ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 74–78

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СВЯЗНОСТЬ ЛОКУСОВ ПРИМА В РОДЕ 5

М. Ненашева[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым
Поступило 27.03.2023 г.
После доработки 18.07.2023 г.
Принято к публикации 05.10.2023 г.

Пространство модулей голоморфных дифференциалов на кривых рода g допускает естественное действие группы $GL_2(\mathbb{R})$. Изучение орбит этого действия и их замыканий привлекло интерес широкого круга исследователей в последние несколько десятилетий. В 2000-х годах К.~МакМаллен описал бесконечное семейство орбифолдов, являющихся замыканиями таких орбит в пространстве голоморфных дифференциалов на кривых рода 2. В пространствах голоморфных дифференциалов на кривых старших родов известными примерами орбифолдов, представляющих собой объединения замыканий орбит действия группы $GL_2(\mathbb{R})$ являются *локусы Прима*. Они непусты для поверхностей рода не выше 5. В настоящей работе приведены первые нетривиальные вычисления числа компонент связности в локусах Прима для поверхностей старшего возможного рода.

Ключевые слова: плоские поверхности, пространства модулей, голоморфные дифференциалы

DOI: 10.31857/S2686954323600155, **EDN:** DAKSRS

Локусы Прима. Для компактной римановой поверхности X с голоморфной инволюцией $\rho: X \to X$ обозначим через $\Omega(X)^-$ пространство голоморфных 1-форм на X, нечетных относительно ρ, через $(\Omega(X)^-)^*$ $\mathbb{C}$-двойственное к нему пространство, через $H_1(X,\mathbb{Z})^-$ группу ρ-нечетных $\mathbb{Z}$-циклов в X. Абелево многообразие $Prym(X,\rho) = (\Omega(X)^-)^*/H_1(X,\mathbb{Z})^-$ называется *многообразием Прима*. Кольцо его эндоморфизмов $End(Prym(X,\rho))$ состоит из линейных отображений $(\Omega(X)^-)^* \to (\Omega(X)^-)^*$, переводящих решетку $H_1(X,\mathbb{Z})^-$ в себя. Эндоморфизм $T \in End(Prym(X,\rho))$называется *самосопряженным*, если $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ относительно стандартного симплектического спаривания на $x, y \in H_1(X,\mathbb{Z})^-$. Если $\dim_{\mathbb{C}} \Omega(X)^- = 2$, то 1-формы $\omega \in \Omega(X)^-$ называются *дифференциалами Прима*.

Для натурального $D \equiv 0$, $1 \bmod 4$ кольцо $\mathbb{O}_D \simeq \mathbb{Z}[T]/(T^2 + bT + c)$, $D = b^2 - 4c$ (для целых b, c), называется *квадратичным порядком* с дискриминантом D. Многообразие Прима $Prym(X,\rho)$ *допускает вещественное умножение* на $\mathbb{O}_D$, если в кольце его эндоморфизмов есть собственное подкольцо $R \subset End(Prym(X,\rho))$, изоморфное $\mathbb{O}_D$ и порожденное самосопряженным эндоморфизмом. (Здесь “собственное” означает, что если $nU \in R$ для некоторого ненулевого $U \in End(Prym(X,\rho))$ и натурального n, то $U \in R$). Кольцо R действует также на $\Omega(X)^-$. Дифференциал Прима ω для пары (X,ρ) называется *собственным дифференциалом Прима*, если $0 \neq R\omega \subset \mathbb{C}\omega$; в этом случае $R\omega \subset \mathbb{Q}[\sqrt{D}]\omega$.

Множество всех собственных дифференциалов для фиксированного D называется *локусом Прима*. Локусы Прима представляют собой орбифолды в пространствах модулей H_g голоморфных дифференциалов на кривых рода g, $g \le 5$ [10]. Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что для $g > 5$ таких 1-форм нет.

Каждое пространство H_g стратифицировано; страт $H(\kappa)$ этой стратификации задается разбиением $\kappa = (k_1,\ldots,k_s)$ числа $2g-2$ и состоит из 1-форм, имеющих нули кратностей $k_1,\ldots,k_s$. Будем обозначать через $\Omega E_D(\kappa)$ пересечение локуса Прима со стратом $H(\kappa)$. Каждый локус $\Omega E_D(\kappa) \subset H(\kappa)$ является несвязным объединением конечного числа орбифолдов. Количество компонент связности в $\Omega E_D(\kappa)$ является важнейшей характеристикой геометрии стратов. Его подсчет для некоторых

[1]*Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский институт “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: marina.nenasheva@skoltech.ru*

разбиений κ при $g = 2$, 3, 4 выполнен в [4–6, 9]. В роде $g = 5$ такие вычисления отсутствуют. Нашим основным результатом является следующее утверждение, полностью описывающее количество компонент связности в локусах Прима рода 5 для разбиения $\kappa = (4,4)$, т.е. для страта 1-форм с двумя нулями 4-го порядка в H_5. Локусы $\Omega E(4,4)$ имеют комплексную размерность 3 ~ g3.

Теорема 1. *Локусы Прима $\Omega E_D(4,4)$ не пусты и имеют одну компоненту связности для всех $D \geq 4$.*

Методы, использованные для получения этого результата, используют геометрию взаимного расположения нулей голоморфного дифференциала на поверхностях, принадлежащих локусам Прима. В случае, когда есть только один, ноль они не применимы. Однако для рода 5 известно, что локусы Прима в соответствующем страте пусты. В случае страт старшей размерности использовать данный подход оказывается сложнее, хотя мы надеемся получить результаты и для стратов с большим числом нулей.

Для пары (X, ρ) и собственного дифференциала Прима ω положим $Y = X/\rho$. На Y существует мероморфный квадратичный дифференциал q с полюсами кратности не выше 1, такой, что $\pi^* q = \omega^{\otimes 2}$. Полюса квадратичного дифференциала q лежат в образах неподвижных точек инволюции ρ [1]. Поскольку $\dim \Omega(X)^- = 2$, имеем $g(X) - g(Y) = 2$, т.е. $g(Y) = 3$. Поэтому разность количества нулей и количества полюсов квадратичного дифференциала q равна $4(g(X) - 2) - 4 = 4g(X) - 12 = 8$. Нули квадратичного дифференциала q могут быть либо на один меньшей кратности, чем у ω, либо удвоенной кратности, если у ω есть пара нулей равной кратности, переставляемых инволюцией ρ.

Периодические направления. Всякий ненулевой голоморфный дифференциал на римановой поверхности определяет на ней плоскую метрику с коническими особенностями в нулях дифференциала. Поэтому точки (X, ω) пространств H_g называют *плоскими поверхностями*. Отрезки геодезической в этой метрике с началом и концом в особых точках называются *седловыми связками*. Поверхность (X, ω) называется *вполне периодической вдоль данного направления* θ, если каждая идущая в этом направлении геодезическая либо замкнута, либо представляет собой объединение седловых связок; в этом случае направление θ называется *вполне периодическим*. Длина седловой связки в плоской метрике называется *относительным периодом*, а длина замкнутой геодезической *абсолютным периодом*.

Изопериодические деформации. Изопериодической деформацией плоской поверхности $(X, \omega) = (X_0, \omega_0) \in H_g$ называется непрерывный путь (X_t, ω_t), $t \in [0,1]$ в H_g, вдоль которого интегралы 1-формы ω_t по непрерывно деформируемым замкнутым циклам постоянны. Любая изопериодическая деформация, соединяющая пару (X_0, ω_0) с (X_1, ω_1), гомотопна композиции сдвигов, склейки и расщепления нулей дифференциалов ω_t. При *сдвиге* нуля 1-формы на малую величину $c \in \mathbb{C}$ ко всем ее относительным периодам с началом в этом нуле прибавляется c; *расщепление* нуля порядка k заменяет его на пару нулей порядков k_1, k_2, $k_1 + k_2 = k$; *склейка* – обратное преобразование к расщеплению; эти деформации подробно описаны в [7].

Пусть 1-форма ω на римановой поверхности X имеет два нуля, порядков k_1 и k_2 соответственно, $\kappa = (k_1, k_2)$. Предположим, что эти два нуля соединены парой седловых связок одинаковой длины, идущих в одном и том же направлении θ. В этом случае интеграл от ω по циклу, представляющему собой объединение этих двух седловых связок, равен 0. Сдвигая второй нуль к первому в направлении θ, мы получаем изопериодическую деформацию пары (X, ω). Ее пределом при стремлении относительного периода к нулю, т.е. при стягивании цикла в точку, является особая риманова поверхность. Такая изопериодическая деформация называется *пламбингом*. Более общим образом, пламбинг возникает в случае, когда два нуля 1-формы соединены двумя или более седловыми связками одинаковой длины, идущими в одном и том же направлении.

Доказательство Теоремы 1 разбивается на несколько лемм.

Лемма 1. *Если $(X, \omega) \in \Omega E_D(4,4)$, то соответствующая инволюция Прима $\rho : X \to X$ не имеет неподвижных точек.*

Доказательство. Поскольку $g(X) = 5$, род поверхности $Y = X/\rho$ равен 3. Квадратичный дифференциал q, поднимающийся в $\omega^{\otimes 2}$, может иметь только один нуль порядка 8. В этом случае у него нет полюсов, а значит, у инволюции ρ нет неподвижных точек.

На всякой поверхности Прима есть вполне периодическое направление [3], быть может, не единственное. Для произвольного вполне периодического направления на (X, ω) седловые связки при действии инволюции ρ переходят в седловые связки. Поэтому из отсутствия неподвижных точек у ρ следует, что все множество седловых связок разбивается на пары, связки внутри каждой из которых переставляются инволюцией ρ.

Лемма 2. *Любой собственный дифференциал Прима $(X, \omega) \in \Omega E_D(4,4)$ можно соединить непре-*

рывным путем в $\Omega E_D(4,4)$ *с собственным дифференциалом, для которого имеется вполне периодическое направление с седловой связкой, соединяющей различные нули.*

Доказательство. Пусть у поверхности X все седловые связки вдоль вполне периодического направления θ замкнуты, т.е. конец каждой из них совпадает с ее началом. При изопериодическом сдвиге одного из нулей 1-формы ω выбранное вполне периодическое направление меняется непрерывно. Без ограничения общности мы можем считать это направление постоянным и горизонтальным. При сдвиге нуля 1-формы ω на вектор $c \in \mathbb{C}$ ко всем ее относительным периодам добавляется величина c. Подобрав значение величины c таким образом, чтобы аргумент некоторого результирующего относительного периода совпал с направлением θ, т.е. этот относительный период стал вещественным, мы добьемся того, что абсолютный и относительный период продеформированной 1-формы станут пропорциональны друг другу. Последнее означает, что у вполне периодического направления найдется седловая связка, соединяющая различные нули.

Лемма 3. *Любой собственный дифференциал Прима* $(X,\omega) \in \Omega E_D(4,4)$ *можно соединить непрерывным путем в* $\Omega E_D(4,4)$ *с собственным дифференциалом, полученным пламбингом либо из плоской поверхности в* $H(6)$ *или* $H(1,1)$, *либо из особой поверхности, являющейся объединением двух поверхностей, каждая из которых лежит в* $H(2)$.

Доказательство. При изопериодических сдвигах относительные периоды по седловым связкам в каждой паре, определенной инволюцией ρ, меняются на одну и ту же величину, поэтому на новой поверхности также имеется инволюция Прима. Поскольку длины абсолютных периодов сохраняются, новая 1-форма является собственной для этой инволюции, а значит такие сдвиги задают пути вдоль $\Omega E_D(4,4)$.

По лемме 2, существует путь в поверхность с парой незамкнутых седловых связок в выбранном вполне-периодическом направлении. Поскольку два нуля дифференциала Прима ω переставляются инволюцией ρ, каждая пара незамкнутых связок образует абсолютный цикл, интеграл от ω по которому равен нулю. Сдвигая один из нулей вдоль направления θ, можно уменьшить относительные периоды, получив пару седловых связок (быть может, не одну) с концами в различных нулях, такую, что длина образованного ими цикла γ сколь угодно мала. Такую поверхность можно получить пламбингом из поверхности, результат нормализации которой является поверхностью меньшего рода. По формуле Римана–Гурвица, два нуля 1-формы ω соединены в направлении θ либо двумя седловыми связками одинаковой длины, образующими один абсолютный цикл, либо четырьмя седловыми связками одинаковой длины, разбитыми на два ρ-инвариантных абсолютных цикла. В первом случае результатом вырождения является поверхность из страта $H(6)$, если абсолютный цикл не разделяющий, и пара поверхностей из страта $H(2)$, если он разделяющий. Во втором случае мы получаем поверхность из страта $H(1,1)$.

Лемма 4. *Поверхность* (X,ω) *из локуса* $\Omega E_D(4,4)$ *при данном значении* D *можно получить пламбингом только из особых поверхностей, результат нормализации которых принадлежит локусам* $\Omega E_D(6)$ *или* $\Omega E_D(1,1)$, *либо образован парой поверхностей в* $\Omega E_D(2)$.

Доказательство. Инволюция Прима на римановой поверхности продолжается по непрерывности до инволюции Прима на поверхностях, полученных из нее сдвигом. Поэтому на каждой поверхности, являющейся результатом пламбинга особой римановой поверхности Прима, зафиксирована голоморфная инволюция. При пламбинге поверхности из страта $H(6)$ особая точка раздувается в абсолютный цикл инвариантный относительно действии инволюции, причем значения остальных абсолютных периодов не меняются. Поэтому, если 1-форма на продеформированной поверхности лежит в $\Omega_D^-(X)$, то и предельная 1-форма на поверхности в $H(6)$ задает точку в $\Omega E_D(6)$. При этом, по построению, точка пламбинга — единственная неподвижная точка инволюции Прима. Для страта $H(1,1)$ аналогичное рассуждение показывает, что возмущаемая особая поверхность лежит в $\Omega E_D(1,1)$. В случае разделяющей петли γ аналогичное вычисление показывает, что пламбинг применяется к особой поверхности, образованной склейкой по одной точке двух экземпляров одной поверхности из $\Omega E_D(2), D = d^2$. Здесь точка пламбинга это единственный ноль дифференциала на каждой копии.

На пространстве H_g определено естественное действие группы $GL_2^+(\mathbb{R})$, возникающее как обобщение ее действия на пространстве плоских торов $GL_2^+(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{R})$ [8]. Страты $H_g(\kappa)$ инвариантны относительно этого действия. Каждая компонента связности локуса Прима представляет собой афинно-инвариантный орбифолд. *Афинно-инвариантным орбифолдом* называется замкнутое связное подмножество $M \subset H(\kappa)$, являющееся образом какого-то орбифолда $\mathfrak{M}$ при собственной иммерсии f, такой, что для любой точки $x \in \mathfrak{M}$ найдется открытая окрестность $U(x)$, такая, что окрестность $f(U)$ точки $f(x)$ задается однородными линейными уравнениями в координатах периодов. Афинно-инвариантные орбифолды инварианты относительно действия группы $GL_2^+(\mathbb{R})$ на H_g [11]. Операция пламбинга для точек локусов Прима, в случае когда точки пламбинга неподвижные точки инволюции или нули дифференциала, эквивариантна относительно действия группы $GL_2^+(\mathbb{R})$. Здесь эквивариантность означает, что действие элемента g переводит окрестность, которую можно получить при пламбинге в разных направлениях из точки X, в окрестность, полученную пламбингом из точки gX', где X' – результат нормализации X.

Эндоморфизм из кольца $R \simeq O_D$ можно представить как целочисленный оператор, действующий на векторах, составленных из абсолютных периодов ω по циклам, нечетным относительно инволюции Прима. Условие того, что ω является собственным дифференицалом Прима, эквивалентно тому, что данный вектор абсолютных периодов является собственным для соответствующего оператора с собственным значением из кольца O_D.

Лемма 5. *В случае данного значения $D \neq d^2$, локус $\Omega E_D(4,4)$ не содержит поверхности, которую можно получить пламбингом из особых поверхностей, результат нормализации которых принадлежит локусам $\Omega E_D(1,1)$.*

Доказательство. Инволюция Прима на поверхности в $\Omega E_D(1,1)$, в отличие от инволюции в $\Omega E_D(4,4)$, не меняет местами нули дифференциала. Пламбинг по конструкии осуществляется в особой точке кривой, чья нормализация лежит $\Omega E_D(1,1)$, при этом оба нуля возникают в точках норамзиции. Поэтому по конструкции пламбинга, если на полученной поверхности в $H(4,4)$ есть инволюция, переставляющая нули, то и поверхность в $\Omega E_D(1,1)$ имеет в дополнение к инволюции Прима симметрию второго порядка s, переставляющую два нуля. На поверхности из $\Omega E_D(1,1)$ инволюция s существует только при условии, что абсолютные периоды попарно равны. Но это означает, что действием $GL_2^+(\mathbb{R})$, можно получить поверхность из того же локуса, со значением периодов в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[i]$ [2]. Следовательно, так как оператор эндоморфизма имеет целые коэффициенты, собственное значение для вектора периодов также целое, но оно принадлежит кольцу O_D, значит $D = d^2$. Следовательно, при $D \neq d^2$ таких точек нет. В случае, если $D = d^2$, действием $GL_2^+(\mathbb{R})$ любую поверхность в $\Omega E_D(4,4)$ можно перевести в поверхность, чей вектор периодов целочисленный.

Для $D \neq d^2$ любую поверхность в $\Omega E_D(4,4)$ можно изопериодически продеформировать в поверхность, полученную пламбингом из поверхности в $\Omega E_D(6)$ или из двух экземпляров поверхности в $\Omega E_D(2)$. Всякая поверхность, полученная пламбингом из двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_D(2)$, связана непрерывным путем внутри страта с поверхностью, полученной пламбингом из $\Omega E_D(6)$. Такие пути задаются сдвигом одного из нулей вдоль подходящей неразделяющей кривой на поверхности. Наличие такой кривой следует из классификации поверхностей в $\Omega E_D(2), D \neq d^2$ [9].

Наоборот, каждую поверхность из $\Omega E_D(6)$ можно изопериодически продеформировать в поверхность из $\Omega E_D(4,4)$.

Поскольку условие изопериодичности не зависит от относительных периодов, пламбинг можно осуществлять в любом направлении. Множество поверхностей в $\Omega E_D(4,4)$, которые можно получить пламбингом точки из $\Omega E_D(6)$, линейно связно по конструкции. Отсюда вытекает, что множество афинно-инвариантных орбифолдов в $\Omega E_D(4,4)$ для $D \neq d^2$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством таких орбифолдов в $\Omega E_D(6)$. Поскольку страт $\Omega E_D(6)$ связен и не пуст для $D \neq 9,4$ (см. [6]), страт $\Omega E_D(4,4)$ также связен для $D \neq d^2$. Для $D = d^2$, $D > 9$, всякая поверхность, полученная пламбингом из поверхности в $\Omega E_D(1,1)$ или двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_D(2)$, связана непрерывным путем внутри страта с поверхностью, полученной пламбингом из $\Omega E_D(6)$. Такие пути задаются сдвигом одного из нулей вдоль подходящей неразделяющей кривой на поверхности. Наличие такой кривой следует из классификации поверхностей в $\Omega E_D(1,1), \Omega E_D(2), D = d^2$ [9].

Для $D = 9$ имеем $\Omega E_9(6) = \varnothing$, поэтому поверхность из $\Omega E_9(4,4)$ может быть получена пламбингом только из двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_9(2)$ или из поверхности в $\Omega E_9(1,1)$. Из классификации поверхностей в $\Omega E_9(1,1), \Omega E_9(2)$ вытекает наличие непрерывного пути между поверхностями этих двух типов, задаваемого изопериодическими сдвигами.

В свою очередь, для $D = 4$ имеем $\Omega E_4(6) = \Omega E_4(2) = \varnothing$, поэтому поверхность может быть получена только из поверхности в $\Omega E_4(1,1)$. Страты $\Omega E_9(1,1), \Omega E_4(1,1)$ связны и непусты [9]. Локусы Прима $\Omega E_D(1,1), \Omega E_D(2)$, $\Omega E_D(6)$ пусты для $D < 4$, [6, 9]. Доказательство закончено.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Э. Ланно и С.К. Ландо за ценные замечания и полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 23-11-00150 “Математические проблемы современной математической физики”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Douady A., Hubbard J.* On the density of strebel differentials. Inventiones Mathematicae. 1975. V. 30. № 06. P. 175–179.
2. *Eskin A., Kontsevich M., Zorich A.* Sum of lyapunov exponents of the hodge bundle with respect to the teichmüller geodesic flow. Publications mathématiques. 2011. V. 120. № 12. P. 207–333.
3. *Lanneau E., Nguyen D.* Complete periodicity of prym eigenforms. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. 2013. V. 49. № 01. P. 87–130.
4. *Lanneau E., Nguyen D.* Teichmüller curves generated by weierstrass prym eigenforms in genus three and genus four. Journal of Topology. 2014. V. 7. P. 475–522.
5. *Lanneau E.*, *Nguyen D.* $gl_2^+(\mathbb{R})$-orbits in prym eigenform loci. Geometry and Topology. 2016. V. 20. P. 1359–1426.
6. *Lanneau E., Nguyen D.* Weierstrass prym eigenforms in genus four. Journal of The Institute of Mathematics of Jussieu. 2018. V. 19. P. 2045–2085.
7. *Eskin A., Masur H., Zorich A.* Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the siegel-veech constants. Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques. 2002. V. 97. P. 61–179.
8. *Masur H., Tabachnikov S.* Rational billiards and flat structures. Handbook of Dynamical Systems. 2002. V. 1. № 01. P. 1015–1089.
9. *McMullen C.* Teichmüller curves in genus two: discriminant and spin. Mathematische Annalen. 2005. V. 333. P. 87–130.
10. *McMullen C.* Prym varieties and teichmüller curves. Duke Mathematical Journal. 2006. V. 133. P. 569–590.
11. *Eskin A., Mirzakhani M., Mohammadi A.* Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $sl_2(\mathbb{R})$ action on moduli space. Annals of Mathematics. 2015. V. 182. P. 673–721.