

УДК 517.957

ОБ АСИМПТОТИКЕ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С МЕЛКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

© 2023 г. К. А. Бекмаганбетов^{1,2,*}, А. М. Толеубай^{3,2,**}, Г. А. Чечкин^{4,5,2,***}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 07.09.2022 г.

После доработки 20.05.2023 г.

Принято к публикации 25.05.2023 г.

В работе рассматривается двумерная система уравнений Навье–Стокса в среде с анизотропной переменной вязкостью и периодическими мелкими препятствиями. Доказано, что траекторные аттракторы этой системы стремятся в определенной слабой топологии к траекторным аттракторам усредненной системы уравнений Навье–Стокса с дополнительным потенциалом в среде без препятствий.

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, система уравнений Навье–Стокса, нелинейные уравнения, слабая сходимости, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, анизотропная среда

DOI: 10.31857/S2686954322600549, EDN: PJZJPW

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается поведение аттракторов начально-краевой задачи для двумерной системы уравнений Навье–Стокса в среде с анизотропной вязкостью и локально периодическими мелкими препятствиями, расстояние между которыми и их диаметры зависят от малого параметра (см. рис. 1), при стремлении этого малого параметра к нулю. Предполагается, что поверхность препятствий взаимодействует со средой.

Аттракторы для двумерной системы Навье–Стокса впервые были определены и начали изучаться с середины 1970-х годов. Отметим здесь

работу М.И. Вишика и В.В. Чепыжова [1], в которой обосновывается применение техники траекторных и глобальных аттракторов для усреднения плоских начально-краевых задач гидродинамики ньютоновских жидкостей, а также рассмотрены физические приложения таких моделей (см. также [2]).

Естественным продолжением исследований в этой области является моделирование неньютоновских жидкостей, в частности, сильно анизотропных вязких несжимаемых сред (см., например, недавние работы по неньютоновской жидкости

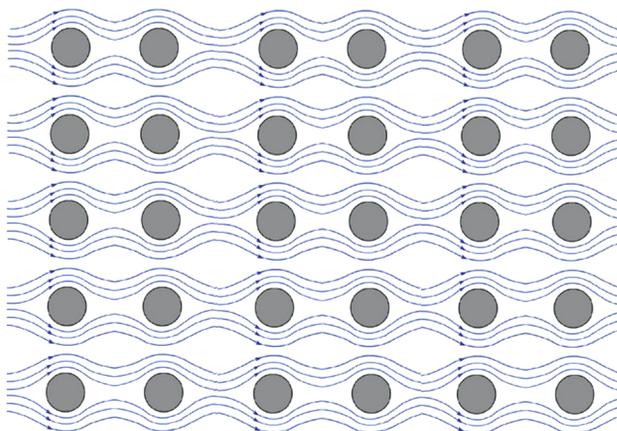


Рис. 1. 2D модель жидкости в среде с мелкими периодическими препятствиями.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан

² Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

³ Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

⁴ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁵ Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

*E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

**E-mail: altyn.15.94@mail.ru

***E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

О.А. Ладыженской [3] и усреднению неньютоновской сильно анизотропной среды [4]).

Отметим некоторые результаты по усреднению аттракторов, которые появились в последнее время. В работах [5] и [6] изучалось усреднение аттракторов эволюционных уравнений и систем с диссипацией в периодически перфорированной области. Результаты по усреднению аттракторов системы уравнений Навье–Стокса в периодической изотропной среде см. в [7]. Методы, которые использовались при исследовании таких задач, были разработаны в [8–11].

В настоящей работе обобщаются результаты, полученные в [7]. Предполагается, что на границе включений выставлены специальные условия третьего рода. Такие краевые условия совместно с системой уравнений Навье–Стокса были предложены в [12] в качестве простейшей модели для паро-водяной конденсации на холодных стенках (подробнее о модели смотри [13, § 4.1]).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала мы определим перфорированную область. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в \mathbb{R}^2 . Введем обозначения

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= \{r \in \mathbb{Z}^2 : \text{dist}(\varepsilon r, \partial\Omega) \geq \sqrt{2}\varepsilon\}, \\ \square &\equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Задавая 1-периодическую по ξ гладкую функцию $F(x, \xi)$ такую, что $F(x, \xi)|_{\xi \in \partial\square} \geq \text{const} > 0$, $F(x, 0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square \setminus \{0\}$, определяем

$$G_\varepsilon^r = \left\{ x \in \varepsilon(\square + r) \mid F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad G_\varepsilon = \bigcup_{r \in Y_\varepsilon} G_\varepsilon^r$$

и вводим перфорированную область следующим образом:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus G_\varepsilon.$$

В соответствии с выше приведенной конструкцией граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $\partial G_\varepsilon \subset \Omega$. Определим также $Q = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t \in (0, \infty)\}$ и $Q_\varepsilon = \{(x, t) \mid x \in \Omega_\varepsilon, t \in (0, \infty)\}$.

Обозначим через \mathbf{H} и \mathbf{V} замыкание в $[L_2(\Omega)]^2$ и $[H_0^1(\Omega)]^2$ множества $\{v \mid v \in [C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla, v) = 0\}$. По аналогии определим \mathbf{H}_ε – замыкание этого множества по норме $[L_2(\Omega_\varepsilon)]^2$, и \mathbf{V}_ε – замыкание этого множества по норме $[H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^2$, где $[H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^2$ – множество вектор-функций из $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \int \sum_{\Omega^k=1}^2 |v^k(x)|^2 dx, & \|v\|_\varepsilon^2 &:= \int \sum_{\Omega_\varepsilon^k=1}^2 |v^k(x)|^2 dx, \\ \|v\|_1^2 &:= \int \sum_{\Omega^k=1}^2 |\nabla v^k(x)|^2 dx, & \|v\|_{1\varepsilon}^2 &:= \int \sum_{\Omega_\varepsilon^k=1}^2 |\nabla v^k(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Мы будем изучать асимптотическое поведение траекторных аттракторов следующей начально-краевой задачи для автономной двумерной системы уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - 2\nu \text{div} \bar{e}(u_\varepsilon) + (u_\varepsilon, \nabla)u_\varepsilon + \\ + \nabla p_\varepsilon = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_n^\varepsilon + \alpha_n \varepsilon(u_\varepsilon, n) = 0, & x \in \partial G_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ \sigma_\tau^\varepsilon + \alpha_\tau \varepsilon(u_\varepsilon, \tau) = 0, & x \in \partial G_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $p_\varepsilon(x, t)$ – давление, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $2\bar{e}(u_\varepsilon) = \nabla u_\varepsilon + (\nabla u_\varepsilon)^T$, $g_\varepsilon(x) = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$, $\sigma_n^\varepsilon(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = -p_\varepsilon + \nu((\bar{e}(u_\varepsilon)n), n)$, $\sigma_\tau^\varepsilon(u_\varepsilon) = \nu((\bar{e}(u_\varepsilon)n), \tau)$, $n = (n_1, n_2)$ – вектор единичной внешней нормали к границе, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – единичный тангенциальный вектор к границе включений. Обозначим $G(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) \leq 0\}$ – локальное включение, $\partial G(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) = 0\}$ – граница включения $G(x)$ в растянутом пространстве ξ .

Известно (см. ниже), что если $U \in \mathbf{H}$, то существует слабое решение $u(t)$ начально-краевой задачи (1), принадлежащее пространству $\mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(R_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$, такое, что $u(0) = U$. При этом имеем, что $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}'_\varepsilon)$. Здесь \mathbf{V}'_ε – сопряженное пространство к \mathbf{V}_ε .

Замечание 2.1. Для доказательства существования решения исходной задачи требуется техника диссипативных оценок, равномерных по параметру ε (см. замечание 4.3 из [14]), а также существование оператора продолжения с сохранением регулярности функций (см. лемму 7.1 из [14]). Доказательство проводится методом Галёркина с использованием теоремы существования и единственности для стационарной системы Навье–Стокса (см. теорему 4.2 из [14]).

Исходя из выше сказанного, будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\},$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + 2\nu \int_{Q_\varepsilon} \bar{e}(u_\varepsilon) \bar{e}(\psi) dxdt + \\ & + \int_{Q_\varepsilon} (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi dxdt + \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\partial G_\varepsilon} (\alpha_n(u_\varepsilon, n)) \psi_n + \quad (2) \\ & + \alpha_\tau(u_\varepsilon, \tau) \psi_\tau dsdt = \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dxdt \end{aligned}$$

для любых вектор-функций $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon)$. Здесь $y_1 \cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$, а ds — элемент кривой ∂G_ε .

При описании пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ для задачи (1) будем следовать общей схеме (см., например, [6]) и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc} : \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc}} := \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}')}. \quad (4)$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc}$, тогда $A(u(t)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Здесь $A(u) = -2\nu \operatorname{div} \bar{e}(u) - (u, \nabla)u$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (1) как решение системы уравнений из общей схемы (см. [6]).

Определим пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{loc} = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc} = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно,

но, пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, т.е., если $u(t) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h+t) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$.

Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{h, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{h, t_2}^{loc}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \rho_{0, M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{H}}^2 dt \right)^{1/2}, \\ \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}^{loc}. \end{aligned}$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве \mathcal{F}_+^{loc} (соответственно $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1).

Далее, определим ограниченные множества в $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, используя банаховы пространства \mathcal{F}_+^b . Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

и \mathcal{F}_+^b — подпространство пространства \mathcal{F}_+^{loc} .

Пусть \mathcal{K}_ε означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\}.$$

Имеет место утверждение, доказательство которого практически полностью совпадает с доказательством, приведенным [9] для более частного случая, учитывая при этом [14] и [15].

Лемма 2.1. *Задача (1) имеет траекторные аттракторы \mathfrak{A}_ε в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество \mathfrak{A}_ε равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}_+^b и компактно в Θ_+^{loc} . Более того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро \mathcal{K}_ε — непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}_+^b . Напомним, что пространства \mathcal{F}_+^b и

Θ_+^{loc} зависят от ε . Здесь Π_+ обозначает оператор сужения на полуось \mathbb{R}_+ .

3. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

В этом разделе изучаются предельное поведение аттракторов \mathfrak{A}_ε для системы уравнений Навье–Стокса (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения.

Стационарная задача на ячейке периодичности имеет вид (см. [14, § 2.1])

$$\begin{cases} -2\nu \operatorname{div} \bar{e}(\xi^{kl}) + \nabla \eta^{kl} = 0, & x \in \square \setminus G(x), \\ \operatorname{div} \xi^{kl} = -\delta_{kl}, & x \in \square \setminus G(x), \\ -\sigma_n^e(\chi^{kl}, \eta^{kl}) = 2\nu n_k n_l, & x \in \partial G(x), \\ \sigma_\tau^e(\chi^{kl}) = \nu(n_k \tau_l + \tau_k n_l), & x \in \partial G(x), \\ \{\chi^{kl}, \eta^{kl}\} - 1 - \text{периодические}, \\ \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\square \setminus G(x)} \chi^{kl} d\xi = 0 \quad (k, l = 1, 2), \end{cases} \quad (6)$$

здесь δ_{kl} – символ Кронекера.

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^i}{\partial t} - \sum_{j,k,l=1}^2 a_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{e}_{kl}(u_0) + \sum_{j=1}^2 d_{ij}^{(n)} u_0^j + \sum_{j=1}^2 d_{ij}^{(\tau)} u_0^j + \\ + \sum_{j=1}^2 u_0^j \frac{\partial u_0^i}{\partial x_j} + \sum_{j,k,l=1}^2 b_{ijkl} u_0^j e_{kl}(u_0) = \mathcal{G}(x), \\ x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (i = 1, 2) \\ u_0 = 0, \quad x \in \partial \Omega, \\ u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$a_{ijkl} = 2\nu \left(\delta_{ijkl} + \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\square \setminus G(x)} \left(e_{ij}(\chi^{kl}) - \delta_{ij} \frac{\eta^{kl}}{2\nu} \right) d\xi \right),$$

$$\delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$b_{ijkl} = \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} \frac{\partial \chi_{ij}^{kl}}{\partial \xi_j} d\xi, \quad \mathcal{G}(x) = \int_{\square \setminus G(x)} g(x, \xi) d\xi,$$

$$d_{ij}^{(n)} = \frac{\alpha_n}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} n_i n_j ds, \quad d_{ij}^{(\tau)} = \frac{\alpha_\tau}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} \tau_i \tau_j ds.$$

Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи (7), т.е. функции

$$u_0(x, s) \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_{\infty,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\},$$

которые удовлетворяют интегральному тождеству начально-краевой задачи (7) для любых функций $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$.

Теоремы существования и единственности для такой задачи см. в [14]. Их доказательство опирается на методы, которые использовала О.А. Ладыженская в своих пионерских работах по двумерной системе Навье–Стокса.

Задача (7) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\bar{\mathfrak{H}}^+$, соответствующем задаче (7), причем

$$\bar{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \bar{\mathfrak{K}},$$

где $\bar{\mathfrak{K}}$ – ядро задачи (7) в \mathcal{F}^b .

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов системы уравнений Навье–Стокса.

Теорема 3.1. *В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (8)$$

Кроме того

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \quad (9)$$

Доказательство теоремы опирается на доказательство сходимости продолженных решений (см. теоремы 2.4 и 2.5 из работы [14]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность В.В. Чепыжову за полезные обсуждения работы и советы по улучшению презентации результатов.

Также авторы благодарят анонимных рецензентов за внимательное прочтение статьи и замечания, которые позволили существенно улучшить текст.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа в параграфе 2 поддержана КН МНиВО РК (грант AP14869553), работа третьего автора в параграфе 3 поддержана МОН РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor // *J. Dyn. Diff. Eqns.* 2007. V. 19. P. 655–684.

2. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // *J. Math. Pures Appl.* 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
3. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* Вып. 28. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 329–361.
4. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // *Applicable Analysis.* 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
5. *Бекмаганбетов К.А., Чечкин Г.А., Чепыжов В.В.* Сильная сходимость аттракторов системы реакции–диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // *Известия РАН.* 2022. Т. 86. № 6. С. 3–34.
6. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2020. V. 140. Art. No 110208.
7. *Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А.* Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде // *Проблемы математического анализа.* 2022. Т. 115. С. 15–28.
8. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
9. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002.
10. *Temam R.* Navier–Stokes equations: Theory and numerical analysis. Amsterdam–New York–Oxford: North Holland, 1979.
11. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag, 1988.
12. *Conca C.* Mathematical modeling of the steam-water condensation in a condenser. Large-scale computations in fluid mechanics, Part 1 (La Jolla, Calif., 1983), 87–98, Lectures in Appl. Math., 22-1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
13. *Conca C.* Numerical results on the homogenization of Stokes and Navier-Stokes equations modeling a class of problems from fluid mechanics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1985. V. 53. № 3. P. 223–258.
14. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. // *J. Math. Pures Appl.* 1985. V. 64 (9). № 1. P. 31–75.
15. *Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // *Математический сборник.* 2001. Т. 192. № 7. С. 3–20.

ON ASYMPTOTICS OF ATTRACTORS TO NAVIER-STOCKES SYSTEM IN ANISOTROPIC MEDIUM WITH SMALL PERIODIC OBSTACLES

K. A. Bekmaganbetov^{a,b}, A. M. Toleubay^{c,b}, and G. A. Chechkin^{d,e,b}

^a *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan*

^b *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^c *Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan*

^d *Moscow State University. M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation*

^e *Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The paper considers a two-dimensional system of Navier–Stokes equations in medium with anisotropic variable viscosity and periodic small obstacles. It is proved that the trajectory attractors of this system tend in a certain weak topology to the trajectory attractors of the averaged system of Navier–Stokes equations with an additional potential in a medium without obstacles.

Keywords: attractors, averaging, system of equations Navier–Stokes, nonlinear equations, weak convergence, perforated region, rapidly oscillating terms, anisotropic medium