ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 65–68

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.27+519.2

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫМИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2023 г. С. В. Асташкин[1,2,3,4,*]

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым
Поступило 26.04.2023 г.
После доработки 27.05.2023 г.
Принято к публикации 30.05.2023 г.

Изучаются подпространства пространства Орлича L_M, порожденные независимыми (в вероятностном смысле) копиями функции $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$. В терминах растяжений f получена характеризация сильно вложенных подпространств такого типа, а также найдены условия, гарантирующие, что их единичный шар имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M. Выделен класс пространств Орлича, для всех подпространств которых, порожденных независимыми и одинаково распределенными функциями, эти свойства эквивалентны и могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Ключевые слова: независимые функции, сильно вложенное подпространство, равностепенная непрерывность норм, функция Орлича, пространство Орлича, индексы Матушевской–Орлича

DOI: 10.31857/S2686954323600246, **EDN:** SVONHN

§ **1.** Пусть M – функция Орлича, т.е. непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$. *Пространство Орлича* L_M [1, 2] состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda)dt \le 1\right\}.$$

Аналогично, если ψ – функция Орлича, то *пространство Орлича последовательностей* ℓ_ψ состоит из всех последовательностей $(a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_{\ell_\psi} := \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^\infty \psi(|a_k|/\lambda) \le 1\right\} < \infty.$$

Если $M(u) = u^p$ (соотв. $\psi(u) = u^p$), $p \ge 1$, то $L_M = L^p$ (соотв. $\ell_\psi = \ell^p$). При этом определение пространства L_M (соотв. ℓ_ψ) зависит (с точностью до эквивалентности норм) лишь от поведения функции M при больших значениях аргумента (соотв. функции ψ при малых значениях аргумента).

Пространство L_M (соотв. ℓ_ψ) сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(2u) \le CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u (соотв. $\psi(2u) \le C\psi(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно малых u). В этом случае пишем $M \in \Delta_2^\infty$ (соотв. $\psi \in \Delta_2^0$).

Для каждой функции Орлича M определим *индексы Матушевской–Орлича в бесконечности*:

$$\alpha_M^\infty := \sup\left\{p : \sup_{t,s\ge 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} < \infty\right\},$$
$$\beta_M^\infty := \inf\left\{p : \inf_{t,s\ge 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} > 0\right\}.$$

Как нетрудно проверить, $1 \le \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty \le \infty$.

Пусть ψ – функция Орлича, $\psi \in \Delta_2^0$. Определим следующие (непустые компактные) подмножества пространства $C[0,1]$:

$$E_{\psi,1}^0 = \overline{\{\psi(st)/\psi(s) : 0 < s < 1\}}, \quad C_{\psi,1}^0 = \overline{conv E_{\psi,1}^0},$$

где conv U – выпуклая оболочка U, а замыкание берется в $C[0,1]$. Согласно известной теореме

[1] *Самарский национальный исследовательский университет, Самара Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[4] *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*
**E-mail: astash@ssau.ru*

Й. Линденштраусса и Л. Цафрири [3], теорема 4.a.8, пространство Орлича ℓ_φ изоморфно некоторому подпространству пространства ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^0_{\psi,1}$. Определим также *индексы Матушевской—Орлича функции* ψ *в нуле*:

$$\alpha^0_\psi := \sup\left\{p : \sup_{0<t,s\le 1} \frac{\psi(st)}{s^p\psi(t)} < \infty\right\},$$

$$\beta^0_\psi := \inf\left\{p : \inf_{0<t,s\le 1} \frac{\psi(st)}{s^p\psi(t)} > 0\right\}.$$

Тогда $1 \le \alpha^0_\psi \le \beta^0_\psi \le \infty$, и пространство ℓ^p (c_0, если $p = \infty$) изоморфно некоторому подпространству пространства Орлича ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $p \in [\alpha^0_\psi, \beta^0_\psi]$ [3], теорема 4.a.9.

Говорят, что (замкнутое линейное) подпространство H пространства Орлича L_M *сильно вложено* в L_M, если сходимость в L_M-норме и по мере на H эквивалентны[1]. В частности, в силу неравенства Хинчина [4], глава V, теорема 8.4, функции Радемахера $r_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^k\pi t)$, $k \in N$, $t \in [0,1]$, порождают сильно вложенное подпространство в L_M, если $M \in \Delta_2^\infty$.

Множество $K \subset L_M$ имеет *равностепенно непрерывные нормы* в пространстве Орлича L_M, если

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{mes(E)<\delta} \sup_{x\in K} \|x\chi_E\|_{L_M} = 0.$$

Нетрудно показать, что подпространство H сильно вложено в L_M, если его единичный шар $B_H := \{x \in H : \|x\|_{L_M} \le 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места (см., например, [5, пример 2]).

Главная цель этой заметки состоит в изучении введенных свойств для подпространств пространства Орлича L_M, порожденных независимыми одинаково распределенными функциями. Изучению таких подпространств посвящена обширная литература. Ж. Бретаноль (J. Bretagnolle) и Д. Дакунья-Кастель (D. Dacunha-Castelle) [6—8] получили их описание в случае, когда $L_M = L^p$. Позднее эти исследования были продолжены в работах М.Ш. Бравермана [9—11], а также С.В. Асташкина, Д.В. Занина и Ф.А. Сукочева [12—14].

§ 2. Измеримые на $[0,1]$ функции x и y называются *равноизмеримыми*, если

$$\operatorname{mes}\{t : |x(t)| > \tau\} = \operatorname{mes}\{t : |y(t)| > \tau\} \quad \text{для каждого} \quad \tau > 0$$

(mes — мера Лебега на $[0,1]$).

Всюду далее M — функция Орлича, $M \in \Delta_2^\infty$, L_M — пространство Орлича, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых (в вероятностном смысле) функций, равноизмеримых с некоторой функцией $f \in L_M$, $\int_0^1 f_k(t)dt = 0$, $k = 1,2,\ldots$. Кроме того, через $[f_k]$ и B_f будут обозначаться соответственно подпространство L_M, порожденное последовательностью $\{f_k\}$, и единичный замкнутый шар этого подпространства.

Из результатов работы [15] следует, что последовательность $\{f_k\}$ эквивалентна в L_M каноническому единичному базису $\{e_k\}$ в пространстве Орлича последовательностей ℓ_ψ (обозначаем это как $[f_k] \approx \ell_\psi$), где функция ψ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{\psi^{-1}(1/n)} \le \|\sigma_n f\|_{L_M} + \left(n\int_{1/n}^{1} f(s)^2 ds\right)^{1/2} \le \le \frac{C}{\psi^{-1}(1/n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь σ_n — оператор растяжения, $\sigma_n x(t) := x(t/n)\chi_{(0,1)}(t)$, $0 \le t \le 1$, и константа $C > 0$ не зависит от n. Напомним, что оператор σ_n ограничен в каждом пространстве Орлича L_M и $\|\sigma_n\|_{L_M\to L_M} \le n$, $n \in \mathbb{N}$ [16, теорема II.4.4].

Следующие два утверждения показывают, что введенные в § 1 свойства подпространства $[f_k]$ пространства Орлича L_M при определенных условиях могут быть охарактеризованы в терминах растяжений функции $f \in L_M$.

П р е д л о ж е н и е 1. (i) Если $\lim_{t\to\infty} M(t)/t = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_M} \le C\|\sigma_n f\|_{L^1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

то подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M.

(ii) Наоборот, если подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M и $[f_k] \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha^0_\psi \le \beta^0_\psi < 2$, то имеет место соотношение (1).

П р е д л о ж е н и е 2. Рассмотрим следующие условия:

(a) шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M;

(b) существует функция Орлича $N \in \Delta_2^\infty$ такая, что $\lim_{u\to\infty} \dfrac{N(u)}{M(u)} = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_N} \le C\|\sigma_n f\|_{L_M}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

[1] В случае, когда $M(u) = u^p$, такое подпространство называют также $\Lambda(p)$-пространством.

Имеет место импликация $(b) \Rightarrow (a)$. Если дополнительно известно, что $[f_k]_{L_M} \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha_\psi^0 \le \beta_\psi^0 < 2$, то справедлива также и обратная импликация $(a) \Rightarrow (b)$.

Применяя эти предложения вместе с результатами работ [17] и [13], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$ *и* $1 < \alpha_\psi^0 \le \beta_\psi^0 < 2$. *Предположим, что подпространство* $[f_k]$ *сильно вложено в* L_M. *Тогда, если существует функция* $\varphi \in C_{\psi,1}^0$ *такая, что для некоторого* $C > 0$ *и всех* $s,t \in [0,1]$

$$\psi(st) \le C\psi(s)\varphi(t), \tag{3}$$

то шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M.

В частности, утверждение теоремы 1 справедливо при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

(a) $\psi(st) \le C\psi(s)\psi(t)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s,t \in [0,1]$;

(b) $\psi(st) \le Ct^{\alpha_\psi^0}\psi(s)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s,t \in [0,1]$;

(c) $t^{-1/p} \in L_M$ для некоторого $p \in (0,\alpha_\psi^0)$.

В случае, когда $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$, рассматриваемые свойства подпространств могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Теорема 2. *Пусть* M *– такая функция Орлича, что* $1 < \alpha_M^\infty \le \beta_M^\infty < 2$ *и* $t^{-1/\beta_M^\infty} \not\in L_M$. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *шар* B_f *имеет равностепенно непрерывные нормы в* L_M;

(b) *подпространство* $[f_k]$ *сильно вложено в* L_M;

(c) $\alpha_\psi^0 > \beta_M^\infty$, *где функция* ψ *– такова, что* $[f_k] \approx \ell_\psi$.

В частности, так как $\beta_M^\infty = p$, если $M(t) = t^p$, получаем

Следствие 1. Если $1 < p < 2$, то $[f_k]_{L^p}$ – $\Lambda(p)$-пространство $\Leftrightarrow$ $[f_k]_{L^p}$ – $\Lambda(q)$-пространство для некоторого $q > p \Leftrightarrow \alpha_\psi^0 > p$, где $[f_k]_{L^p} \approx \ell_\psi$.

Последний результат показывает, что в гильбертовом случае, т.е. когда $M(t) = t^2$, ситуация сильно упрощается.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^2$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *– последовательность независимых функций, равноизмеримых с* f, $\int_0^1 f_k(t)dt = 0$, $k = 1,2,\ldots$ *Тогда единичный шар подпространства* $[f_k]_{L^2}$ *имеет равностепенно непрерывные нормы в* L^2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
2. *Rao M.M., Ren Z.D.* Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
3. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 615 с. [перевод с английского Zygmund A. Trigonometric series. V. I. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1959.]
5. *Astashkin S.*V. $\Lambda(p)$-spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 5174–5198.
6. *Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D.* Mesures aléatoires et espaces d'Orlicz (French) // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B. 1967, V. 264. P. A877–A880.
7. *Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D.* Application de l'étude de certaines formes l'étude aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1969. V. 2. № 5. P. 437–480.
8. *Dacunha-Castelle D.* Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz // Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975: Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. Nos. X et XI, 21 pp. Centre Math., мole Polytech., Paris, 1975.
9. *Braverman M.Sh.* On some moment conditions for sums of independent random variables // Probab. Math. Statist. 1993. V. 14. № 1 P. 45–56.
10. *Braverman M.Sh.* Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
11. *Braverman M.Sh.* Independent random variables in Lorentz spaces // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. № 1. P. 79–87.
12. *Astashkin S., Sukochev F.* Orlicz sequence spaces spanned by identically distributed independent random variables in L_p-spaces // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 413. № 1. P. 1–19.
13. *Astashkin S., Sukochev F., Zanin D.* On uniqueness of distribution of a random variable whose independent copies span a subspace in L^p // Stud. Math. 2015. V. 230. № 1. P. 41–57.
14. *Astashkin S., Sukochev F., Zanin D.* The distribution of a random variable whose independent copies span ℓ_M is

unique // Rev. Mat. Complut. 2022. V. 35. № 3. P. 815–834.

15. *Johnson W., Schechtman G.,* Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 789–808.

16. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

17. *Astashkin S.V.* On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // Comment. Math. 2016. V. 56. № 1. P. 29–44.

ON SUBSPACES OF AN ORLICZ SPACE SPANNED BY INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED FUNCTIONS

S. V. Astashkin[a,b,c,d]

[a] *Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[d] *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Subspaces of an Orlicz space L_M generated by probabilistically independent copies of a function $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$, are studied. In terms of dilations of *f*, we get a characterization of strongly embedded subspaces of this type and obtain conditions that guarantee that the unit ball of such a subspace has equi-absolutely continuous norms in L_M. A class of Orlicz spaces such that for all subspaces generated by independent identically distributed functions these properties are equivalent and can be characterized by Matuszewska–Orlicz indices is determined.

Keywords: independent functions, strongly embedded subspace, equi-absolute continuity of norms, Orlicz function, Orlicz space, Matuszewska–Orlicz indices