независимы, то матрица $\Phi M^{-1}\Phi^T\nu^{(p)}$ также симметрическая и положительно определенная, т.е., в частности, невырожденная. В этом случае из $\Phi M^{-1}\Phi^T\nu^{(p)} \le 0$ следует, что $\nu^{(p)} = 0$ и, значит, $\Delta V = 0$. Это означает, что в системе с односторонними дифференциальными связями удары отсутствуют.

При выводе мы пользовались постулатом, что при нахождении на границе односторонних связей скорости точек имеют пределы слева и справа по времени. Обоснование этого предположения будет дано в следующих разделах.

При выходе на границу односторонних связей помимо ударных реакций с импульсами R_i^p на точки системы будут действовать обычные реакции связей, и уравнения движения в форме уравнений Лагранжа первого рода будут выглядеть следующим образом

$$M\ddot{x} = F + A^T\lambda + W^T\mu.$$

Множители Лагранжа μ отличны от нуля только тогда, когда система находится на границе односторонних дифференциальных связей.

При лагранжевом рассмотрении движения системы интегрируемая часть двухсторонних связей заменяется геометрическими ограничениями на положения точек системы. При локальном рассмотрении на конфигурационном пространстве вводятся обобщенные координаты $q = (q_1,\ldots,q_n)$. Двухсторонние связи задаются системой k равенств $A(q,t)\dot{q} + b(q,t) = 0$, где A – матрица размером $3N \times k$, $b \in R^k$ – вектор. Односторонние дифференциальные связи задаются системой s неравенств $W(q,t)\dot{q} + h(q,t) \le 0$, где W – матрица размером $3N \times s$, $h \in R^s$ – вектор.

Будем считать, что система натуральная

$$L = T - V = \frac{M(q,t)\dot{q},\dot{q}}{2} - V(q).$$

Тогда уравнения Лагранжа второго рода выглядят следующим образом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A^T\lambda + W^T\mu. \tag{9}$$

Множители Лагранжа μ не положительны, и отличны от нуля только тогда, когда система находится на границе односторонних дифференциальных связей:

$$\mu(t) \le 0, \quad (W\dot{q} + h)\mu \equiv 0.$$

Пусть связи однородны, т.е. $b = 0, h = 0$. Доможив уравнения Лагранжа на $\dot{q}$, получим

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \dot{q}\right) = 0.$$

Значит, если функция Лагранжа не зависит от времени, то выполняется обобщенный закон сохранения энергии (существует интеграл Якоби)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = \text{const}.$$

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОСТОРОННИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ АНИЗОТРОПНЫМ ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрим натуральную механическую систему с лагранжианом

$$L(q,\dot{q}) = T - V = \frac{(M(q)\dot{q},\dot{q})}{2} - V(q).$$

Считаем, что на движение системы наложены только односторонние дифференциальные связи $W(q)\dot{q} + h(q) \le 0$.

Пусть $a > 0$, и $q^*(t)$ – движение системы с начальными условиями $(q^*(0),\dot{q}^*(0))$ на отрезке $0 \le t \le a$. Тогда оно удовлетворяет уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = W^T\mu,$$

где $\mu(t) \le 0$ некая функция времени, зависящая от движения, и принимающая ненулевые значения только в те моменты времени, в которые $W(q)\dot{q} + h(q) = 0$.

Обозначим через u_i строку i матрицы W, $i = 1,\ldots,s$. Компоненты вектора h обозначим через h_i, т.е. $h = (h_1,\ldots,h_s)$

Введем функцию $\xi(x), x \in R$:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Пусть ρ принимает натуральные значения $\rho = 1, 2, 3, \ldots$. Отбросим односторонние дифференциальные связи $W\dot{q} + h \le 0$ и добавим в систему обобщенные силы линейного вязкого трения

$$Q_\rho = -\rho \sum_{j=1}^{s} \xi(u_j \dot{q} + h_j)(u_j, \dot{q}) \times u_j.$$

Пусть $\dot{q}^*(0) \ne 0$, и $q_\rho(t)$ – движение системы с начальными условиями $(q^*(0), \dot{q}^*(0))$ на отрезке $0 \le t \le a$. Для движения системы выполняются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_\rho. \tag{10}$$

Мы покажем, что для достаточно малого $a > 0$, при $\rho \to +\infty$ решения $q_\rho(t)$ и скорости $\dot{q}_\rho(t)$ равномерно по t сходятся к решению $q_\infty(t)$ и скорости $\dot{q}_\infty(t)$.

В фазовом пространстве системы введем координаты $z = (z_1, \ldots, z_{2n})$ так, что $z_i = q_i$, $z_{i+n} = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В этих координатах уравнения движения можно записать следующим образом

$$\dot{z} = F(z) = F^*(z) + F_\rho(z), \tag{11}$$

где $F_\rho(z)$ – слагаемое, отвечающее обобщенным силам вязкого трения, а F^* – остаток.

Односторонние дифференциальные связи задаются неравенствами

$$\varphi_i(z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

где $\varphi_i(z)$ – некие функции. Обозначим через Σ_0 множество точек фазового пространства, допускаемых связями

$$\Sigma_0 = \{\varphi_1(z) \le 0\} \cap \ldots \cap \{\varphi_s(z) \le 0\}.$$

Граница Γ_0 этих связей определяется как часть объединения гиперповерхностей

$$\Gamma_0 = \{\varphi_1(z) = 0\} \cup \ldots \cup \{\varphi_s(z) = 0\} \cap \Sigma_0.$$

Мы предполагаем, что связи не вырождены, т.е. что матрица связей W имеет максимальный ранг, равный s. В этом случае, вблизи границы Γ_0 векторное поле $F_\rho(z)$ трансверсально соответствующим гиперповерхностям и направлено внутрь области $\Sigma_{<0}$

$$\Sigma_{<0} = \{\varphi_1(z) < 0\} \cup \ldots \cup \{\varphi_s(z) < 0\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ введем множество $\Sigma_{<\varepsilon}$

$$\Sigma_{<\varepsilon} = \{\varphi_1(z) < \varepsilon\} \cup \ldots \cup \{\varphi_s(z) < \varepsilon\}.$$

По построению составляющая F_ρ для точек из $\Sigma_{<\varepsilon}$ направлена внутрь этой области. С увеличением ρ составляющая F_ρ растет как $O(\rho)$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$, такое, что при всех $\rho > N$ вектор F направлен внутрь области $\Sigma_{<\varepsilon}$. Следовательно, решение системы, начавшееся в области $\Sigma_{<\varepsilon}$, останется в ней во все время. При этом

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1}), \quad \text{или, что то же самое,}$$
$$\varepsilon(N) = O(N^{-1}).$$

Из этого выткает, что величины $\|F_\rho(z_\rho(t))\|$ ограничены равномерно по t и ρ.

Рассмотрим функции $z_\rho(t)$ как элементы пространства Соболева $W_1^2(0, a)$. Используя теорему вложения, получаем, что z_ρ сходится равномерно к некоторой функции $\tilde{z}(t)$, при этом производная $\dot{\tilde{z}}(t)$ также сходится, но слабо. Отсюда получаем требуемое утверждение.

Однако можно и не использовать пространства Соболева, а применить критерий Арцела к семейству равностепенно непрерывных функций. Строгое доказательство, для краткости, приведем в простом частном случае. Пусть есть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f^*(x) = (f_1, \ldots, f_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n.$$

Пусть нас интересует ограничение $x_1 \le 0$.

Для натурального ρ рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x), \quad \dot{x}_1 = f_1^*(x) - \xi(x_1)\rho x_1, \\ \dot{x}_i = f_i^*(x), \quad i \ne 1. \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $x_\rho(t)$ – решение системы, при $0 \le t \le a$, и начальное условие $x_\rho(0)$ таково, что $x_{\rho 1}(0) \le 0$.

Надо показать, что решения $x_\rho(t)$ при $\rho \to \infty$ равномерно сходятся к некоторой функции $x^*(t)$, такой, что $x_1^*(t) \le 0$ при всех t, и которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = F^*(x) + \mu(t)e, \tag{13}$$

где $e = (1, 0, \ldots, 0)$, и $\mu(t) \le 0$ некоторая функция, отличная от нуля только в те моменты времени, для которых $x_1^* = 0$.

Предположим, что $\|f(x)\| \le b$. Тогда при $\rho x_1 > b$ будет $f_1^*(x) - \xi(x_1)\rho x_1 < 0$. Значит решение, начавшееся в области $x_1 \le 0$, не сможет попасть в область $x_1 > \dfrac{b}{\rho}$.

Возьмем натуральное N достаточно большим, и введем множество K_N решений $x_\rho(t)$ для всех натуральных $\rho \ge N$. Введем обозначение $\Omega = (0, a)$ и будем рассматривать решения $x_\rho(t)$ как элементы пространства Соболева $K_N \subset K \subset W_2^1(\Omega)$. По построению множество K_N ограничено в $W_2^1(\Omega)$. Поскольку $W_2^1(\Omega)$ рефлексивно, и K_N ограниченное множество, то K_N слабо компактно [7]. По-

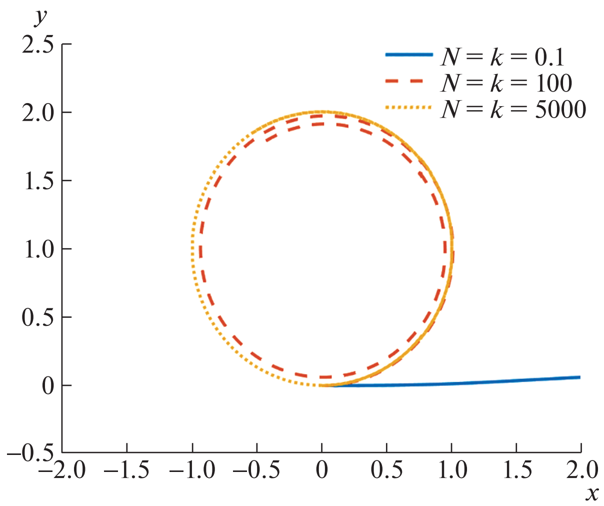

Рис. 1. Одинаковые значения коэффициентов трения с разных сторон.

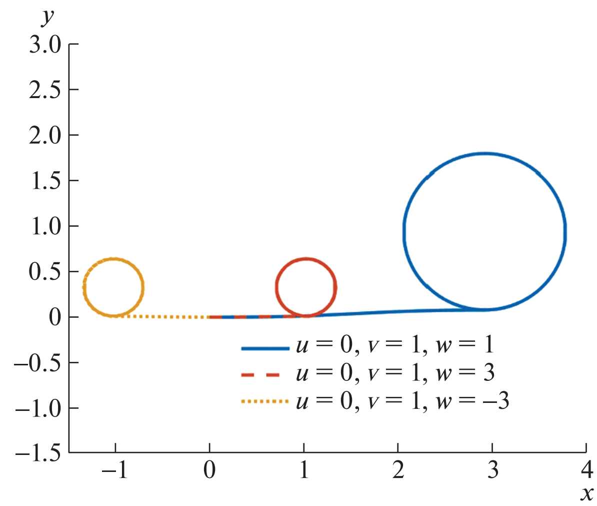

Рис. 2. Изменение начальных проекций скоростей u, v и начальной угловой скорости w.

этому из $\{x_\rho\}$ можно выделить последовательность слабо сходящуюся к некоторой функции $x_* \in \overline{K}_N$. Будем нумеровать эту подпоследовательность теми же индексами: $x_k \to x_*$ слабо в $W_2^1(\Omega)$.

По теореме вложения пространств Соболева пространство $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C^0(\overline{\Omega})$. Поэтому ограниченное множество K_N в $W_2^1(\Omega)$ отображается в предкомпактное ограниченное множество в $C^0(\overline{\Omega})$. Следовательно, из последовательности $\{x_\rho\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $x_* \in \overline{K}_N$ в смысле $C^0(\overline{\Omega})$, т.е. получаем последовательность, равномерно сходящуюся на $[0,\ a]$. Оставим прежние обозначения для этой подпоследовательности. Таким образом

$$\max_{0 \le t \le a} \|x_\rho - x_*\| \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Кроме того $\dot{x}_\rho \to \dot{x}_*$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Как уже говорилось, можно и не использовать пространства Соболева, а применить критерий Арцела к семейству равностепенно непрерывных функций. Поскольку функции $\dot{x}_\rho$ равномерно по t ограничены, то в соответствии с критерием Арцела из последовательности функций x_ρ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. При этом можно далее выбрать подпоследовательность у которой также и производные $\dot{x}_\rho$ будут сходиться, но слабо [7]. Для выбранной подпоследовательности будет выполняться уравнение

$$\dot{x}_\rho = f(x_\rho), \quad \dot{x}_{1\rho} = f_1^*(x_\rho) - \xi(x_{1\rho})\rho x_{1\rho}, \qquad (14)$$
$$\dot{x}_{i\rho} = f_i^*(x_\rho), \quad i \ne 1.$$

В этом уравнении $f^*(x_\rho)$ сходится равномерно, а $\dot{x}_\rho$ – сходится слабо. Значит, и $\xi(x_1)\rho x_{1\rho}$ сходится слабо, и будет выполнено уравнение $\dot{x} = F^*(x) + \mu(t)e$.

4. ОДНОСТОРОННИЙ КОНЕК ЧАПЛЫГИНА

Пусть по горизонтальной плоскости Oxy скользит без трения однородный диск, положение которого определяется обобщенными координатами (x, y, φ), где (x, y) – координаты центра масс диска, φ – угол поворота фиксированного диаметра диска относительно оси Ox. На движение диска наложена связь

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi \le 0.$$

Лагранжиан системы равен

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + J\dot{\varphi}^2\right).$$

Здесь m – масса диска, J – момент инерции диска относительно вертикальной оси, проходящей через его центр.

Уравнения движения (9) имеют вид

$$m\ddot{x} = \mu\sin\varphi, \quad m\ddot{y} = -\mu\cos\varphi, \quad \ddot{\varphi} = 0,$$

где $\mu(t)$ – некоторая неположительная функция, отличная от нуля, только в моменты времени, в которые $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$.

Пусть в начальный момент выполняется строгое неравенство $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi < 0$. Тогда на начальном отрезке диск будет скользить свободно, враща-

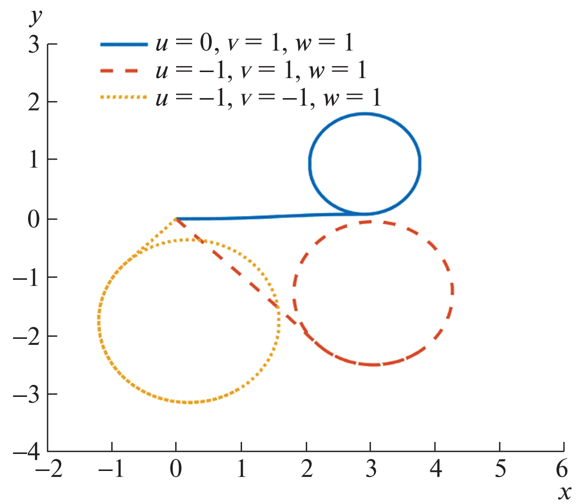

Рис. 3. Изменение начальных проекций скоростей u, v и начальной угловой скорости w.

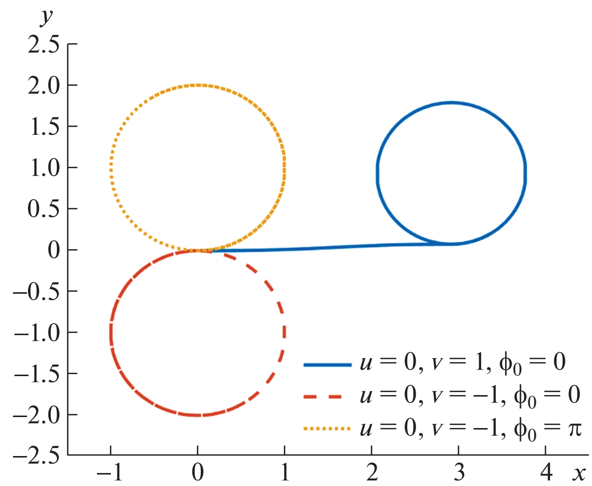

Рис. 4. Изменение начального угла наклона лезвия конька относительно оси x.

ясь с постоянной угловой скоростью. Центр масс будет двигаться по прямой с постоянной скоростью. В какой-то момент система выйдет на ограничения и будет выполнено $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. Тогда конек находится в положении, направленном по скорости движения центра. Затем движение по касательной перейдет к обычной круговой траектории диска с двухсторонним коньком.

Конек не сойдет с окружности. В самом деле, условие того, что система не сойдет с границы, является то, что реакция связи направлена строго внутрь области, запрещенной неравенством связи. В данном случае реакция связи, приложенная к центру диска, будет все время отлична от нуля и направлена к центру круговой траектории центра масс диска, т.е. в строну области, допустимой связью.

Из уравнений движения для угла поворота диска имеем

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad \text{где} \quad \omega = \dot{\varphi}(0), \quad \varphi_0 = \varphi(0).$$

Из интеграла энергии следует, что центр диска движется со скоростью

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = \text{const}.$$

Из условия $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$ получаем

$$\dot{x} = V\cos\varphi = V\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$\dot{y} = V\sin\varphi = V\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Интегрируя эти уравнения, находим, что квадрат радиуса ρ^2 окружности, по которой движется центр диска, равен

$$\rho^2 = \frac{V^2}{\omega^2} = \frac{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}{\dot{\varphi}^2(0)}.$$

В качестве приложения рассмотрим реализацию односторонней дифференциальной связи анизотропным вязким трением с помощью численного моделирования. Представим движение по горизонтальной плоскости однородного диска, к центру которого приложена сила линейного вязкого трения, ортогональная скорости движения центра u. Значение коэффициента трения меняется в зависимости от направления проекции скорости конька u следующим образом:

$$F^{Tp} = -Nu, \quad u \geq 0, \quad F^{Tp} = -ku, \quad u < 0.$$

Получим качественное поведение конька в зависимости от различных значений коэффициентов трения k и N.

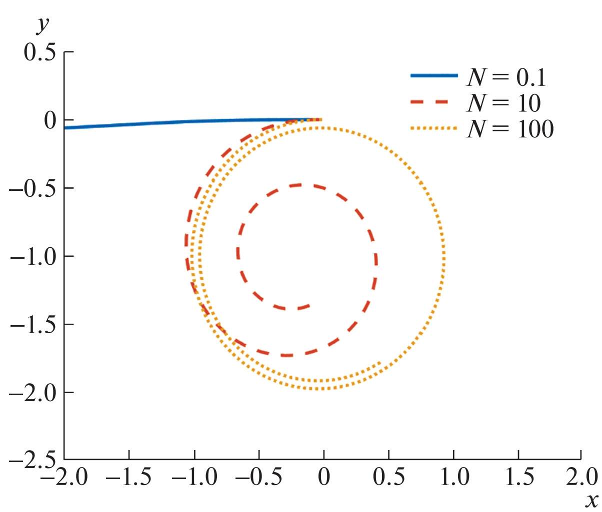

Рис. 5. Изменение параметра N.

Таблица 1. Погрешность траектории при $k = 0.1$; $k = 0$; $k = 100$ (Δp – отклонение центра предельной окружности от идеальной, ΔR – отклонение радиуса)

	$k = 0.1$	$k = 0.1$	$k = 0$	$k = 0$	$k = 100$	$k = 100$
N	Δp	ΔR	Δp	ΔR	Δp	ΔR
0.1	3.53	–2.75	3.3	–2.55	3.53	–2.75
1	1.35	–0.62	1.34	–0.60	1.35	–0.62
10	0.36	0.23	0.37	0.23	0.36	0.23
100	0.19	0.04	0.19	0.04	0.19	0.04
5000	0.18	0.0009	0.18	0.0009	0.18	0.0009

Для начала установим одинаковые значения коэффициентов трения с обеих сторон, чтобы сравнить с результатами, известными для уже изученной системы. Начальные условия: $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $\omega(0) = 1$, $x(0) = y(0) = 0$, $t \in [0,10]$.

Все траектории совпали: на графике мы видим, что при маленьких значениях трения конек не успевает выйти на окружность, но по мере увеличения коэффициента трения конек начинает закручиваться в спираль, которая в пределе стремится к окружности.

Рассмотрим теперь случай, когда с одной стороны трение очень большое $N = 5000$, а с другой стороны очень маленькое $k = 0.1$, и проварьируем начальные значения скоростей.

На полученном графике видно, что наша система ведет себя как односторонний конек: сперва тело движется по прямой и затем выходит на окружность, причем радиус этой окружности совпадает с теоретическим. При различии начальной угловой скорости в 3 раза, радиусы соответствующих траекторий отличаются во столько же раз (пунктирная и точечная траектории).

Варьируя знаки начальных проекций скоростей, можно увидеть, как отклоняется траектория конька и сокращается расстояние, которое конек проходит по прямой (точечная и сплошная траектории).

Изменение начального угла наклона лезвия конька относительно оси x также влияет на расположение окружности. Так, на точечной и сплошной траекториях видно зеркальное отклонение траектории при изменении угла на π радиан.

Зафиксируем теперь значение одного из коэффициентов трения: $k = 0.1$. И посмотрим, как ведет себя конек при варьировании значения N.

В данном случае был рассмотрен эксперимент со следующими начальными условиями: $u(0) = 0$, $v(0) = -1$, $\omega(0) = 1$, $x(0) = y(0) = 0$, $k = 0.1$, $t \in [0,10]$. Как видно из графика, при низких значениях коэффициента N (сплошная и пунктирная траектории) конек не может перейти на траекторию окружности.

Начиная со значения $N = 10$ конек начинает закручиваться с самого начала и траектория становится спиралевидной, стремясь к центру идеальной окружности. При дальнейшем увеличении N траектория, как и ожидалось, стремится к окружности.

В таблице, представленной ниже, указаны погрешности траекторий конька от идеального случая, когда на конек наложена связь. Δp – смещение центра траектории от центра идеальной окружности. Координаты центра в экспериментах считались как среднее значение координат, полученных на каждом шаге интегрирования. ΔR – отклонение от идеального значения – среднего значения радиуса траектории, которое высчитывалось как усредненное значение расстояний от центра траектории до каждой из точек.

Чтобы сравнить значения погрешностей, в зависимости от других был проведен тот же эксперимент со значением $k = 0$ и $k = 100$ при тех же начальных условиях. Получившиеся значения представлены в табл. 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель односторонних дифференциальных связей. Корректность построенной модели обоснована реализацией при помощи анизотропного трения. Показано, что выход на границу таких связей происходит безударно, что согласуется с [4]. В рамках построенной модели проведен численный анализ движения одностороннего конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости. Подтверждена корректность предлагаемой модели анизотропнопных неголономных связей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. т. 2. М., Физматгиз, 1960. 487 с.

2. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М., Л., Гостехиздат, 1952. С. 812.
3. *Березинская С.Н., Кугушев Е.И., Сорокина О.В.* О движении механических систем с односторонними связями. Вестник московского университета, сер. 1, математика, механика. 2005. Т. 3. С. 18–24.
4. *Kozlov V.V.* On the dynamics of systems with one-sided non-integrable constraints, Theor. Appl. Mech. 2019. Т. 46. Вып. 1. С. 1–14.
5. *Kozlov V.V.* Integral Analogue of the Gauss Principle University of Nis, The scientific journal Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2000. V. 2. № 10. P. 1055–1060.
6. *Kozlov V.V.* Gauss Principle and Realization of Constraints, Regul. Chaotic Dyn. 2008. V. 13. № 5. P. 431–434.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., Мир, 1967. С. 624.

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH ONE-SIDED DIFFERENTIAL CONSTRAINTS

T. V. Salnikova[a], E. I. Kugushev[a], and A. A. Demidov[a]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A dynamical system with constraints in the form of linear differential inequalities is considered. It is proved that in the general case, in the presence of such connections, the motion is shockless. The possibility of realizing such bonds by viscous friction forces is shown. An example of a nonholonomic system is given, for which, using numerical simulation, it is shown how, with an increase in the degree of anisotropy, the transition from a system with anisotropic viscous friction to a system with one-sided differential constraints occurs.

Keywords: nonholonomic systems, one-sided differential constraints, anisotropic viscous friction