ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 47–51

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954 & 517.982

О ПОВЫШЕННОЙ СУММИРУЕМОСТИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ *p*-ЛАПЛАСА

 Ю. А. Алхутов[1,*], Ч. Д. Апиче[2,], М. А. Кисатов[3,***], А. Г. Чечкина[3,4,****]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 13.07.2022 г.
После доработки 22.05.2023 г.
Принято к публикации 30.05.2023 г.

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области на плоскости для неоднородного уравнения p-Лапласа.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, p-емкость, теоремы вложения, повышенная суммируемость

DOI: 10.31857/S268695432260046X, **EDN:** SXBAMG

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе обсуждаются интегральные свойства обобщенных решений неоднородного уравнения p-Лапласа, где $p > 1$, решений задачи Зарембы в плоской модельной области $D \subset \mathbb{R}^2$ такой, что $D = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$. Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_p^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ – замкнутое множество, $W_p^1(D, F)$ – пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F, по норме

$$\|u\|_{W_p^1(D,F)} = \left(\int\limits_D |v|^p\,dx + \int\limits_D |\nabla v|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Априори для функций $v \in W_p^1(D, F)$ предполагается выполненным неравенство Фридрихса

$$\int\limits_D |v|^p\,dx \le C\int\limits_D |\nabla v|^p\,dx, \tag{1.1}$$

о котором будет сказано ниже. Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\begin{aligned} &\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = l \quad \text{в} \quad D,\\ &u = 0 \quad \text{на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad G, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ означает внешнюю нормальную производную функции u, а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_p^1(D, F)$.

Под решением задачи (1.2) понимается функция $u \in W_p^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = -l(\varphi) \tag{1.3}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$.

В силу неравенства Фридрихса (1.1) пространство $W_p^1(D, F)$ можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. Используя теорему Хана-Банаха, нетрудно показать, что функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_D f_i\varphi_{x_i}\,dx, \tag{1.4}$$

где $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$. Поэтому в силу (1.3) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.2) можно понимать в смысле интегрального соотношения

[1] *Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия*
[2] *Университет Салерно, Фишиано, Италия*
[3] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[4] *Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*
**E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru*
***E-mail: cdapice@unisa.it*
****E-mail: kisatov@mail.ru*
*****E-mail: chechkina@gmail.com*

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi dx \tag{1.5}$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, f_2)$ являются функциями из $L_{p'}(D)$.

С помощью методов теории монотонных операторов устанавливается, что задача (1.2) однозначно разрешима в соболевском пространстве функций $W_p^1(D, F)$ (см., например, теорему 2.1 из второго раздела главы 2 монографии [1]).

Нас интересует вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1.2) в предположении, что $f \in L_{p'+\delta}(D)$, где $\delta > 0$.

Повышенная суммируемость градиента решений линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости восходит к работе [2]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида аналогичный результат для решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей установлен в [3]. Оценки повышенной суммируемости градиента решений задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области для линейных эллиптических уравнений второго порядка можно найти в работах [4, 5] и [6]. В работе [7] рассматривается также задача Зарембы и обсуждается вопрос повышенной суммируемости градиента решения уравнения $p(x)$-Лапласа для одного частного случая.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже предполагается, что открытое на ∂D множество G, на котором задано однородное условие Неймана (см. (1.2)), принадлежит части границы $\Gamma = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, y = 0\}$ области D. Таким образом, замкнутое множество F, являющееся носителем однородного условия Дирихле, можно представить в виде объединения двух замкнутых множеств. А именно,

$$\begin{gathered} F = F_1 \cup F_2, \\ \text{где} \quad F_1 = \Gamma \backslash G, \quad F_2 = \overline{\partial D \backslash \Gamma}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Нас не интересует тривиальный случай, когда множество F_1 пусто. В задачах теории усреднения интересна ситуация быстрой смены краевых условий Дирихле и Неймана на части границы Γ, о чем будет сказано ниже. Поэтому нам понадобится условие на структуру множества F_1. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ емкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < 2$ определяется равенством

$$C_q(K) = = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \varphi \ge 1 \text{ на } K \right\}. \tag{2.2}$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый круг радиуса r с центром в точке x_0. Сформулируем ограничение на множество F_1.

A. Если $1 < p \le 2$, то при $q = (p+1)/2$ предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F_1$ при $r \le 1$ справедливо неравенство

$$C_q(F_1 \cap \overline{B}_r^{x_0}) \ge c_0 r^{2-q}, \tag{2.3}$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r.

B. Если $p > 2$, то предполагается, что множество F_1 не пусто: $F_1 \ne \varnothing$.

В частности, условие (2.3) при $q = 3/2$ выполнено для классического канторовского множества F_1 на отрезке [0, 1], а при $1 < q < 3/2$ для канторового множества F_1 на [0, 1], также имеющего нулевую линейную меру $mes_1(F_1)$. Построение таких канторовых множеств основано на результатах работы [8].

Отметим, что из условия $mes_1(F_1 \cap \overline{B}_r^{x_0}) \ge c_0 r$, аналогичного (2.3), вытекает и само условие (2.3). Это следует из оценки предложения 4 [9, § 9.1]. Кроме того, поскольку $mes_1(F) > 0$, то неравенство Фридрихса (1.1) хорошо известно, что влечет однозначную разрешимость задачи (1.2).

Приведем пример быстрой смены однородных краевых условий Дирихле и Неймана на части границы Γ. Отрезок на оси абсцис [0, 1] разделим на равные чередующиеся отрезки длины ε, где $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$, и объединение отрезков с четными (или нечетными) номерами обозначим через F_1. В этом случае условие (2.3) при $1 < p \le 2$ выполнено с постоянной c_0, не зависящей от ε.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существует положительная постоянная $\delta < \delta_0$, зависящая только от δ_0 и p, такая, что для решения задачи* (1.2) *справедлива оценка*

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \le C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx, \tag{3.1}$$

в которой константа C зависит только от p, δ_0 и величины c_0 из (2.8) при $1 < p \le 2$. При $p > 2$ постоянная C зависит только от p и δ_0.

Доказательство. Ниже $Q_r^{x_0}$ означает открытый квадрат с центром в точке x_0 со сторонами длиной $2r$, параллельными координатным осям, а $|Q_r^{x_0}|$ – мера данного квадрата и полагается

$$\fint_{Q_r^{x_0}} f\,dx = \frac{1}{|Q_r^{x_0}|}\int_{Q_r^{x_0}} f\,dx.$$

Продолжим решение u задачи (1.2) четно относительно оси абсцисс, оставив за продолжением предыдущее обозначение, и положим

$$\widetilde{D} = \{(x,y) : 0 < x < 1, -1 < y < 1\}\backslash F_1.$$

Продолженная функция u является решением задачи Дирихле

$$\Delta_p u = l_{\widetilde{f}} \quad \text{в} \quad \widetilde{D}, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\widetilde{D}. \tag{3.2}$$

Компоненты вектор-функции $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$, участвующей в представлении функционала $l_{\widetilde{f}}$ (см. (1.4)), определяются равенствами: $\widetilde{f} = f$ в D и $\widetilde{f}(x,y) = (f_1(x,-y), -f_2(x,-y))$ в $\widetilde{D}\backslash(D \cup F_1)$. Далее полагаем $u = 0$ и $\tilde{f} = 0$ вне области $\widetilde{D}$. Ясно, что продолженная нулем функция u принадлежит соболевскому пространству $W_p^1(\mathbb{R}^2)$.

Следующий шаг – доказательство обратного неравенства Гёльдера для градиента u решения задачи (3.10), которое удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\widetilde{D}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \int_{\widetilde{D}} \widetilde{f} \cdot \nabla\varphi dx \tag{3.3}$$

на всех пробных функциях $\varphi \in W_p^1(\tilde{D})$ с нулевым следом на $\partial\widetilde{D}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \subset \widetilde{D}$ и выберем в интегральном тождестве (3.3) пробную функцию $\varphi = (u-\lambda)\eta^p$, где

$$\lambda = \fint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} u\,dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0})$ такова, что $0 < \eta < 1$, $\eta = 1$ в $Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}$ и $|\nabla\eta| \le CR^{-1}$. В результате получим

$$\int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^p \eta^p\,dx = -p\int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1}(u-\lambda)|\nabla u|^{p-1}\nabla u \cdot \nabla\eta dx + {}$$
$$+ \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^p \widetilde{f} \cdot \nabla u dx + p\int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1}(u-\lambda)\widetilde{f} \cdot \nabla\eta dx.$$

Из выбора срезающей функции η и неравенства Юнга, примененного к подынтегральным выражениям в правой части данного равенства, получим

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p\,dx \le C(p)\left(R^{-p}\int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |u-\lambda|^p\,dx + \int_{Q_R^{x_0}} |\widetilde{f}|^{p'}\,dx\right). \tag{3.4}$$

Пользуясь здесь неравенством Пуанкаре–Соболева

$$\left(\fint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |u-\lambda|^p\,dx\right)^{1/p} \le C(p)R\left(\fint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q},$$

где $q = (p+1)/2$ при $1 < p \le 2$ и $q = (p+2)/2$ при $p > 2$, найдем

$$\left(\fint_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$
$$\le C\left(\left(\fint_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q} + \left(\fint_{Q_R^{x_0}} |\widetilde{f}|^{p'}\,dx\right)^{1/p}\right), \tag{3.5}$$

где $C = C(p)$. Пусть теперь x_0 принадлежит замыканию $\widetilde{D}$ и $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \partial\widetilde{D} \neq \varnothing$. Выберем в интегральном тождестве (3.3) пробную функцию $\varphi = u\eta^p$ с такой же срезающей функцией η, что и ранее. В результате получаем оценку (3.4) с $\lambda = 0$, в силу которой

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p\,dx \le C(p)\left(R^{-p}\int_{Q_R^{x_0}} |u|^p\,dx + \int_{Q_R^{x_0}} |\widetilde{f}|^{p'}\,dx\right). \tag{3.6}$$

Перейдем к оценке первого интеграла в правой части (3.6). Сначала рассмотрим случай, когда $Q^{x_0}_{\frac{3R}{4}} \cap F_1 \neq \varnothing$. Тогда найдется точка $z_0 \in Q^{x_0}_{\frac{3R}{4}} \cap F_1$ такая, что $\overline{B^{z_0}_{\frac{r}{8}}} \in Q^{x_0}_R$. Пусть сначала $1 < p \le 2$, выполнено условие (2.8) и $q = (p+1)/2$. Поскольку функция u продолжена нулем вне области $\widetilde{D}$, то при выполнении условия (2.8) справедливо неравенство В.Г. Мазьи теоремы [9, § 10.1]

$$\left(\fint_{Q^{x_0}_R} |u|^p \, dx \right)^{1/p} \le CR \left(\fint_{Q^{x_0}_R} |\nabla u|^q \, dx \right)^{1/q} \tag{3.7}$$

с постоянной C, зависящей только от p и c_0. Если $p > 2$, множество F_1 не пусто и $q = (p+2)/2$, то нужно воспользоваться определением внутреннего (кубического) диаметра открытого множества (см. [9, конец § 10.2]) и воспользоваться теоремой 1 из § 10.2.3 монографии [9]. В результате вновь придем к оценке (3.7) с постоянной C, зависящей только от p.

Осталось предположить, что $Q^{x_0}_{\frac{3R}{4}} \cap (\partial \widetilde{D} \setminus F_1) \neq \varnothing$. Тогда для двумерной меры Лебега L_R множества $Q^{x_0}_R \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{D})$ справедлива оценка $L_R \ge CR^2$. Поскольку $u = 0$ вне $\widetilde{D}$, то хорошо известно, что неравенство (3.7) с постоянной $C = C(p)$ выполнено и в этом случае.

Таким образом, в силу (3.6) и (3.7) вновь приходим к (3.5). Ясно, что оценка (3.6) выполнена и для квадратов с центрами, лежащими вне $\widetilde{D}$. Итак, соотношение (3.5) имеет место для любых квадратов. Поскольку $|f| \in L_{p'+\delta_0}(D)$ и мы пользовались продолжением, сохраняющим норму, то по модифицированной лемме Геринга (см. [10], [11, гл. VII]) в каждом из рассматриваемых случаев относительно показателя p существует положительная постоянная $\delta(\delta_0, p) < \delta$ такая, что

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D)} \le C(\|\nabla u\|_{L_p(D)} + \||f|^{p'/p}\|_{L_{p+\delta}(D)}),$$

где C зависит только от p, δ_0 и величины c_0 из (2.3) при $1 < p \le 2$, а при $p > 2$ – только от p и δ_0.

Теперь, исходя из энергетического неравенста для градиента решения задачи (1.2), которое вытекает из интегрального тождества (1.5) с пробной функцией $\varphi = u$, приходим к искомой оценке (3.1). Теорема доказана.

Замечание 1. *Отметим, что в настоящей работе использовался существенно модифицированный метод из* [12].

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если замкнутое множество F носителя данных Дирихле задачи Зарембы (1.2) принадлежит только части границы $\Gamma = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, y = 0\}$ области D, то, как нетрудно видеть (см. (2.6)), что $F = F_1$ и $F_2 = \varnothing$. Теорема 1 справедлива и в этом случае. В отличие от приведенного доказательства здесь нужно пользоваться не только четным продолжением решения относительно оси абсцисс, но и четными продолжениями решения относительно трех остальных сторон квадрата, каковым является область D. Результат остается в силе и для произвольной ограниченной строго липшицевой области D. Главным отличием от приведенного доказательства будет использование техники локального распрямления границы области D. Задачу (1.2) можно рассмотреть и в n-мерном круговом ограниченном цилиндре, предполагая, что данные Неймана заданы только на одном из оснований цилиндра, а замкнутое множество F_1, принадлещащее этому основанию, имеет тот же смысл, что и выше. В этом случае емкость компакта из (2.7) определяется в $\mathbb{R}^n$ при $1 < q < n$. При $p > n$ множество F_1 предполагается не пустым, а при $1 < p \le n$ требуется выполнение условия вида (2.8): $C_q(F_1 \cap \overline{B^{x_0}_r}) \ge c_0 r^{n-q}$, где $B^{x_0}_r$ означает открытый n-мерный шар радиуса r с центром в x_0. Полагается $q = (p+1)/2$, если $p \in (1, n/(n-1)]$, а если $p \in (n/(n-1), n]$, где $n > 2$, то $q = np/(n+p)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый, третий и четвертый авторы (ЮАА, МАК и АГЧ) поддержаны грантом РНФ (проект 22-21-00292). Второй автор (ЧД) поддержан по программе “Modeling, Simulation and Optimization of Complex Systems”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных задач. Москва: Издательство Мир, 1972.
2. *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43 (85). С. 451–503.
3. *Meyers N.G.* An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic deivergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 1963. T. 17. P. 189–206.
4. *Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А.* Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона // Доклады РАН. 2021. Т. 497. С. 3–6.
5. *Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A.* The Meyer’s Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // C R Mécanique. 2021. V. 349. P. 299–304.

6. *Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz'ya V.G.* On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem // ARMA. 2022. https://doi.org/10.1007/s00205-022-01805-0

7. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 12. С. 19–52.

8. *Мазья В.Г., Хавин В.П.* Нелинейная теория потенциала // УМН. 1972. Т. 27. С. 67–138.

9. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1985.

10. *Gehring F.W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.

11. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

12. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 311–312. P. 145–169.

ON HIGHER INTEGRABILITY OF THE GRADIENT OF SOLUTIONS TO THE ZAREMBA PROBLEM FOR *p*-LAPLACE EQUATION

Yu. A. Alkhutov[a], C. D'Apice[b], M. A. Kisatov[c], and A. G. Chechkina[c,d]

[a] *A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation*

[b] *Università degli Studi di Salerno, Fisciano (SA), Italia*

[c] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Institute of Mathematics with Computing Center – Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A higher integrability of the gradient of a solution to the Zaremba problem in a bounded Lipschitz plane domain is proved for the inhomogeneous p-Laplace equation.

Keywords: Zaremba problem, Meyers estimates, p-capacity, imbedding theorems, higher integrability