

УДК 531.38

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 02.02.2023 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принято к публикации 05.05.2023 г.

Предложен обобщенный метод поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия для склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На ее движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примере конкретной колебательной механической модели с сухим и вязким трением продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: механическая система, колебания, амплитуда, управление, оптимизация, трение

DOI: 10.31857/S2686954323600052, **EDN:** PKNCIY

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В связи с развитием мобильных робототехнических устройств значительное внимание исследователей уделяется разработке теории механических систем с дефицитом управления [1–4]. Для синтеза управления такими системами, как правило, применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина [5, 6], разработанный для весьма общего класса динамических систем. Вместе с тем системы с одной, не снабженной приводом, степенью свободы встречаются повсеместно и чаще всего, когда имеется необходимость опираться при движении на окружающие предметы. Здесь привлекательным представляется оптимальное использование маятниковых элементов движений, возникающих из-за воздействия естественных сил, таких как, например, сила тяжести. Для подобных систем возможно применение более простых по сравнению принципом максимума методов, основанных на вычислении первой вариации функционала [7–9]. В работах [10, 11] даны уточненные формулировки и упрощенные доказательства результатов, полученных в [8, 9] для консервативных систем. Ниже изучаются неконсервативные системы с одной дефицитной степенью

свободы, и доказывается, что представленные в [10, 11] методы работают и в этом случае.

Рассматривается склерономная голономная механическая система с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n — число степеней свободы системы, q_i — обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости, а положительно определенная симметричная матрица (a_{ij}) зависит от обобщенных координат. Уравнения движения системы запишем в форме уравнений Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

в которых t — время, Q_i — обобщенные силы. В отличие от работ [8–11] здесь обобщенные силы могут содержать компоненты, связанные с наличием трения в системе и зависящие от обобщенных скоростей. Пусть первая обобщенная координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщенные силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой x : $q_1 = x$. Представим обобщенную силу Q_1 в виде суммы

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: golubev@keldysh.ru

$$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \dots, q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, x, q_2, \dots, q_n), \quad (1.2)$$

где позиционная сила F , зависит только от x и других обобщенных координат. Сила трения R препятствует изменению координаты x и зависит как от обобщенных скоростей, так и от обобщенных координат.

Пусть первыми в наборе $(q_2, \dots, q_n)$ идут $s-1$ координат, от которых обобщенная сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат не входят явно в выражение для F . Все координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причем $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ — вектор координат, непосредственно влияющих на значение F , $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ — вектор координат, от которых F явно не зависит, так что, $\partial F / \partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где

$$T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,s+k} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{s+k,s+r} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

Следуя работам [8–11], в системе (1.1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного возрастания: $\dot{x} > 0$ и обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$, вектор управляющих координат и их производных по координате x . Тогда $t = t(x)$, а уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] - p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

где

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y})}{\partial x} - (t')^2 R(\dot{x}, x, \mathbf{y}),$$

причем $t'(x) = dt/dx = \dot{x}^{-1}$. Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\begin{aligned} |u_j^m| \leq u_j(x) \leq u_j^M, & \quad |w_k^m| \leq w_k(x) \leq w_k^M, \\ |\dot{u}_j^m| \leq \dot{u}_j(x) \leq \dot{u}_j^M, & \quad |\dot{w}_k^m| \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M, \\ j = \overline{1, s-1}, & \quad k = \overline{1, n-s}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы $Q_2, \dots, Q_n$ вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ реализовались. Предположим, что это сделано, так что ограничения (1.5) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.6)$$

где x_0 — начальное значение независимой переменной x , $\lambda(x, \mathbf{y})$ — любая функция. Уравнение (1.6) эквивалентно уравнению (1.4). Заметим, что если $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, то уравнение (1.4) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве λ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Тогда равенство (1.6) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} [\dot{x}^2 f(x, \mathbf{y}) \lambda(x, \mathbf{y})] \Big|_{x_0}^x = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \\ & = \frac{1}{2} [f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})] \Big|_{x_0}^x, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned}
& f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \\
& = a_{11}\dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k, \\
& \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \\
& = f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right).
\end{aligned} \quad (1.9)$$

В том случае, когда $\dot{x} = \dot{x}(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.8) становится несобственным из-за того, что при $\dot{x} = 0$ значения $t' = 1/\dot{x}$, $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}}/\dot{x}$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}}/\dot{x}$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.8) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ — следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0. \quad (1.11)$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

В работах [8, 9] с помощью замены $\xi = -x$ показано, что участок, где $\dot{x} < 0$ (монотонное убывание координаты x) вполне аналогичен участку монотонного возрастания этой координаты с той лишь разницей, что вместо максимума (минимума) функционала J надо искать его минимум (максимум).

2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСКАЧИВАНИЕ (УСПОКОЕНИЕ) КОЛЕБАНИЙ

Справедливы следующие теоремы (их формулировки, по существу, совпадают с формулировками работы [11]). Для удобства применения их в

рассмотренном ниже примере приведем здесь эти формулировки.

Теорема 1. (Принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.3) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Теорема 2. (Принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.3) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$ $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_m(x_1) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

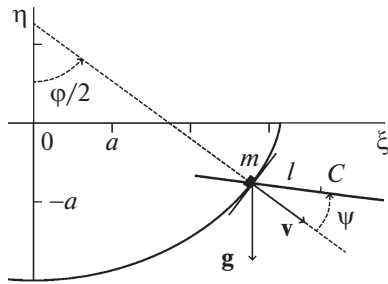


Рис. 1. Колебательная система.

Доказательства приведенных теорем дословно совпадают с соответствующими доказательствами, приведенными в работе [11], поскольку функция f от трения явно не зависит, а влияние трения сказывается лишь на функции p , которая в формуле (1.7) входит в выражение для экспоненты и поэтому на процесс оптимизации не влияет.

Следствие. Правило (синтез) выбора оптимального управления раскачиванием не зависит от наличия трения в системе. От трения зависит лишь результат применения этого правила в каждом конкретном случае.

Доказательство. Поиск оптимального управления осуществляется в соответствии с формулами (2.1)–(2.4), в которые информация о трении явным образом не входит.

Замечание 1. Трение влияет на зависимость функций управления от времени.

Замечание 2. Приведенные теоремы справедливы в предположении, что функция $f \neq 0$. По существу, она представляет собой коэффициент при старшей производной в уравнении (1.4). Обращение ее в нуль свидетельствует о том, что при выбранном законе управления для заданных параметров системы происходит вырождение. Часто вырождение происходит потому, что динамические параметры управляющих частей системы превосходят динамические характеристики управляемой ее части. Тогда соответствующей настройкой параметров системы будет возможно устранить указанную неприятность. При невозможности настройки параметров вырождение также можно исключить переходом к классу кусочно-постоянных функций, разбивая процесс интегрирования на отрезки с сохранением непрерывности фазовых координат. На каждом таком отрезке производные от управляющих функций будут равны нулю, и будет выполнено $f = a_{11} > 0$. Таким образом, можно будет построить последовательность кусочно постоянных функций, дающую приближенное представление об оптимальном решении.

3. ПРИМЕР. МАЯТНИК С ТОЧКОЙ ПОДВЕСА НА ПЕРЕВЕРНУТОЙ ЦИКЛОИДЕ

Твердое тело, имеющее массу m и центральный момент инерции I_b , движется плоскопараллельно с сухим и вязким трением в вертикальной плоскости так, что его центр масс скользит по перевернутой циклоиде (брахистохроне). Тело вращается, отслеживая касательную к траектории центра масс. К этому телу в его центре масс подвешен стержень, имеющий массу M и центральный момент инерции I_r . Относительно тела стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить тело m двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний в окрестности нижней точки циклоиды. Обозначим l расстояние от центра масс C стержня до точки подвеса. Пусть $\mathbf{v}$ — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а ψ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и стержнем. Угол ψ примем в качестве управления с целью раскачивания системы (рис. 1).

Для описания движения введем абсолютную право-ориентированную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\eta$ направим вертикально вверх. Ось $O\xi$ расположим в плоскости движения. Тогда ось $O\zeta$ будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin \varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos \varphi), \\ \zeta = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где $a > 0$ — постоянная, а φ — обобщенная координата, задающая положение точки m на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Ее внешняя нормаль $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, 0)$ имеет координаты

$$v_\xi = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_\eta = -\cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ образует с отрицательным направлением оси $O\eta$ угол $\varphi/2$.

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(A_\psi \dot{\varphi} + B_\psi \dot{\psi}) + C_\psi = -Mgl \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}(A_\varphi \dot{\varphi} + B_\varphi \dot{\psi}) + C_\varphi = \\ = -(m + M)ga \sin \varphi - \frac{Mgl}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + R, \quad (3.1)$$

где

$$A_\psi = 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2},$$

$$\begin{aligned}
B_\psi &= Ml^2 + I_r, \\
C_\psi &= 2Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi. \\
\begin{cases} A_\varphi = 4(m+M)a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \\ + 2Mla\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2} + \frac{I_b}{4}, \\ B_\varphi = 2Mla\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + Ml^2 + I_r, \\ C_\varphi = \left[(m+M)a^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \right. \\ \left. + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\cos\psi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right], \end{cases} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Q_ψ – обобщенная сила, управляющая углом ψ , R – обобщенная сила, учитывающая воздействие сухого и вязкого трения.

Следует отметить, что коэффициенты (3.2) при $I_b = 0$ отличаются от соответствующих неправильных коэффициентов, полученных в статье [11], а также в связанной с ней переводной версией журнала «Computer and Systems science international» из-за неточности, допущенной при выводе уравнений движения. В настоящей работе эта погрешность исправлена. Ошибка ни на что не повлияла, так как цель примера в упомянутых работах состояла в лишь том, чтобы продемонстрировать технику применения теорем в общем случае сколько-нибудь сложной системы дифференциальных уравнений.

Из уравнений (3.1) видно, что при $Q_\psi = 0$ и отсутствии трения система имеет положения равновесия, когда

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad \sin\varphi = 0. \quad (3.3)$$

В допустимых пределах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ условиям (3.3) соответствуют значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. Очевидно, что при $\varphi = 0$ достигается нижнее устойчивое положение равновесия (нулевое положение равновесия), а при $\varphi = \pm\pi$ достигаются два верхних неустойчивых положения равновесия по краям циклоиды. Первое условие (3.3) означает, что в положениях равновесия стержень должен быть направлен вертикально вниз.

Перейдем к анализу оптимальных законов раскачивания маятника. В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол ψ . Для простоты анализа не будем накладывать никаких ограничений на величину и скорость изменения угла ψ . В соответствии с уравнением (1.4) получим $f = A_\varphi + B_\varphi\psi'$, где ψ' – производная по φ . Знак множителя λ , вычисляемого по формуле (1.7), совпадает со знаком функции f .

Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла ψ . Оптимизируемая по величине ψ функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\begin{aligned}
\chi(x, y)F(x, u) &= \Phi = \\
&= -\chi\left[(m+M)ga\sin\varphi + \frac{Mgl}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\right]. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Экстремальные значения функции Φ достигаются при

$$\psi = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \rightarrow \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$\begin{aligned}
f &= A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = \\
&= Mal\left[2b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \pm \sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{I_b}{4}, \quad (3.5) \\
b &= \frac{2(M+m)a}{Ml}.
\end{aligned}$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\left[2b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \pm \sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} = \\
&= \min\left(b + b\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = b - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Если принять

$$\frac{I_b}{Mal} > 2(\sqrt{4b^2 + 1} - 2b), \quad (3.6)$$

то коэффициент $\chi > 0$. Воспользовавшись рекомендацией замечания 2, будем в дальнейшем считать условие (3.6) выполненным.

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ , а $\varphi_1 > 0$ – соответственно правая граница, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (2.1) видно, что наилучший способ достичь максимума положительного полуколебания состоит в применении правила

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.7)$$

Геометрический смысл полученного закона управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен к вертикальной оси и составлять с горизонтальной осью развернутый угол, обеспечивая максимальное значение силового момента.

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума

отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.8)$$

Геометрический смысл закона управления (3.8) состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярным к вертикальной оси и сонаправленным с горизонтальной осью, обеспечивая минимальное значение силового момента.

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.8); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулу (3.7), и так далее. Таким образом, при достижении экстремальных отклонений маятника стержень должен мгновенно поворачиваться на развернутый угол. Естественно, что в реальности такой скачок по координате невозможен, и его следует рассматривать как предел, когда время переходного процесса стремится к нулю.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.7); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулу (3.8), и так далее.

После того, как зависимость $\psi(\varphi)$ установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым, и его можно решать различными известными методами [12]. После определения функции $\varphi(t)$ становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу Q_ψ , обеспечивающую требуемое изменение угла ψ .

Если $\dot{\varphi} \neq 0$, то для законов управления (3.7), (3.8) сила трения может быть представлена формулой

$$R = -2a(M + m) \times \\ \times [(a\dot{\varphi}^2 + g)f_r \operatorname{sgn} \dot{\varphi} + 2ak_r\dot{\varphi}] \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.9)$$

в которой f_r и k_r — коэффициенты сухого трения скольжения и вязкого трения соответственно. Тем самым принимается во внимание трение лишь между телом m и циклоидой, а в шарнире стержня трение должно быть компенсировано управляющей силой Q_ψ . Заметим, что сухое трение скольжения квадратично зависит от $\dot{\varphi}$ из-за влияния центробежной силы. Если $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, то на систему будет действовать сухое трение покоя.

Наличие сухого трения осложняет картину положений равновесия. Если управления нет, то в окрестности точки $\varphi = 0$ возникает множество положений равновесия (зона застоя) из-за дей-

ствия силы трения покоя. Тогда условия равновесия в окрестности $\varphi = 0$ принимают вид

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad -f_r \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq f_r. \quad (3.10)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Уравнения (3.1) с учетом формулы (3.9) и раскачивающих законов управления (3.7) и (3.8) можно представить в виде:

$$\ddot{\varphi}A - \dot{\varphi}^2B = \\ = \begin{cases} \frac{g}{2a}(1 - b \sin \varphi) - \\ - \frac{b}{2}(1 + \cos \varphi) \left[f_r \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a} \right) + 2k_r\dot{\varphi} \right], & \dot{\varphi} > 0, \\ - \frac{g}{2a}(1 + b \sin \varphi) + \\ + \frac{b}{2}(1 + \cos \varphi) \left[f_r \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a} \right) - 2k_r\dot{\varphi} \right], & \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где

$$A = \begin{cases} b(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\varphi} > 0, \\ b(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \\ B = \begin{cases} \frac{1}{2}(b \sin \varphi + \cos \varphi), & \dot{\varphi} > 0, \\ \frac{1}{2}(b \sin \varphi - \cos \varphi), & \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Когда оказывается, что $\dot{\varphi} = 0$, то это означает, что достигнуто максимальное значение отклонения тела m от нулевого положения равновесия, и в этот момент в формулах (4.1) происходит альтернативное переключение знаков. В начальный момент t_0 времени задается $\dot{\varphi} = \varphi = 0$, а управление выбирается так, как если бы $\dot{\varphi}(t_0 - 0) < 0$.

Учет трения покоя выполняется по формуле

$$\dot{\varphi} = 0 \quad \text{при} \\ \begin{cases} \dot{\varphi} = 0, & \varphi > 0, & |1 + b \sin \varphi| < bf_r(1 + \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} = 0, & \varphi \leq 0, & |1 - b \sin \varphi| < bf_r(1 + \cos \varphi), \end{cases} \quad (4.2)$$

из которой, в частности, следует, что если $2bf_r > 1$, то тело m вообще не сможет начать движение.

Представим центральный момент инерции тела в виде $I_b = mr^2$, где ρ — радиус инерции тела. Дополнительно введем безразмерные параметры системы:

$$M = \mu m, \quad l = \sigma a, \quad \rho = \varepsilon a, \\ b = \frac{2(\mu + 1)}{\mu \sigma}, \quad \frac{I_b}{Mal} = \frac{\varepsilon^2}{\mu \sigma}. \quad (4.3)$$

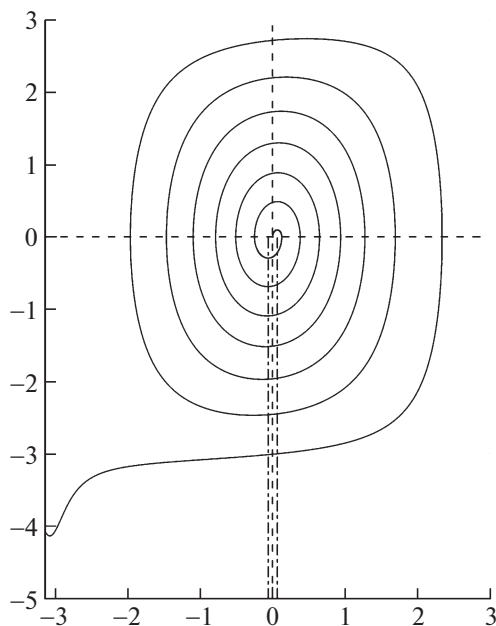


Рис. 2. Фазовый портрет при $f_r = k_r = 0$.

На рис. 2 показан фазовый портрет системы для следующего набора независимых параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0,25$, $\varepsilon = \sqrt{0,5}$, $f_r = 0$, $k_r = 0$. На всех фазовых портретах, представленных ниже, по горизонтальной оси откладываются значения параметра φ , а по вертикальной оси значения скорости $\dot{\varphi}$. Пунктиром выделены оси, проходящие через начало координат, а также положения равновесия при отклоненном стержне от вертикали, соответствующие значениям $\varphi_1 = -\varphi_3 = \arcsin(1/b) \approx 0,0625$. Видно, что описанный в п. 3 алгоритм раскачивания системы успешно справляется с задачей увеличения амплитуды колебаний вплоть до достижения предельно возможных значений угла φ .

На рис. 3 представлен фазовый портрет системы, для которого по сравнению с параметрами, принятыми для рис. 2, изменен только коэффициент вязкого трения: $k_r = 0,1$. Видим, что даже сравнительно небольшое вязкое трение препятствует неограниченному увеличению амплитуды, уменьшая приращения амплитуды на каждом следующем цикле управления.

При выполнении расчетов, связанных с оценкой влияния сухого трения, необходимо учитывать трение покоя. В соответствии с формулами (4.2) движение тела m из нулевого положения равновесия может начаться вследствие качания стержня лишь тогда, когда выполнено соотношение $2bf_r < 1$. Если взять параметры, принятые выше для оценки влияния вязкого трения: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0,25$, $\varepsilon = \sqrt{0,5}$, то получим огра-

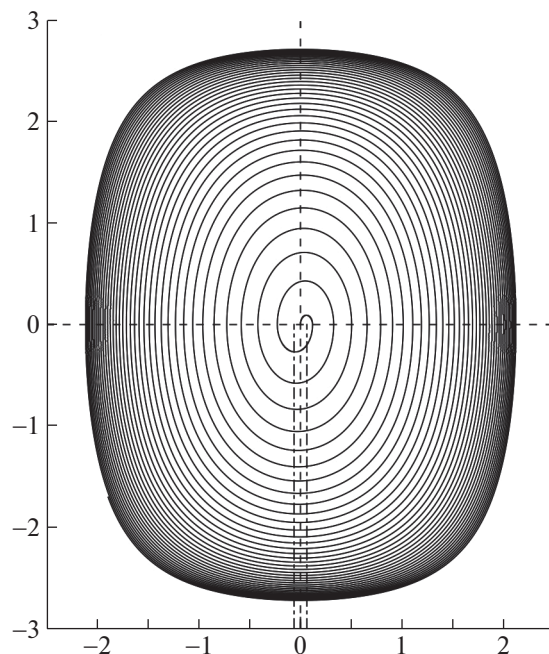


Рис. 3. Вязкое трение ($f_r = 0$, $k_r = 0,1$).

ничение $\sigma > 8f_r$. Таким образом, при $\sigma = 0,25$ должно быть $f_r < 0,03125$. На рис. 4 показан фазовый портрет системы для значений $f_r = 0,025$, $k_r = 0$. Остальные параметры соответствуют ранее рассмотренным вариантам. При сравнении с рис. 2, 3 видно, что наличие сухого трения приводит к тому, что амплитуда колебаний увеличивается медленнее, и приращения амплитуды не уменьшаются от цикла к циклу управления, указывая на отсутствие предельно большой конечной амплитуды. Следовательно, в кинематически допустимых пределах маятник с таким трением можно раскачать до любой заданной амплитуды. Однако процесс раскачивания будет замедленным. Ускорить процесс раскачивания под действием влияния сухого трения можно, увеличивая длину стержня.

Если трение отсутствует, то в силу консервативности системы прекращение управления влечет сохранение амплитуды колебаний. В присутствии трения такой способ сохранения амплитуды невозможен. Вместе с тем трение можно использовать для полупассивного поддержания амплитуды колебаний в некотором диапазоне значений. На рис. 5 изображена диаграмма Пуанкаре системы, соответствующая параметрам $\sigma = 0,25$, $f_r = 0,025$, $k_r = 0$. На ней по горизонтальной и по вертикальной осям откладываются соответственно предыдущие и последующие значения амплитуды. Логика поддержания заданной амплитуды, равной 0,5, состояла в том, что при превышении значения 0,5 модуля амплитуды в

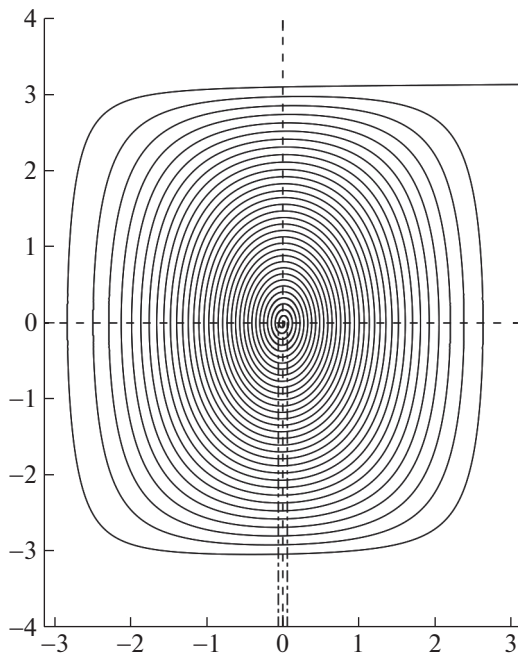


Рис. 4. Сухое трение ($f_r = 0.025$, $k_r = 0$).

моменты достижения значений скорости $\dot{\varphi} = 0$ оптимальное увеличение амплитуды прекращалось, стержень приводился в вертикальное положение вдоль отрицательного направления оси $O\eta$ ($\psi + \varphi/2 = 0$), и в таком положении оставался до того момента, когда амплитуда становилась меньше значения 0.5. После этого снова возобновлялся оптимальный разгон маятника. На рисунке видно, что сначала происходит монотонное увеличение амплитуды, а затем включается описанная выше логика поддержания амплитуды в районе значения 0.5. Участки диаграммы, расположенные ниже биссектрисы координатного угла, соответствуют торможению, а участки диаграммы, расположенные выше — разгону. Диапазон получающихся амплитуд приблизительно составляет 0.1. Регулировка ширины реализуемого диапазона значений амплитуды может быть обеспечена посредством изменения длины стержня.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены лаконичные необходимые условия оптимального управления колебаниями для голономных механических систем с сухим и вязким трением и с дефицитом управления по одной степени свободы. Применение алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (2.1)–(2.4), предполагает учет информации о достижении экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукоса колебания. Условия оптимальности (2.1)–(2.4) не

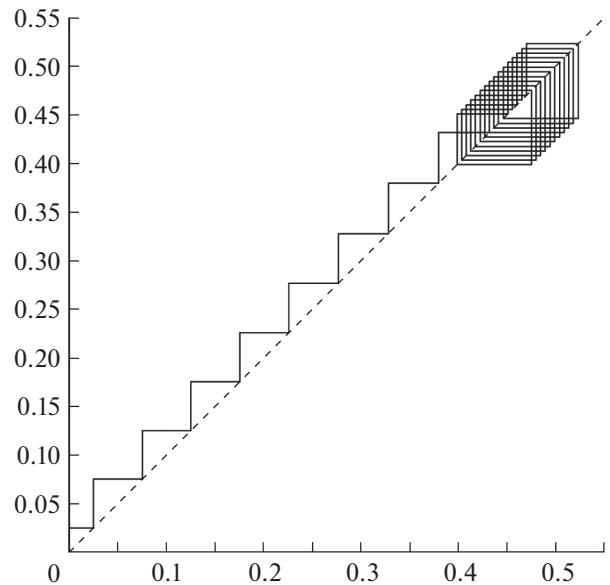


Рис. 5. Управление по амплитуде.

содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [5]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на правило выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этого правила в каждом конкретном случае. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. Эти условия упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. Рассмотренный в работе пример иллюстрирует особенности применения предложенного метода в системах с трением и демонстрирует технику учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое Кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности ее заданного значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Перевод с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
2. *Tad McGeer.* Passive Dynamic Walking. *International Journal of Robotics Research.* April, 1990. V. 9. № 2. P. 62–82, April, 1990.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
4. *Климина Л.А., Формальский А.М.* Об оптимальном раскачивании качелей стоящим на них человеком // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 6. С. 85–94. ISSN: 0002-3388. <https://doi.org/10.31857/S0002338822060117>
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
6. *Чернуоско Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 384 с.
7. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. М.: Гос. Изд-во технико-теор. лит-ры. (Успехи физических наук. Т. 63. Вып. 1а). 1957. С. 5–32.
8. *Голубев Ю.Ф.* Метод оптимального управления колебаниями механических систем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2021. № 33. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>, <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>
9. *Golubev Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems. // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. № 11. P. 2596–2607. ISSN: 1995-0802. <https://doi.org/10.1134/S199508022111010X>
10. *Голубев Ю.Ф.* Оптимизация колебаний механических систем // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* 2022. Т. 502. С. 52–57. ISSN (PRINT): 2686-9543. <https://doi.org/10.31857/S2686954322010040>
11. *Голубев Ю.Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 4. С. 22–30. ISSN: 0002-3388. <https://doi.org/10.31857/S0002338822040084>
12. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр., обновл. М.: URSS. 2016. 512 с. ISBN 978-5-382-01622-1

OPTIMIZATION OF OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH FRICTION

Yu. F. Golubev^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A generalized method for finding optimal control of the amplitude of one-dimensional oscillations in the vicinity of the equilibrium position for a scleronomous multidimensional mechanical system with friction is proposed. The oscillatory degree of freedom of the system does not lend itself to direct control. Its movement is influenced by other, directly controlled degrees of freedom. They are being chosen as the control functions. The number of directly controlled coordinates can include both positional and cyclic coordinates. The method does not use conjugate variables in the sense of the Pontryagin's maximum principle and does not increase the dimension of the original system of differential equations of motion. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the example of a specific oscillatory mechanical model with dry and viscous friction.

Keywords: mechanical system, oscillations, amplitude, control, optimization, friction