

УДК 521.135

УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

© 2023 г. П. С. Красильников^{1,*}, А. В. Доброславский^{1,**}

Представлено академиком Д.В. Трещёвым

Поступило 20.11.2022 г.

После доработки 23.05.2023 г.

Принято к публикации 30.05.2023 г.

Рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в пространстве оскулирующих элементов. В качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), когда большая полуось эллипса меньше радиуса орбиты внешней планеты (внутренняя задача). Показано, что дважды усредненная возмущенная силовая функция задачи допускает, на основе применения формулы Парсеваля, явное аналитическое представление с помощью рядов с коэффициентами, выраженными через гипергеометрические функции Гаусса, Клаузена. Исследование поведения этой функции на кривых неаналитичности показало, что ряды являются асимптотическими. Для редуцированной системы с одной степенью свободы построены фазовые портреты колебаний в плоскости кеплеровских элементов e, ω во втором и четвертом приближениях. Показано, что в четвертом приближении существенно усложняется топология фазового портрета по сравнению с первым и вторым приближениями, при условии, что константа c_1 интеграла Лидова–Козаи принадлежит интервалу $(0, 0.382)$.

Ключевые слова: ограниченная пространственная задача трех тел, метод усреднения

DOI: 10.31857/S2686954323600489, **EDN:** PPGFND

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую пространственную ограниченную задачу трех тел. Предположим, что пассивно гравитирующее тело (астероид) P находится в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса r_j ; центральное тело S (Солнце) имеет массу m_S и воздействует на астероид с силой F_S , второе тело J (Юпитер) массы m_J оказывает возмущающее действие с силой F_J . Считаем, что невозмущенная траектория спутника есть кеплеровский эллипс с фокусом в S , плоскость которого Π образует с плоскостью движения Π_0 притягивающих тел угол i (рис. 1).

Известно, что в такой классической постановке задача исследована достаточно подробно. Так, в статьях [1, 2] получено первое (хилловское) приближение для дважды усредненной силовой функции задачи, подробно проведен количе-

ственный и качественный анализ уравнений движения в указанном приближении. В статье [3] получено усеченное значение усредненной силовой функции в четвертом приближении, однако анализ уравнений движения ограничен хилловским

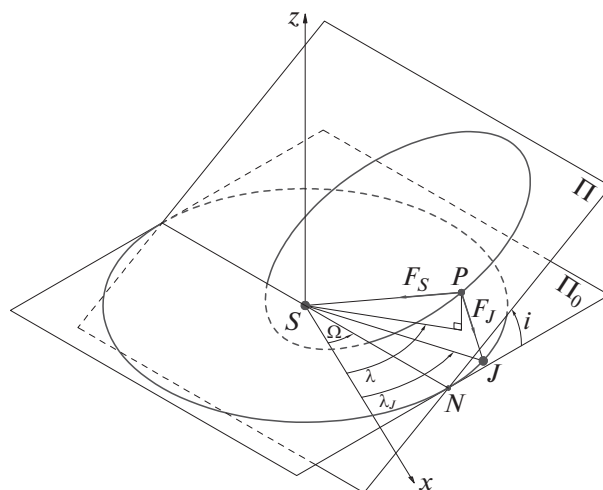


Рис. 1. Невозмущенные траектории небесных тел, угловые переменные.

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: krasil06@rambler.ru

**E-mail: a.dobroslavskiy@gmail.com

случае. В работе [4] исследованы усредненные уравнения второго приближения, делается вывод о топологической эквивалентности фазового портрета хилловскому случаю. В статье [5] приводится подробный численный анализ редуцированных уравнений движения, когда усредненная силовая функция рассматривается в виде кратного интеграла по двум быстрым переменным.

Основная цель статьи — получить новые результаты в двукратно усредненной задаче Гаусса, используя явное компактное представление усредненной силовой функции R^{**} в виде степенного ряда, либо в виде ряда Фурье. Постановка задачи и результаты исследований отличаются от численных исследований М.А. Вашковьяка [5], когда R^{**} рассматривают в виде квадратуры, непредставимой в конечном виде. Численный метод, несмотря на свою универсальность, ограничен в силу сложности функции R^{**} : невозможно рассчитать все многообразие стационарных точек при произвольных значениях параметров, их бифуркации, трудно построить гетероклинические траектории.

Приближенно-аналитический метод, используемый в статье, заменяет силовую функцию R^{**} усеченной, что позволяет строить бифуркационные диаграммы, точки бифуркации равновесий, сепаратрисы, фазовые портреты колебаний по эксцентриситету e и аргументу перицентра ω в высоких приближениях по малому параметру. При этом решается важный вопрос о поведении силовой функции на кривых неаналитичности, препятствующих численному расчету квадратуры R^{**} : степенные ряды и ряды Фурье, описывающие R^{**} , являются асимптотическими рядами на этих кривых.

Введем неинерциальную гелиоцентрическую систему координат с центром в S . Ось Sx направим в точку весеннего равноденствия, SN — линия узлов орбиты спутника, остальные оси, образующие правую систему координат, на рис. 1 не указаны. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор тела P , $\mathbf{r}_J$ — радиус вектор тела J .

Пусть Ω — долгота восходящего узла невозмущенной орбиты спутника на плоскости Π_0 , e , ω — эксцентриситет и аргумент перицентра этой орбиты, λ_J — долгота тела J , а λ — долгота тела P в плоскости Π_0 .

Рассмотрим “внутренний” вариант задачи трех тел, когда параметры движения тела P удовлетворяют условию

$$a < r_J.$$

Здесь a — большая полуось невозмущенной орбиты спутника.

Запишем выражение для возмущенной силовой функции задачи:

$$R = fm_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\mathbf{r}_J, \mathbf{r})}{r_J^3} \right), \quad (1)$$

$$\Delta = r_J \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{r_J} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r_J} \right)^2},$$

где f — постоянная тяготения, γ — угол между $\mathbf{r}_J$ и $\mathbf{r}$,

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \Omega) \cos(\omega + v) + \sin(\lambda_J - \Omega) \sin(\omega + v) \cos i, \quad (2)$$

v — истинная аномалия в движении спутника вдоль невозмущенной орбиты.

Функция (1) может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра с точностью до членов, не зависящих от координат тела P :

$$R = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (3)$$

2. УСРЕДНЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Считаем, что частота ω_J ($\lambda_J = \omega_J t + \lambda_{j0}$) не резонирует с частотой n невозмущенного движения спутника. Проводя усреднение (3) по долготе λ_J тела J , получим, с учетом (2), теоремы сложения для полиномов Лежандра и равенства $P_{2n+1}(0) = 0$, однократно усредненную силовую функцию R^* задачи:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J = \\ &= \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}[\sin i \sin(v + \omega)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение (4) совпадает с силовой функцией кольца Гаусса [6] при $r < r_J$, что было впервые установлено в работе Аксенова [7].

Усредним теперь выражение (4) по средней долготе λ тела P , учитывая, что $d\lambda = r^2 dv / (a^2 \sqrt{1 - e^2})$:

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* d\lambda = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} r^2 R^* dv. \quad (5)$$

Для вычисления этого интеграла представим выражение для r через истинную аномалию v , используя формулы невозмущенного движения. Вычисления показывают, что функция R^{**} примет вид

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J a^2 \sqrt{1-e^2}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a(1-e^2))^{2n+2}}{r_J^{2n}} P_{2n}(0) I_{2n}(i, e, \omega), \quad (6)$$

где

$$I_{2n}(i, e, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) dv, \quad (7)$$

$$\theta = v + \omega - \pi/2.$$

Основная техническая проблема исследований — вычисление этого интеграла. Современные программные комплексы, такие как Wolfram Mathematica и Maple, с этой задачей не справляются. Однако, учитывая периодичность по v сомножителей, входящих в подынтегральное выражение интеграла (7), можем применить формулу Парсеваля [8], описывающую главный (секулярный) член произведения двух рядов Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) dv = \frac{a_0 \alpha_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m). \quad (8)$$

Здесь $\{a_0, a_m, b_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $(1 + e \cos v)^{-2n-2}$, $\{\alpha_0, \alpha_m, \beta_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$.

Вычисления показывают, что интеграл (7) имеет вид

$$I_{2n}(i, e, \omega) = \frac{1}{(1-e)^{2n+2}} \left[P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) \times \right. \\ \times F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \\ + 2 \sum_{m=1}^{2n} F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \left. \right]. \quad (9)$$

Здесь $F_{2,1}$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а $F_{3,2}^{\text{reg}}$ — обобщенная гипергеометрическая регуляризованная функция Клаузена, $P_{2n}^{(m)}$ — присоединенная функция Лежандра. Отметим, что функция Клаузена $F_{3,2}^{\text{reg}}$ является аналитическим продолжением гипергеометрического ряда, представляет собой решение некоторого линейного дифференциального уравнения третьего порядка, имеет особенность в точках $z = 0, 1, \infty$.

Достоверность формулы (9) была подтверждена численным интегрированием выражения $(1 +$

$+ e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta)$ — результаты вычислений левой и правой частей формулы совпадают по всем значащим цифрам для следующего декартового произведения значений параметров: e от 0 до 1 с шагом 0.1, ω от 0 до 2π с шагом $\pi/6$, i от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом $\pi/6$ и n от 1 до 15 с шагом 1.

Выражение для усредненной силовой функции можно разложить в ряд Фурье по $\cos 2\omega$:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\omega \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_n = (-1)^n \left(2 \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right),$$

$$A_m^{(2n)} = F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \quad (m \leq 2n),$$

$$B_{2n} = \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0).$$

Представим также усредненную силовую функцию в виде степенного ряда по малому параметру $(a/r_J)^{2k}$:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k}, \quad (11)$$

где

$$D_k = (1+e)^{2k+2} P_{2k}(0) \left(P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) \times \right. \\ \times F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2k+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{n=1}^k (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n\omega \left. \right).$$

Полученные разложения (10), (11) удобны с аналитической и вычислительной точки зрения. Более того, с каждым из этих разложений можно работать как с единой однозначной аналитической функцией (вычислять производные любого порядка по аргументам e, ω, i , проводить усечение рядов до членов любого порядка малости), если использовать Wolfram Mathematica.

Отметим, что аналитическое представление дважды усредненной силовой функции задачи в виде ряда Фурье по ω впервые получено в работе Аксенова [7], в которой усреднение проводилось по истинной аномалии. Такое усреднение отличается от усреднения по Гауссу. Коэффициенты этого ряда автор статьи выразил через неизвестные

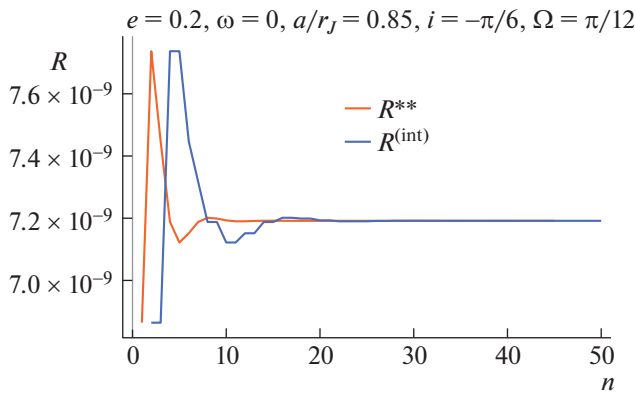


Рис. 2. Сравнение ряда Фурье (10) с (12).

специальные функции, связанные между собой рекуррентными соотношениями. Заметим также, что иное представление степенного ряда (11) через специальные функции Хансена $X_0^{k,-2p}(e)$ и функции наклона $F_{k0p}(i)$ содержится в статье [9] (см. также [13]). К сожалению, эти разложения имеют более громоздкий вид и менее удобны для аналитических исследований. Отметим также, что формула (10) переходит в ряд Фурье статьи [7], если усреднение по λ заменить усреднением по v с переходом к новому времени $d\tau = (\sqrt{fmp}/r^2)dt$.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ ДВУКРАТНО УСРЕДНЕННОЙ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Сравним формулу (10) для вычисления силовой функции задачи с результатами, получаемыми при численном усреднении $R^{(int)}$:

$$R^{(int)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J d\lambda. \quad (12)$$

С этой целью возьмем следующие параметры для численного счета: $e = 0.2$, $i = -\pi/6$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.85$, $\Omega = \pi/12$.

Подсчитаем значения силовой функции R^{**} , удерживая по возрастающей число n членов ряда Фурье (10), и сравним эти значения с результатами численного интегрирования выражения (12) при том же самом числе n членов подынтегрального выражения.

Как можно видеть из рис. 2, функция R^{**} выходит на свое значение в фиксированной точке начиная с частичной суммы, содержащей 12 членов ряда (коричневая кривая), в то время как результат численного интегрирования представлен в виде колебаний вплоть до $n = 20$ (синяя кривая), с последующим выходом кривой на значение функции в точке. Показано, что при $n \geq 20$

результаты расчетов по формуле (10) совпадают с результатами численного интегрирования $R^{(int)}$ на сетке значений $e \in [0, 0.9]$ с шагом 0.1, $(a/r_J) \in [0.5, 0.95]$ с шагом 0.05, $\omega \in [0, \pi]$ с шагом $\pi/6$, $i \in [-\pi/2, \pi/2]$ с шагом $\pi/6$.

Для верификации ряда (11) запишем его хилловское приближение, в котором удерживается только первый член ряда:

$$R_{hill}^{**} = \frac{fm_J a^2}{r_J^3 \sqrt{1-e^2}} (1+e)^4 P_2(0) \times \\ \times \left[P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - A_2^{(2)} \cos 2\omega \right].$$

Здесь

$$A_2^{(2)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{4!} P_2^{(2)}(0) P_2^{(2)}(\cos i),$$

$$P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad P_2^{(2)}(0) = 3,$$

$$P_2(\cos i) = \frac{1}{2} (3\cos^2 i - 1),$$

$$P_2^{(2)}(\cos i) = -3(\cos^2 i - 1),$$

$$F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{(2+3e^2)(1-e)^{1/2}}{2(1+e)^{7/2}},$$

$$F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{5}{2} e^2 \frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{7/2}}.$$

Подставляя вышеперечисленное в выражение для R_{hill}^{**} и упрощая, получим:

$$R_{hill}^{**} = \frac{fm_J a^2}{16r_J^3} \frac{(1+e)^4 (1-e)^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2} (1+e)^{7/2}} \times \quad (13) \\ \times [(3\cos^2 i - 1)(2+3e^2) - 15e^2(\cos^2 i - 1)\cos 2\omega] = \\ = \frac{3fm_J a^2}{16r_J^3} \left(\frac{4}{3} + 2e^2 - (2+3e^2)\sin^2 i + 5e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right).$$

Это выражение тождественно совпадает с хилловским приближением усредненной силовой функции, полученным ранее в работе [1] (см. также [2]).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УСРЕДНЕННОЙ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ НА КРИВЫХ НЕАНАЛИТИЧНОСТИ

Исследуем поведение рядов (10), (11) на кривых неаналитичности усредненной силовой функции, впервые обнаруженных в статье [10]:

$$f_1(a, e, \omega) = \frac{a}{r_J} (1-e^2) - 1 + e \cos \omega = 0,$$

$$f_2(a, e, \omega) = \frac{a}{r_J} (1 - e^2) - 1 - e \cos \omega = 0.$$

Отметим, что в статьях [5, 10] эти кривые часто называют “сепаратрисами”. Название условное, так как кривые не являются интегральными. На рис. 3 можно видеть зависимость значения силовой функции (10) в фиксированной точке фазового пространства оскулирующих элементов от числа удерживаемых членов ряда. Параметры, использованные для построения рисунка, связаны функциональной зависимостью $f_1 = 0$, их значения $e = 0.134237$, $\omega = \pi/3$, $a/r_J = 0.95$, $i = -\pi/3$. Частичная сумма первых 40 членов ряда (10) хорошо приближает силовую функцию задачи R^{**} , и только удержание большего количества членов ряда приводит к его расходимости. Таким образом, ряд (10) является асимптотическим по Пуанкаре [11], при этом расходимость ряда сопровождается нарастанием амплитуды колебаний.

Аналогичные результаты наблюдаются и для ряда (11). Таким образом, ряды (10), (11) расходятся вдоль кривых неаналитичности, но ряды удовлетворяют условию асимптотичности по Пуанкаре, поэтому мы можем их аппроксимировать аналитической функцией, представляющей собой сумму первых 40 членов ряда.

5. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ

Как хорошо известно [2, 12], уравнения в оскулирующих элементах имеют два первых интеграла:

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1. \quad (14)$$

Второй из этих интегралов принято называть интегралом Лидова–Козаи. С его помощью исключаем угол i

$$i = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2}}\right),$$

из усредненной силовой функции R^{**} , получаем редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы [5]:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (15)$$

Силовая функция $\hat{R} = \hat{R}(e, \omega)$ – результат исключения угла i . Очевидно, что интеграл энергии уравнений (15) имеет вид $\hat{R}(e, \omega) = c_2$.

Из второго интеграла (14) следует ограничение на область изменения оскулирующего эксцентриситета орбиты: $0 \leq e \leq \sqrt{1 - c_1}$. Здесь $e = 0$, $e = \sqrt{1 - c_1}$ – интегральные многообразия.

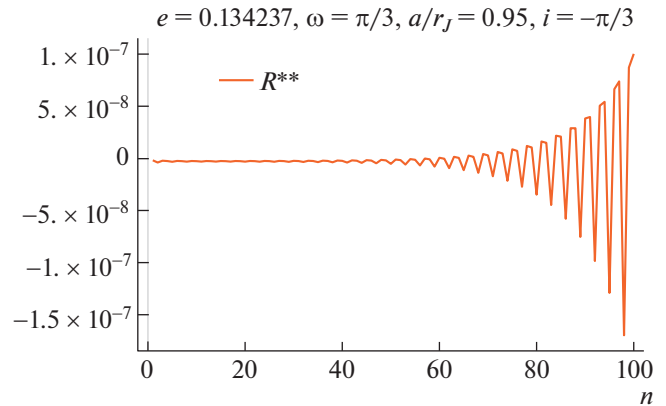


Рис. 3. Расхождение ряда (10) на кривой неаналитичности $f_1 = 0$.

Построим фазовый портрет колебаний в плоскости переменных (ω, e) редуцированной системы (15) при следующих значениях параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$. Учитывая, что хилловское приближение подробно исследовано (см. [1–3]), рассмотрим второе и четвертое приближение силовой функции (11).

Для начала удержим в $\hat{R}$ члены до четвертого порядка малости по (a/r_J) включительно (второе приближение усредненной силовой функции редуцированной системы):

$$\hat{R}_2 = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{a}{r_J}\right)^2 \left[D_1 + D_2 \left(\frac{a}{r_J}\right)^2 \right]. \quad (16)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{1}{16\sqrt{1 - e^2}} [(2 + 3e^2)(e^2 - 1 + 3c_1) - 15e^2(e^2 - 1 + c_1) \cos 2\omega],$$

$$D_2 = \frac{9}{4096(1 - e^2)^{3/2}} [(8 + 40e^2 + 15e^4) \times \\ \times (3(e^2 - 1)^2 + 5c_1(6e^2 + 7c_1 - 6)) - \\ - 140e^2(2 + e^2)(e^2 - 1 + c_1)(e^2 - 1 + 7c_1) \cos 2\omega + \\ + 735e^4(e^2 - 1 + c_1) \cos 4\omega].$$

На рис. 4 изображен фазовый портрет колебаний в оскулирующих элементах e, ω . Топологически он подобен хилловскому приближению, что соответствует выводу статьи [4] о качественном соответствии первого и второго приближений в усредненной задаче. В частном случае полярной орбиты ($c_1 = 0$), для которой угол наклона i ее плоскости к плоскости эклиптики равен $\pi/2$, вывод о падении астероида на Солнце сохраняет силу. Мы также видим область A , в которой линия

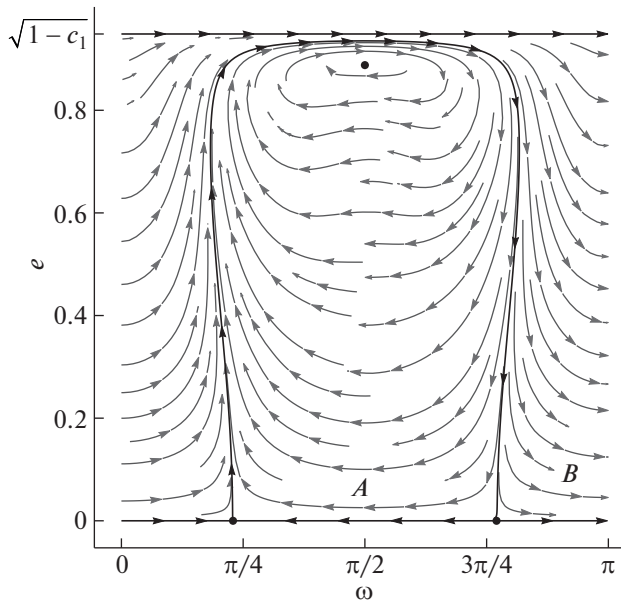


Рис. 4. Фазовый портрет второго приближения при $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

апсид совершает либрационные движения в окрестности единственной стационарной точки, как и в случае Хилла. Отличие этой области от области первого приближения состоит в том, что фазовые кривые в окрестности неподвижной точки имеют больший размах колебаний по эксцентриситету, а сама стационарная точка сдвигается в область больших значений эксцентриситета.

Исследуем теперь четвертое приближение силовой функции (11):

$$\begin{aligned} \hat{R}_4 &= \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 \times \\ &\times \left[D_1 + D_2 \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 + D_3 \left(\frac{a}{r_J} \right)^4 + D_4 \left(\frac{a}{r_J} \right)^6 \right], \quad (17) \\ D_3 &= \frac{5}{131072(1-e^2)^{5/2}} [10(16 + 168e^2 + \\ &+ 210e^4 + 35e^6)(5(1-e^2)^3 - 21c_1(5(1-e^2)^2 - \\ &- 15(1-e^2)c_1 + 11c_1^2)) + 315e^2\alpha(48 + 80e^2 + 15e^4) \times \\ &\times ((1-e^2)^2 - 18(1-e^2)c_1 + 33c_1^2)\cos 2\omega - \\ &- 4158e^4\alpha^2(10 + 3e^2)(\alpha + 10c_1) \times \\ &\times \cos 4\omega + 99099e^6\alpha^3 \cos 6\omega], \\ D_4 &= \frac{175}{268435456(1-e^2)^{7/2}} [7(128 + 2304e^2 + \\ &+ 6048e^4 + 3360e^6 + 315e^8) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (35(1-e^2)^4 - 3c_1(420(1-e^2)^3 - \\ &- 11c_1(210(1-e^2)^2 - 364(1-e^2)c_1 + 195c_1^2))) + \\ &+ 27720e^2\alpha(32 + 112e^2 + 70e^4 + 7e^6) \times \\ &\times ((1-e^2)^3 + 11c_1(3(1-e^2)^2 - 13\alpha c_1))\cos 2\omega + \\ &+ 396396e^4\alpha^2(8 + 8e^2 + e^4) \times \\ &\times ((1-e^2)^2 + 13c_1(2\alpha + 3c_1))\cos 4\omega - \\ &- 490776e^6\alpha^3(14 + 3e^2)(\alpha + 14c_1) \times \\ &\times \cos 6\omega + 15643485e^8\alpha^4 \cos 8\omega]. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = e^2 - 1 + c_1$. Прежде всего отметим, что для обоснования усечений ряда (11) были проведены вычисления, при которых частичная сумма R_n^{**} ряда (11) сравнивалась со значением интеграла (12), в котором число удерживаемых членов в подынтегральном выражении фиксировано и равно 45. Для параметров $e = 0.2$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.8$, $i = -\pi/6$, $\Omega = \pi/12$ показано, что сумма R_2^{**} дает относительную ошибку приближения 0.06, а R_4^{**} — близкую к нулю, хотя для R_5^{**} , R_6^{**} она несколько портится; R_n^{**} ($n \geq 10$) практически совпадает с интегралом (12). Это дает частичное обоснование удержанию первых четырех членов ряда (11) при $a/r_J = 0.8$.

Кривая равновесий для четвертого приближения представлена на рис. 5. Она отвечает параметру $a/r_J = 0.8$ и значению аргумента перицентра $\omega = \pi/2$, состоит из трех ветвей: ниспадающей, петлеобразной и зарождающейся петли. Ниспадающая ветвь присутствует в первом — четвертом приближениях и пересекает ось c_1 в точке $(0, 0.847)$. Область параметров, лежащая выше ниспадающей кривой, не содержит равновесий и отвечает ротационным движениям. Рассмотрим область ниже этой кривой. Петля начинает формироваться во втором приближении и полностью формируется только в третьем приближении, в четвертом же приближении можно наблюдать появление следующей петли. Для петель характерно наличие точек бифуркации. Для сформировавшейся петли точка имеет координаты $c_1^{(1)} = 0.382$, $e^{(1)} = 0.447$ (на рис. 5 точка бифуркации обозначена цифрой 1). Для формирующейся петли точка имеет координаты $c_1^{(2)} = 0.015$, $e^{(2)} = 0.672$ (на рис. 5 точка обозначена цифрой 2). При прохождении через точку бифуркации появляются дополнительно два устойчивых равновесия и два неустойчивых. Последние являются седлами и они не представлены на рис. 5, так как отвечают случаю $\omega \neq \pi/2$. Эти равновесия можно видеть на рис. 6. Устойчивые равновесия имеют координаты $(\pi/2, 0.74)$, $(\pi/2, 0.8)$ и $(\pi/2, 0.938)$.

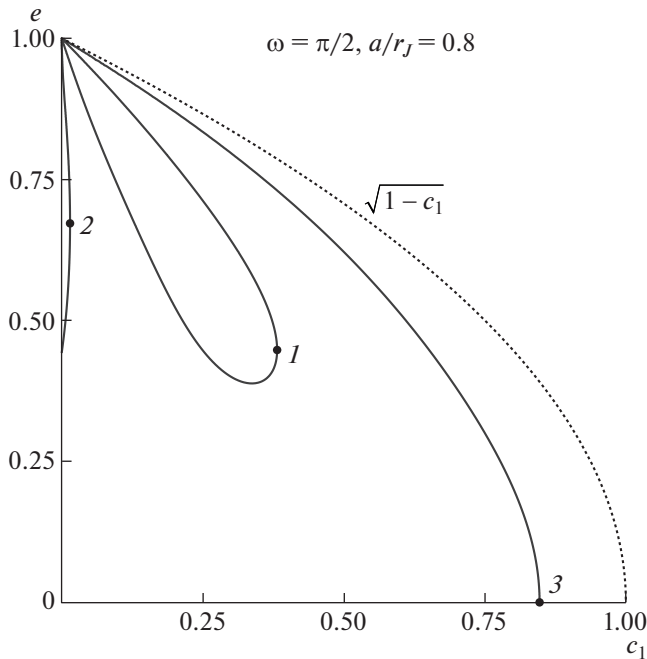


Рис. 5. Кривая равновесий $e(c_1)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Фазовый портрет колебаний изображен на рис. 6. Он состоит из четырех либрационных зон A, C, D, E и одной области ротационных движений B . Зоны отделены друг от друга пятью гетероклиническими траекториями. Одна из них соединяет между собой неустойчивые равновесия, принадлежащие интегральному многообразию $e = 0$. Эту кривую мы наблюдаем также в хилловском случае. Остальные гетероклинические траектории соединяют между собой два седла, проявивших себя только в третьем приближении.

Итак, в четвертом приближении по малому параметру a/r_J имеем зависимость фазового портрета колебаний от значений константы c_1 интеграла Лидова—Козаи. Так, при $0.382 < c_1 < 1$ фазовый портрет соответствует хилловскому приближению; в случае $0.015 < c_1 < 0.382$ его топология меняется за счет появления дополнительных равновесий фазовой точки и гетероклинических траекторий (рис. 6), а при $0 < c_1 < 0.015$ топология снова меняется — появляется пара дополнительных равновесий.

Достоверность четвертого приближения вытекает из сравнения фазовых портретов колебаний — при фиксированных значениях константы c_1 — с третьего по пятое приближение включительно. На рис. 7 представлен фазовый портрет пятого приближения.

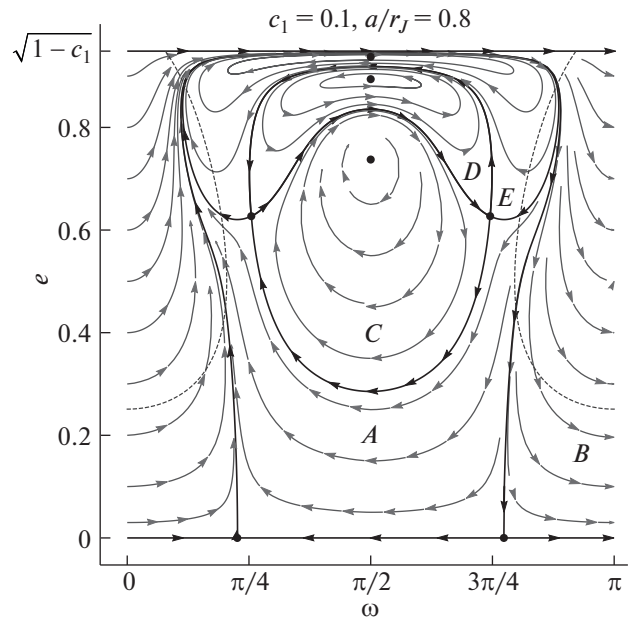


Рис. 6. Фазовый портрет четвертого приближения при $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$, пунктиром обозначены кривые неаналитичности.

Топология сохраняется при $c_1 = 0.1$. Она сохраняется и при других значениях c_1 , меняясь только в точках бифуркации равновесий (точки 1 и 2 на рис. 5).

Численный анализ показывает, что удержание членов ряда более высокого порядка малости ведет

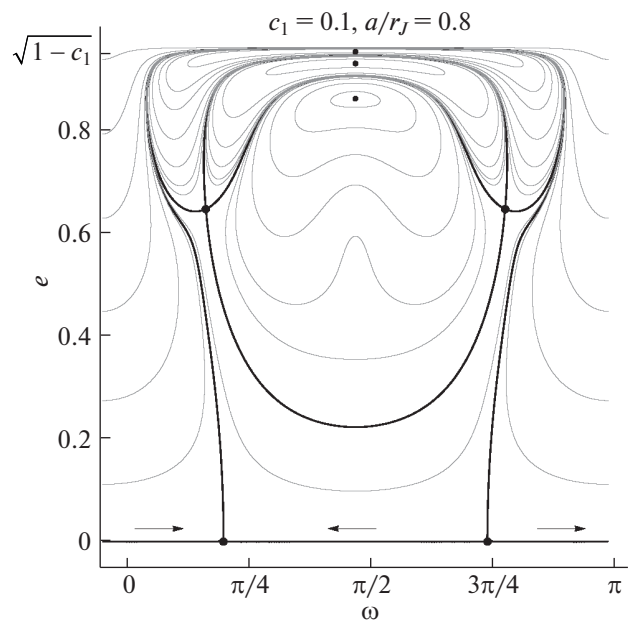


Рис. 7. Фазовый портрет пятого приближения при $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

к появлению дополнительных ветвей кривых равновесия в малой окрестности точки $e = \sqrt{1 - c_1}$, $\omega = 0$ (верхний левый угол фазового портрета) при малых c_1 , как следствие, меняется топология портрета в этой окрестности. Чем выше порядок малости добавляемых членов, тем меньше указанная окрестность по e . Случай $c_1 \approx 0$, $e \approx \sqrt{1 - c_1}$ отвечает полярным сильно вытянутым орбитам. Отметим, что при $e \rightarrow 1$ точность расчетов падает.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы, с использованием схемы Гаусса двукратного усреднения, пространственные оскулирующие эллиптические движения астероида под действием гравитационного притяжения от Солнца и гравитационного возмущения от внешней планеты (Юпитера). Получены явные аналитические выражения для дважды усредненной силовой функции в виде ряда Фурье и степенного ряда. Аналитическое выражение позволяет быстро и эффективно строить любое усечение усредненной силовой функции, исследовать поведение этой функции вдоль кривых неаналитичности. Численно показано, что на этих кривых расходящиеся ряды усредненной силовой функции являются асимптотическими по Пуанкаре. Поэтому они допускают аппроксимацию аналитическими функциями в виде суммы n первых слагаемых вплоть до $n = 40$.

Построены фазовые портреты колебаний во втором и четвертом приближениях. Показано, что второе приближение сохраняет все качественные выводы первого (хилловского) приближения. Показано также, что в четвертом приближении качественные выводы о фазовых колебаниях по эксцентриситету e и аргументу перигея ω хилловского случая сохраняются лишь при значениях константы интеграла Лидова–Козаи c_1 из интервала $(0.382, 1)$. В противном случае, когда $c_1 \in (0.015, 0.382)$, имеем существенное усложнение картины колебаний: в силу бифуркации равновесий появляются дополнительные устойчивые и неустойчивые равновесия и гетероклинные траектории, из которых формируются границы четырех областей либрации и одной области ротационных движений по e и ω . Дальнейшее уменьшение c_1 вплоть до нуля ведет к еще большей сложности фазового портрета: появляются новые положения равновесия в силу бифуркации равновесий, новые гетероклинические траектории.

Показано, что удержание членов ряда (11) более высокого порядка малости ведет к появлению дополнительных ветвей кривых равновесия в малой окрестности точки $e = \sqrt{1 - c_1}$, $\omega = 0$ при малых c_1 . Следовательно, четвертое приближение

усредненной силовой функции дает топологически обоснованную картину колебаний за исключением малой окрестности указанной точки при $c_1 \approx 0$.

Результаты этих исследований могут быть нарушены в очень высоких приближениях вдоль кривых неаналитичности. Поведение фазовых траекторий в окрестности кривых неаналитичности подробно исследовано в статье [5]. Седловые точки, не принадлежащие многообразию $e = 0$, впервые были получены в препринте [14].

АВТОРСКИЙ ВКЛАД

Постановка задачи, идея применения формулы Парсевала, аналитические преобразования — представление усредненной силовой функции в виде рядов, анализ интегральных многообразий и поведения силовой функции вдоль кривых неаналитичности — принадлежат П.С. Красильникову.

Громоздкие аналитические и численные вычисления, требующие использования программных продуктов, написание кодов численной верификации силовой функции, кодов построения бифуркационных диаграмм и фазовых портретов колебаний, выполнены А.В. Доброславским.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в Московском авиационном институте при финансовой поддержке РФФИ, проект № 22-21-00560.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // Искусственные спутники Земли. 1961. Т. 8. С. 5–45.
2. Von Zeipel H. Recherches sur le mouvement des petites planètes. Troisième partie. // Ark. Mat. Astron. Fys. 1917. V. 12. P. 1–89.
3. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // Astronomical Journal. 1962. V. 67. P. 591–598.
4. Brown E.W. The stellar Problem of Three Bodies I, II and III // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1936. V. 97. P. 56–61, P. 62–66, P. 116–127.
5. Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование // Космические исследования. 1981. Т. 19. С. 5–18.
6. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.
7. Аксенов Е.П. Осредненная ограниченная круговая задача трех тел // Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. 1967. Т. 21. С. 184–202.

8. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
10. Lidov M.L., Ziglin S.L. The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits. // *Celestial Mechanics*. 1974. V. 9. P. 151–173.
11. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
12. Моисеев Н.Д. О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек. // *Труды ГАИШ*. 1945. С. 100–117.
13. Емельянов Н.В. Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. Фрязино: Век 2, 2019. 575 с.
14. Васьковьяк М.А. Качественное исследование эволюции орбит в ограниченной круговой двукратно-осредненной задаче трех тел // *Препринт ИПМ*. 1979. № 106.

AVERAGED CIRCULAR SPATIAL RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM: INTERNAL CASE, NEW RESULTS

P. S. Krasilnikov^a and A. V. Dobroslavskiy^a

^a *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

We investigate the spatial restricted circular three-body problem in the nonresonant case. Namely, we apply Gaussian averaging to obtain averaged equations in terms of osculating elements and then investigate them. Keplerian ellipse with a focus in the main body (the Sun) is taken as an unperturbed orbit assuming the semi-major axis of the ellipse to be less than the radius of the orbit of the outer planet (internal problem). Using the Parseval formula we have derived the twice-averaged perturbed force function of the problem in the form of an explicit analytical series with coefficients expressed in terms of the Gauss and Clausen hypergeometric functions. An investigation of averaged force function along its curves of non-analyticity showed that the series are asymptotic by Poincaré. For a reduced system with one degree of freedom, phase portraits of oscillations in the plane of the Keplerian elements e, ω are constructed in the second and fourth approximations. It is shown the topology of the phase portrait is more complicated in fourth approximation than in first and second approximations provided that the constant c_1 of the Lidov–Kozai integral belongs to the interval $(0, 0.382)$.

Keywords: restricted spatial three body problem, averaging method, osculating elements