ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 5–9

МАТЕМАТИКА

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТЕОРИЯ *p*-РЕГУЛЯРНОСТИ

© 2023 г. Б. Медак[1,*], А. А. Третьяков[1,2,3,4,]**

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко
Поступило 02.02.2022 г.
После доработки 27.10.2022 г.
Принято к публикации 05.05.2023 г.

В статье рассматриваются различные модификации нелинейного уравнения Бюргерса с малым параметром и вырожденного в решении вида

$$F(u,\varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x,t) = 0, \tag{1}$$

где $F : \Omega \to C([0,\pi]\times[0,T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0,\pi]\times[0,T])\mathbb{R}$ и $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $f(x,t) \in C([0,\pi]\times[0,T])$, $\varphi(x) \in C[0,\pi]$. Нас будет интересовать наиболее важный в приложениях случай малого параметра ε с осциллирующими начальными условиями вида $\varphi(x) = k\sin x$, где k – некоторая, вообще говоря, зависящая от ε, константа, и изучать вопрос существования решения в окрестности тривиального $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, которому соответствует $k = k^* = 0$ и при каких начальных условиях на значения k возможно построение аналитического приближения этого решения при малых ε.

Мы будем искать решение в традиционном русле разделения переменных на подпространстве функций вида $u(x,t) = v(t)u(x)$, где $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathscr{C}^2([0,\pi])$. В этом случае рассматриваемая задача является вырожденной в точке $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, так как $\operatorname{Im}F'_u(u^*,\varepsilon^*) \neq Z = \mathscr{C}([0,\pi]\times[0,T])$. Это следует из теории Штурма–Лиувилла. Для осуществления наших целей мы применяем аппарат теории p-регулярности [6, 7, 15, 16] и показываем, что отображение $F(u,\varepsilon)$ является 3-регулярным в точке $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, т.е. $p = 3$.

DOI: 10.31857/S2686954323700236, **EDN:** SULTYI

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ *p*-РЕГУЛЯРНОСТИ

Будем рассматривать следующее уравнение

$$F(v,y) = 0, \tag{2}$$

где отображение $F : W\times Y \to Z$, $F \in C^{p+1}(W\times Y)$ и W, Y, Z – банаховы пространства.

Предположим, что в точке решения $(v^*,y^*) \in W\times Y$, $\operatorname{Im}F'(v^*,y^*) \neq Z$ и пусть

$$Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_p, \tag{3}$$

где $Z_1 = \operatorname{cl}(\operatorname{Im}F'(v^*,y^*))$ и $V_1 = Z$. Через V_2 обозначим дополнение Z_1 до Z (предпологается, что такое существует) и $P_{V_2} : Z \to V_2$ – оператор проектирования на V_2 параллельно Z_1. Полагаем Z_2 равно замыканию линейной оболочки квадратичной формы $P_{V_2}F''(v^*,y^*)[\cdot]^2$. И далее индуктивно

$$Z_i = \operatorname{cl}(\operatorname{span}\operatorname{Im}P_{V_i}F^{(i)}(v^*,y^*)[\cdot]^i) \subseteq V_i,\quad i = 2,\ldots,p-1,$$

где V_i – выбранное замкнутое дополнение (предполагается, что такое существует) $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2,\ldots,p$ до Z, и $P_{V_i} : Z \to V_i$ – оператор проектирования на V_i параллельно $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \ldots, p$.

[1] *Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland*
[2] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *System Researche Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*
[4] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: bmedak@uph.edu.pl*
***E-mail: tret@uph.edu.pl*

Окончательно, $Z_p = V_p$. При этом порядок p полагаем как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено представление (3).

Обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$, для произвольного отображения φ.

Определим следующие отображения

$$F_i : W \times Y \to Z_i, \quad F_i(v, y) = P_{Z_i} F(v, y), \quad i = 1, \dots, p, \tag{4}$$

где $P_{Z_i} : Z \to Z_i$ – оператор проектирования на Z_i параллельно $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \dots \oplus Z_p$.

Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(v, y) = F_1(v, y) + \dots + F_p(v, y)$$

или

$$F(v, y) = (F_1(v, y), \dots, F_p(v, y)).$$

Обозначим $h = [h_v, h_y]$, $h_v \in W$, $h_y \in Y$, $[h_v, h_y] \in W \times Y$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : W \times Y \to Z$,

$$\Psi_p(h) = F_1''(v^*, y^*) + F_2''(v^*, y^*)[h] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1} \tag{5}$$

такой, что для $\xi = (v, y)$

$$\Psi_p(h)[\xi] = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + F_2''(v^*, y^*)[h][\xi] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}[\xi],$$

называется *p-фактор оператором определенным элементом h* или просто *p-фактор оператором*, если это ясно из контекста.

Определение 2. Говорим, что отображение F *абсолютно вырождено в точке* (v^*, y^*) *до p-го порядка*, если $F^{(i)}(v^*, y^*) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$.

В случае абсолютного вырождения p-фактор оператор сводится к $F^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}$.

Для отображений F_i будет

$$F_i^{(k)}(v^*, y^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i-1, \quad \forall\, i = 1, \dots, p,$$

т.е. F_i абсолютно вырождено в точке (v^*, y^*) до i-го порядка.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$ так, что

$$\Psi_p[\xi]^p = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + F_2''(v^*, y^*)[\xi]^2 + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[\xi]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[h]^p = \Psi_p(h)[h]$.

Определение 3. *p-ядро* оператора Ψ_p есть множество нулей оператора Ψ_p:

$$H_p(v^*, y^*) = \operatorname{Ker}^p \Psi_p = \{h \in W \times Y : F_1'(v^*, y^*)[h] + F_2''(v^*, y^*)[h]^2 + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^p = 0\},$$

по аналогии с ядром первой производной $\operatorname{Ker} F'(v^*, y^*) = \{h \in W \times Y \mid F'(v^*, y^*)[h] = 0\}$.

Заметим, что

$$\operatorname{Ker}^p \Psi_p = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*).$$

Определение 4. Отображение F называется *p-регулярным в точке* (v^*, y^*) *на* h, если $\operatorname{Im} \Psi_p(h) = Z$.

Определение 5. Отображение F называется *p-регулярным в точке* (v^*, y^*), если оно p-регулярно на каждом $h \in H_p(v^*, y^*) \backslash \{0\}$ или $H_p(v^*, y^*) = \{0\}$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Люстерника о касательном подпространстве на вырожденный случай и является одним из главных результатов теории p-регулярности.

Теорема 1. *Пусть* $F \in C^{p+1}(U \times M)$, $F : U \times M \to Z$, *где* U, M *и* Z – *банаховы пространства*.

Предположим что $F(v^*, y^*) = 0$ и $\forall \bar{y} \in M$, $\|\bar{y}\| = 1$, такого, что

$$(0, \bar{y}) \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*)$$

выполнено

$$\|\{F_1'(v^*, y^*) + F_2''(v^*, y^*)[0, \bar{y}] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[0, \bar{y}]^{p-1}\}^{-1}\| \le C. \tag{6}$$

(Здесь $\{\}^{-1}$ означает правый обратный оператор).

Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ существует непрерывное отображение $v = v(y)$, $y \in V_\delta(y^*)$, где $V_\delta(y^*)$ окрестность точки y^*, $v(y) \in C(V_\delta(y^*))$, такое, что $F(v(y), y) = 0$ и

$$v(y) = v^* + \omega(y), \quad \|\omega(y)\| = o(\|y - y^*\|), \tag{7}$$

$$\|v(y) - v^*\| \le C \sum_{k=1}^{p} \|F_k(v^*, y)\|_{Z_k}^{\frac{1}{k}}, \quad \forall y \in V_\delta(y^*), \tag{8}$$

где $C > 0$ – независимая константа.

Эта теорема позволяет описать множество решений уравнения $F(v, y) = 0$ в окрестности вырожденной точки (u^*, ε^*) и в частности обосновать существование решения уравнения Бюргерса (1) с малым параметром, а также дать аналитический вид этого решения.

2. ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p-го ПОРЯДКА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теперь мы можем сформулировать так называемые p-фактор теоремы о неявной функции, которые являются модификациями теоремы 1 и аналогичных теорем в [6] и на основании которых будут получены основные результаты этой работы.

Т е о р е м а 2. *Пусть W, Y и Z банаховы пространства,* $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \to Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, *отображения* $F_k(v, y)$, $k = 1, \dots, p$ *и* p*-фактор оператор* $\Psi_p(h)$ *определены согласно* (4) *и* (5).

Предположим, что существует $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^{p} \mathrm{Ker}^r F^{(r)}_{r_v}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$ такое, что $\mathrm{Im}\Psi_p(\bar{h}) = Z$, т.е. F p-регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$.

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $\nu > 0$ и $\delta = \alpha\nu^p$ существует непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \to U_\nu(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены соотношения

a) $\varphi(y^*) = v^*$;

b) $F(\varphi(y), y) = 0 \ \forall \ y \in U_\delta(y^*)$;

c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \to \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ непрерывная функция, для которой

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \le \gamma(y) \le \nu, \quad y \in U_\delta(y^*).$$

Более того для $v(y)$ будут справедливы оценки

$$\|v(y)\|_W \le K \sum_{r=1}^{p} \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}}, \tag{9}$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \ne 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(y)).$$

С л е д с т в и е 1. Оценку (9) можно переписать следующим образом

$$\|v(y)\|_W \le K \sum_{r=1}^{p} \|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}^{\frac{1}{r}}$$
$$y \in U_\delta(y^*), \quad y \ne y^*.$$

Т е о р е м а 3. Пусть W, Y и Z банаховы пространства, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \to Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, отображения $F_i(v, y)$, $i = 1, \dots, p$ и p-фактор оператор $\Psi_p(h)$ определены согласно (4) и (5).

Предположим, что существует элемент $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^{p} \mathrm{Ker}^r F^{(r)}_{r_{(v,y)}}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$, $\bar{h} \in W \times Y$, $\bar{h} = [\bar{h}_v, \bar{h}_y]$, $\bar{h}_y = 0$ такой, что $\mathrm{Im}\Psi_p(\bar{h}) \cdot (0 \times Y) = Z$, т.е. F p-регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$ относительно пространства Y.

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $\nu > 0$ и $\delta = \alpha\nu^p$ существуют непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \to U_\nu(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены следующие соотношения

a) $\varphi(y^*) = v^*$;

b) $F(\varphi(y), y) = 0 \ \forall \ y \in U_\delta(y^*)$;

c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}_y$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \to \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ любая фиксированная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \le \gamma(y) \le \nu.$$

Более того $v(y)$ удовлетворяет

$$\|v(y)v_W \le K \sum_{r=1}^{p} \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}},$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \ne 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(v)).$$

З а м е ч а н и е 1. Элемент $\bar{h}$ в теореме 2 определяется производными отображения F по переменной y, а в теореме 3 – смешанными производными отображения F по переменным (v, y).

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Рассмотрим нелинейное уравнение Бюргерса с малым параметром ε вида

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 = 0, \tag{10}$$

$F : \Omega \to C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, где F достаточно гладкое отображение (по крайней мере до порядка $p + 1$) и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = k \sin x$, при этом $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$ тривиальное решение этого уравнения, соответствующее $k = k^* = 0$.

При этом отображение $F(u, \varepsilon)$ является 3-регулярным на элементе $\bar{h} = [\bar{h}_u, 0_\varepsilon]$, где $\bar{h}_u = e^{-t} \sin x$.

Применяя к отображению $F(u, \varepsilon)$ теорему 3, полагая

$$F(v, y) = F(u, \varepsilon), \quad v := u, \quad y := \varepsilon,$$

получаем следующий результат о существовании решения (10).

Т е о р е м а 4. *Для достаточно малых* $\alpha > 0, \nu > 0$ *и* $k(\varepsilon) \in C(R)$, $\varepsilon \in R$, *при* $|\varepsilon| \le \alpha\nu^3$, $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}} \le k(\varepsilon) \le \nu$ *существует непрерывное решение* (10) *вида*

$$u(x,t,\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)\bar{h}_u + y(x,t,\varepsilon),$$
$$u(x,0,\varepsilon) = k(\varepsilon)\sin x,$$

где $\gamma(\varepsilon)$ *некоторая непрерывная функция такая, что* $\gamma(\varepsilon) = O(k(\varepsilon))$, *а* $\|y(x,t,\varepsilon)\| = o(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$.

Доказательство данного результата подобно доказательству аналогичных теорем в [8–10], поэтому здесь не приводится.

Для неоднородного нелинейного уравнения Бюргерса вида $F(u,\varepsilon) = u - u_{xx} + uu_{xx} + \varepsilon u^2 = f(x, t)$, введя отображение $F(u,\varepsilon,f) = F(u,\varepsilon) - f$, получим однородное относительно u, ε, f уравнение

$$F(u,\varepsilon,f) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x,t) = 0, \quad (11)$$

где $F:\Omega\times C([0,\pi]\times[0,T])\to C([0,\pi]\times[0,T])$, $T > 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ и, не ограничивая общности, рассмотрим случай нулевых начальных условий $u(x,0) = 0$.

Заметим, что $F'(0,0,0) = \left[\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{(dx)^2}, 0_\varepsilon, 1_f\right]$ и $\mathrm{Ker}F'(0,0,0)$ определяется решением уравнения

$$F'(0,0,0)[u,\varepsilon,f] = u_t - u_{xx} - f(x,t) = 0,$$

которое обозначим через $\bar{h} = (\bar{u}(x,t,f), 0_\varepsilon, f(x,t))$. Тогда

$$\bar{h} = (\bar{u}(x,t,f), 0_\varepsilon, f(x,t)) \in \mathrm{Ker}F'(0,0,0) \cap$$
$$\cap\, \mathrm{Ker}^3 PF'''(0,0,0) = \mathrm{Ker}^3\Psi_3(h)$$

и

$$\bar{u}(x,t,f) = \int_0^t\int_0^\pi G(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t,\tau)$ – функция Грина (см., например, [13, 14]), а отображение $F(u,\varepsilon,f)$ является 3-регулярным на элементы $\bar{h}$.

Применяя теорему 3 и полагая $F(v,y) = F(u,\varepsilon,f)$, $v := (u,f)$, $y := \varepsilon$ и $(u^*,\varepsilon^*,f^*) = (0, 0, 0)$.

Т е о р е м а 5. *Для* $\alpha > 0$, $\nu > 0$ *достаточно малых при* $\varepsilon \in (-\alpha\nu^3, \alpha\nu^3)$ *и* $\|f(x,t)\| \in \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}{\alpha}, \nu\right)$ *существует непрерывное решение уравнения* (11) *вида*

$$u(x,t,\varepsilon,f) = \bar{u}(x,t,f) + y(x,t,\varepsilon,f), \quad (12)$$

где

$$\|y(x,t,\varepsilon,f\| = o(\varepsilon^{\frac{1}{3}}). \quad (13)$$

Аналогично могут быть исследованы уравнения

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + uu_x + g(u) - f(x,t) = 0, \quad (14)$$
$$u_t - u_{xx} + \varepsilon uu_x + g(u) - f(x,t) = 0, \quad (15)$$

где $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1,\ldots,p$, а также при неоднородных начальных условиях вида $u(x,0) = \varphi(x)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30005, стр. 1–9), научной бюджетной теме ФИЦ ИУ РАН и научной теме № 144/23/B Министерства Образования и Науки Польши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baxley J.V.* Nonlinear second-order boundary value problems: Continuous dependence and periodic boundary conditions // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1982. V. 31. № 2. P. 305–320.
2. *Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A.* Marsden: *Higher-order implicit function theorems and degenerate nonlinear boundary-value problems* // Communications on Pure and Applied Analysis. 2008. V. 7. № 2. P. 293–315.
3. *Gaines R.* Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1969. V. 28. P. 327–336.
4. *Grzegorczyk W., Medak B., Tret'yakov A.A.* Application of *p*-regularity theory to nonlinear boundary value problems // Boundary Value Problems. 2013. V. 2013. P. 251, http:/www.boundaryvalueproblems.com/content/2013/1/251
5. *Ingram S.K.* Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1972. V. 41. P. 395–408.
6. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
7. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных проблем. Теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
8. *Medak B.* Development of *p*-regularity apparatus and its application to describing the structure of solution sets of degenerated differential equations, Doctoral thesis, UMCS, Lublin, 2013 (in Polish).
9. *Medak B., Tret'yakov A.A.* Existence of periodic solutions to nonlinear *p*-regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. V. 2015. P. 91. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0360-2
10. *Medak B., Tret'yakov A.A.* Application of *p*-regularity theory to the Duffing equation // Boundary Value Problems. 2017. V. 2017. P. 85. https://doi.org/10.1186/s13661-017-0815-8
11. *Medak B., Tret'yakov A.A.* Continuous dependence of the singular nonlinear Van der Pol equation solutions

with respect to the boundary conditions: Elements of p-regularity theory // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2021. V. 33. P. 1087–1107. https://doi.org/10.1007/s10884-020-09849-0

12. *Michael E.A.* Continuous selector // Ann. Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
13. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: МГУ, Наука, 2004.
14. *Тихонов А.Н., Василева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, Москва, Физматлит, 1998.
15. *Tret'yakov A.A.* The implicit function theorem in degenerate problems // Russ. Math. Surv. 1987. V. 42. P. 179–180.
16. *Tret'yakov A.A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure and Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425–445.

ON THE APPLICATION OF THE SOLUTION OF THE DEGENERATE NONLINEAR BURGERS EQUATION WITH A SMALL PARAMETER AND THE THEORY OF *p*-REGULARITY

B. Medak[a,*] and A. A. Tret'yakov[a,b,c,d,]**

[a] *Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland*

[b] *Federal Research Center Informatics and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[c] *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

[d] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation*

The article discusses various modifications of the nonlinear Burgers equation with small parameter and degenerate in solution of the form

$$F(u,\varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x,t) = 0, \tag{1}$$

where $F:\Omega \to C([0,\pi]\times[0,T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0,\pi]\times[0,T])\mathbb{R}$ and $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $f(x,t) \in C([0,\pi]\times[0,T])$, $\varphi(x) \in C[0,\pi]$. We will be interested in the most important in applications case of a small parameter ε with oscillating initial conditions of the form $\varphi(x) = k\sin x$, where k –some, generally speaking, constant depending on ε, and study the question of the existence of a solution in neighborhood of the trivial $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, which corresponds to $k = k^* = 0$ and at what initial Under certain conditions on the values of k, it is possible to construct an analytical approximation of this solution for small ε.

We will look for a solution in the traditional way of separation of variables on a subspace of functions of the form $u(x,t) = v(t)u(x)$, where $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathscr{C}^2([0,\pi])$. In this case, the problem under consideration is degenerate at the point $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, since $\operatorname{Im}F'_u(u^*,\varepsilon^*) \neq Z = \mathscr{C}([0,\pi]\times[0,T])$. This follows from the Sturm-Liouville theory. To achieve our goals, we apply the apparatus of p-regularity theory [6, 7, 15, 16] and show that the mapping $F(u,\varepsilon)$ is 3-regular at the point $(u^*,\varepsilon^*) = (0,0)$, т.е. $p = 3$.