ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 506, с. 95–107

МАТЕМАТИКА

УДК 511.36

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

 В. Г. Чирский[1,*]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 10.07.2022 г.
После доработки 18.08.2022 г.
Принято к публикации 20.08.2022 г.

Доказаны теоремы о бесконечной линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_{m-1})_n z^n$, среди параметров которых трансцендентные полиадические числа Лиувилля.

Ключевые слова: бесконечная линейная независимость, полиадические числа Лиувилля, аппроксимации Эрмита-Паде

DOI: 10.31857/S2686954322050071

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье доказываются теоремы, сформулированные в статье [1]. В них установлена арифметическая природа значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_{m-1})_n z^n, \tag{1}$$

где символ Похгаммера γ_n определяется равенствами $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_n = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ при $n \geq 1$.

Частные случаи этой задачи, относящиеся к рядам

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n z^n$$

рассмотрены в работах [1–3].

Во всех этих работах существенно использованы аппроксимации Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [4].

Дадим необходимые для дальнейшего определения. Символ $\mathrm{ord}_p a$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение рационального числа a на множители. p – адическая норма числа a определяется равенством $|a|_p = p^{-ord_p a}$. Поле p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$ представляет собой пополнение поля рациональных чисел по p – адической норме. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p – адических чисел по всем простым числам p. Теория полиадических чисел изложена в книге [5]. Элементы θ кольца целых полиадических чисел можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем поле p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1,\ldots,\theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1+\ldots+h_mx_m$ с целыми коэффициентами h_1, ..., h_m существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство $h_1\theta_1^{(p)}+\ldots+h_m\theta_m^{(p)} \neq 0$.

Вместе с тем представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество. Ограничения на подмножества простых чисел получены при рассмотрении простых чисел из совокупностей арифметических прогрессий. Этот подход был использован в работах В.В. Зудилина, Т. Матала-ахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [6,

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vgchirskii@yandex.ru*

7], относящихся к так называемому ряду Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n$.

Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le a_n \le n.$$

Разумеется, ряд, члены которого — целые числа, сходящийся во всех полях p — адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \le P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Легко доказать, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p — адических чисел.

Дадим краткое описание места рассматриваемой задачи в общем направлении исследования арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n.$$

Если такие ряды имеют рациональные параметры, то они сводятся к E- или G-функциям Зигеля или к F-рядам. Это позволяет применить к ним метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел и его модификации, см. [8—15]. Если среди параметров содержатся алгебраические иррациональные числа, то к исследованию арифметических свойств рядов применимы аппроксимации Эрмита-Паде, см. [16—18]. Этот краткий обзор не претендует на полноту, но позволяет получить представление о характере основных результатов.

Еще раз отметим, что цель работы — исследование арифметических свойств значений рядов (1), среди параметров которых — трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Значения рассматриваемых рядов вычисляются в точке ξ, являющейся натуральным числом, либо в точке Ξ, которая представляет собой полиадическое число Лиувилля.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть λ_0 — произвольное натуральное число. Положим

$$s_0 = [\exp\lambda_0] + 1.$$

Здесь и далее символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. Пусть $\mathrm{ord}_p a$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение целого числа a на простые множители.

Пусть λ_1 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \le s_0 + C_1\lambda_0^2$ выполняется неравенство $\mathrm{ord}_p\lambda_1 \ge ms_0\ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp\lambda_1] + 1$. Здесь и всюду далее символами C_r, $r = 1, 2, \dots$ обозначены некоторые положительные абсолютные постоянные.

При $k \ge 2$ пусть λ_k — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \le s_{k-1} + C_1\lambda_{k-1}^2$ выполняется неравенство

$$\mathrm{ord}_p\lambda_k \ge ms_{k-1}\ln s_{k-1} \tag{2}$$

и пусть

$$s_k = [\exp\lambda_k] + 1. \tag{3}$$

Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m-1$ — натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \dots, m-1, k \ge 1$ числа $\mu_{i,k}$ — неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \le \lambda_k. \tag{4}$$

Пусть

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} \mu_{i,l}\lambda_l, \quad i = 1, \dots, m-1, \tag{5}$$

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l}\lambda_l, \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{6}$$

Далее числа $K_i, i = 1, 2, \dots$ — натуральные. Для всех $k \ge K_1$ ввиду (2)—(5) выполняется неравенство

$$1 \le \alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} \mu_{i,l}\lambda_l \le 1.1\lambda_k^2, \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{7}$$

Если для всех $l \ge K_2$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$, то α_i — натуральное число.

Докажем, что в противном случае ряд, определенный равенством (6), представляет собой полиадическое число Лиувилля. Этот ряд сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$ согласно (2), (3) и его сумма в этом поле представляет собой целое p — адическое число.

Более того, наложенные условия означают, что для любых натуральных чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \le P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Действительно, для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству $p \le s_k + C_1\lambda_k^2$, при $k \ge K_3$, ввиду (2)–(7), имеем

$$|\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p \le \left|\sum_{l=k+1}^{\infty} \mu_{i,l}\lambda_l\right|_p \le |\lambda_{k+1}|_p$$
$$\le p^{-ms_k \ln s_k} \le s_k^{-ms_k} \le \alpha_{i,k}^{-ms_k}.$$

При всех k положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n,$$
$$f_{m-1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k}+1)_n \dots (\alpha_{m-1,k}+1)_n z^n, \tag{8}$$

а при $i = 1,\dots,m-2$

$$f_{i,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k}+1)_n \dots (\alpha_{i,k}+1)_n \times (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n. \tag{9}$$

Кроме того, будем рассматривать (имеющие вид (1)) ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n,$$
$$f_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1+1)_n \dots (\alpha_{m-1}+1)_n z^n, \tag{10}$$

а при $i = 1,\dots,m-2$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1+1)_n \dots (\alpha_i+1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n. \tag{11}$$

Коэффициенты рядов (8), (9) – натуральные числа, поэтому в любом поле $\mathbb{Q}_p$ они сходятся при $|z|_p < p^{\frac{m-1}{p-1}}$. Поскольку $\alpha_i, i = 1,\dots,m-1$ можно рассматривать как целые p – адические числа, выполняется неравенство

$$|(\alpha_i)_n|_p \le p^{\left(\frac{-n}{p-1} + (p-1)\log_p n\right)}.$$

Действительно, пусть ω – целое p – адическое число. Представим его в виде

$$\omega = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + r_{n+1} = A_n + r_{n+1},$$

где $a_i \in \{0,1,\dots,p-1\}$, $i = 0,1,\dots,n$, а число r_{n+1} – целое p – адическое и $|r_{n+1}|_p < p^{-n-1}$. Тогда величина $(\omega)_n$ может быть представлена в виде суммы величины $(A_n)_n$ и конечного числа слагаемых, каждое из которых имеет p – адическую норму не больше, чем p^{-n-1}. Так как A_n – натуральное число, $|(A_n)_n|_p \le p^{\left(\frac{-n}{p-1} + C\ln n\right)}$ с некоторой постоянной C. Следовательно, $|(\omega)_n|_p \le p^{\left(\frac{-n}{p-1} + C\ln n\right)}$. Это неравенство доказывает сформулированное утверждение. Поэтому ряды (10), (11) также сходятся при $|z|_p < p^{\frac{m-1}{p-1}}$.

Отметим важное для дальнейшего тождество, которое легко следует из определений (8):

$$f_{0,k}(z) = 1 + \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m-1,k} z f_{m-1,k}(z). \tag{12}$$

Сформулируем основные результаты работы. Пусть M – натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $\mathrm{mod}(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ – функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны ρ различных элементов $a_1,\dots,a_\rho$ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение $\mathbb{P}$ для множества простых чисел, будем обозначать $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $m \ge 3, M, \rho$ – натуральные числа. Пусть*

$$\varphi(M) > m, \quad \rho m > \varphi(M)(m-1).$$

Тогда для любых целых чисел $h_0,\dots,h_{m-1}$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_p > 0. \tag{13}$$

Пусть натуральные числа ϑ_k удовлетворяют при любом k неравенству

$$\vartheta_k \le \lambda_k. \tag{14}$$

Пусть

$$\Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \vartheta_l \lambda_l. \tag{15}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $m \ge 3, M, \rho$ – натуральные числа. Пусть*

$$\varphi(M) > m, \quad \rho m > \varphi(M)(m-1).$$

Тогда для любых целых чисел $h_0,\dots,h_{m-1}$, не равных нулю одновременно и числа Ξ, определенного равенством (15) и условиями (14), существует бесконечное множество простых чисел p из множества

$\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$ *таких, что в поле* $\mathbb{Q}_p$ *выполняется неравенство*

$$\left|L(\Xi)\right|_p = \left|h_0 f_0(\Xi) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1}(\Xi)\right|_p > 0. \quad (16)$$

Отметим, что в неравенствах (13) и (16) символы $f_0(\xi)$, ..., $f_{m-1}(\xi)$, $f_0(\Xi)$, ..., $f_{m-1}(\Xi)$ означают суммы этих рядов в поле $\mathbb{Q}_p$.

3. АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ

Приведенные выше формулировки теорем отличаются от формулировок из статьи [1] тем, что здесь используется обозначение $m-1$ для числа, обозначенного m в работе [1]. Это связано с тем, что в доказательстве существенно использованы результаты и сохранены соответствующие обозначения из работы Ю.В. Нестеренко [4].

При каждом натуральном k рассмотрим числа (5) и обозначим $\alpha_{m,k} = 1$. Для любого $N = ms + r$, где $1 \le r \le m$, полагаем

$$\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s. \quad (17)$$

Число t определим равенством $t = \left[\dfrac{N-1}{m-1}\right]$. Используя обычное обозначение

$${}_mF_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_m)_n}{n!} z^n,$$

положим

$$f_{N,k}(z) = {}_mF_0(\alpha_{N+1,k},\ldots,\alpha_{N+m,k},z). \quad (18)$$

Обозначим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k} z^t f_{N,k}(z). \quad (19)$$

Л е м м а 1. *Для любого N существуют многочлены* $P_{N,i,k}(z), i = 0,1,\ldots,m-1$ *такие, что выполняется равенство*

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z)u_{0,k}(z) + \ldots + P_{N,m-1,k}(z)u_{m-1,k}(z). \quad (20)$$

При этом степени многочленов $P_{N,i,k}(z)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$ *не превосходят числа* $t-s$, *ряды* $f_{0,k}(z),\ldots,f_{m-1,k}(z)$ *линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$ *и выполняются рекуррентные соотношения*:

$$u_{N+m,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} u_{N,k}(z), \quad (21)$$

если $N = 0$ *или* $N \ge 1$ *и число N не делится на число* $m-1$,

$$u_{N+m,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z), \quad (22)$$

если $N \ge 1$ *и число N делится на число* $m-1$, *и для любого* $i = 0,1,\ldots,m-1$

$$P_{N+m,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} P_{N,k}(z), \quad (23)$$

если $N = 0$ *или* $N \ge 1$ *и число N не делится на число* $m-1$,

$$P_{N+m,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,k}(z), \quad (24)$$

если $N \ge 1$ *и число N делится на число* $m-1$.

При этом для всех неотрицательных целых значений N имеет место равенство

$$\Delta_{N,k}(z) = (-1)^{mN} \alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k} z^t, \quad (25)$$

где

$$\Delta_{N,k}(z) = \left|P_{N+j,i,k}(z)\right|_{i,j=0,1,\ldots,m-1}. \quad (26)$$

Эта лемма доказана в работе [18]. Она является непосредственным следствием результатов работы [4]. Точнее говоря, все равенства (20)–(26) могут быть получены способом, указанным в работе [18] из части утверждений, доказанных в [4] (лемма 1, следствие 2, теорема 2, лемма 2).

Отметим, что из равенства (20) следуют равенства

$$\begin{gathered} P_{0,0,k}(z) = 1, \quad P_{0,1,k}(z) = 0,\ldots,P_{0,m-1,k}(z) = 0, \\ P_{1,0,k}(z) = 0, \quad P_{1,1,k}(z) = 1,\ldots,P_{1,m-1,k}(z) = 0, \\ \ldots \\ P_{m-1,0,k}(z) = 0, \quad P_{m-1,1,k}(z) = 0,\ldots,P_{m-1,m-1,k}(z) = 1. \end{gathered} \quad (27)$$

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИБЛИЖАЮЩИХ ФОРМ

Рассмотрим при каждом k величину $\max(\alpha_{1,k}$, ..., $\alpha_{m,k})$. Из (5) и (7) следует, что

$$2 \le \max(\alpha_{1,k},\ldots,\alpha_{m,k}) + 1 \le c_0(k) = C_2(\ln s_k)^2 \quad (28)$$

с независящей от числа k постоянной C_2.

По определению, высотой $H(P(z))$ многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами называется максимум абсолютных величин его коэффициентов.

Л е м м а 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}, k \ge K_4, s \in \mathbb{N}, s = s_k$, *где число* s_k *определено равенством* (3). *Пусть* $N = ms_k + r, 1 \le r \le m$. *Тогда высота* $H(P_{N,i,k}(z))$ *многочлена* $P_{N,i,k}(z)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$ *не превосходит числа*

$$\exp(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln\ln s_k). \quad (29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод математической индукции и докажем сначала, что

$$H(P_{N,i,k}(z)) \le c_0^N (c_0+1)\ldots(c_0+s). \quad (30)$$

Основание индукции сразу следует из равенств (27) при $r = 1,\ldots,m-1$. При $r = m$ получаем, ввиду (23)

$$N = m, \quad P_{m,i,k}(z) = P_{1,i,k}(z) - \alpha_{1,k} P_{N,k}(z)$$

и справедливость утверждения следует из неравенства (28).

Индуктивное предположение – пусть при некотором $s, s \geq 1$ и всех $i, i = 0, \ldots, m-1$ и всех r, $r = 1, \ldots, m$ справедливы неравенства

$$H(P_{m(s-1)+r,i,k}(z)) \leq c_0^{m(s-1)+r}(c_0+1)\ldots(c_0+s-1). \quad (31)$$

При каждом $i, i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняется одно из равенств

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) = H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z) - \alpha_{m(s-1)+r+1,k}P_{m(s-1)+r,i,k}(z)), \quad (32)$$

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) = H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z) - \alpha_{m(s-1)+r+1,k}zP_{m(s-1)+r,i,k}(z)). \quad (33)$$

Из (17), (28) получаем

$$\alpha_{m(s-1)+r+1,k} = \alpha_{r+1,k} + s - 1 \leq c_0 + s. \quad (34)$$

Если $r \leq m-1$, то и в случае (32) и в случае (33) получаем

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) \leq H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z)) + \alpha_{m(s-1)+r+1,k}H(P_{m(s-1)+r,i,k}(z)). \quad (35)$$

Используя (31), (34), (35), получаем, поскольку $2c_0 \leq c_0^m$,

$$\begin{aligned} H(P_{ms+r,i,k}(z)) &\leq c_0^{m(s-1)+r+1}(c_0+1)\ldots(c_0+s-1) + \\ &+ c_0^{m(s-1)+r}(c_0+1)\ldots(c_0+s) = \\ &= c_0^{m(s-1)+r}(c_0+1)\ldots(c_0+s-1)(2c_0+s) \leq \\ &\leq 2c_0^{m(s-1)+r}(c_0+1)\ldots(c_0+s) \leq \\ &\leq c_0^{ms+r}(c_0+1)\ldots(c_0+s). \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим случай $r = m$. При каждом i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняется одно из равенств

$$H(P_{m(s+1),i,k}(z)) = H(P_{ms+1,i,k}(z) - \alpha_{ms+1,k}P_{ms,i,k}(z)), \quad (37)$$

$$H(P_{m(s+1),i,k}(z)) = H(P_{ms+1,i,k}(z) - \alpha_{ms+1,k}zP_{ms,i,k}(z)). \quad (38)$$

Из (17), (28) получаем

$$\alpha_{ms+1,k} = \alpha_{1,k} + s \leq c_0 + s. \quad (39)$$

Как в случае (37), так и в случае (38) получаем

$$H(P_{m(s+1),i,k}(z)) \leq H(P_{ms+1,i,k}(z)) + \alpha_{ms+1,k}H(P_{ms,i,k}(z)). \quad (40)$$

По уже доказанному, имеем

$$H(P_{ms+1,i,k}(z)) \leq c_0^{ms+1}(c_0+1)\ldots(c_0+s) \quad (41)$$

По предположению индукции,

$$H(P_{ms,i,k}(z)) = H(P_{m(s-1)+m,i,k}(z)) \leq c_0^{ms}(c_0+1)\ldots(c_0+s-1). \quad (42)$$

Из соотношений (39)–(42) получаем

$$\begin{aligned} H(P_{m(s+1),i,k}(z)) &\leq c_0^{ms+1}(c_0+1)\ldots(c_0+s) + \\ &+ (c_0+s)c_0^{ms}(c_0+1)\ldots(c_0+s-1) = \\ &= c_0^{ms}(c_0+1)\ldots(c_0+s)(c_0+1) \leq \\ &\leq 2c_0^{ms+1}(c_0+1)\ldots(c_0+s) \leq \\ &\leq c_0^{m(s+1)}(c_0+1)\ldots(c_0+s), \end{aligned} \quad (43)$$

поскольку $2 \leq c_0 \leq c_0^m$.

Индукция проведена и неравенство (30) доказано.

Величина $(c_0+1)\ldots(c_0+s)$ выражается через значения гамма-функции Эйлера равенством

$$(c_0+1)\ldots(c_0+s) = \frac{\Gamma(c_0+s+1)}{\Gamma(c_0+1)}. \quad (44)$$

Известно, что для любой постоянной величины a и любого $\delta > 0$ при $|s| \to +\infty$ равномерно при $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ имеет место равенство

$$\ln\Gamma(s+a) = \left(s + a - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \frac{1}{2}\pi\ln 2 + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \quad (45)$$

Из (44),(45) сразу следует, что при $s = s_k \to \infty$, (что равносильно условию: при $k \to \infty$), имеем

$$(c_0+1)\ldots(c_0+s_k) = \exp(s_k \ln s_k + O(s_k)). \quad (46)$$

Величина $c_0^{m(s_k+1)}$ с учетом (28) имеет при $k \geq K_4$ оценку сверху $\exp(C_4 s_k \ln\ln s_k)$.

Вместе с равенством (46) и неравенствами (43) и (36) это доказывает оценку (29) и утверждение леммы.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\xi \in \mathbb{N}$. *При условиях леммы при всех* $k \geq K_5$ *выполняется неравенство*

$$|P_{N,i,k}(\xi)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln\ln s_k). \quad (47)$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть* Ξ *определено равенством* (15). *Пусть* $\Xi_k = \sum_{l=0}^{k}\vartheta_l\lambda_l$. *При условиях леммы при всех* $k \geq K_6$ *выполняется неравенство*

$$|P_{N,i,k}(\Xi_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_6 s_k \ln\ln s_k). \quad (48)$$

Доказательства этих следствий практически аналогичны. В следствии 1 точка ξ – фиксированное натуральное число. По лемме 1 степень многочлена $P_{N,i,k}(z)$ равна $t - s$, т.е. не превосходит числа $C_7 s_k$, поэтому, при $k \geq K_5$

$$\begin{aligned} |P_{N,i,k}(\xi)| &\leq C_7 s_k \xi^{C_7 s_k} \exp(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln\ln s_k) \leq \\ &\leq \exp(s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln\ln s_k). \end{aligned}$$

В следствии 2 число Ξ_k удовлетворяет неравенству $\Xi_k \leq C_8(\ln s_k)^2$, поэтому при $k \geq K_6$

$$\left|P_{N,i,k}\left(\Xi_k\right)\right| \le C_7 s_k \Xi_k^{C_7 s_k} \exp\left(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln\ln s_k\right) \le \\ \le \exp\left(s_k \ln s_k + C_6 s_k \ln\ln s_k\right).$$

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вместе с формой $L(\xi)$, определенной формулой (13), рассмотрим форму

$$L_k\left(\xi\right) = h_0 f_{0,k}\left(\xi\right) + \ldots + h_{m-1} f_{m-1,k}\left(\xi\right) \tag{49}$$

и связанную с ней форму

$$\begin{aligned} l_k\left(\xi\right) &= \alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k} L_k\left(\xi\right) = \\ &= H_0 u_{0,k}\left(\xi\right) + \ldots + H_{m-1} u_{m-1,k}\left(\xi\right), \end{aligned} \tag{50}$$

где функции $u_{N,k}\left(z\right)$ определены равенством (19). По условию, не все из целых чисел $h_0,\ldots,h_{m-1}$ равны нулю. Пусть $h = \max\left(h_0,\ldots,h_{m-1}\right)$. Тогда

$$H = \max\left(H_0,\ldots,H_{m-1}\right) \le \alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k} h.$$

Ввиду неравенств (28),

$$H \le C_2^{m-1}\left(\ln s_k\right)^{2m-2}. \tag{51}$$

По лемме 1, равенство (25) означает, что определитель (26), составленный из вычисленных в точке ξ коэффициентов линейных форм $u_{N,k}(\xi)$, ..., $u_{N+m,k}(\xi)$, определенных равенством (19), отличен от 0. Поэтому среди этих форм найдутся $m-1$ форм, линейно независимых с формой $l_k(\xi)$, определенной в (50). Пусть это – формы

$$u_{N_1,k}\left(\xi\right),\ldots,u_{N_{m-1},k}\left(\xi\right),$$

где

$$\left\{N_1,\ldots,N_{m-1}\right\} \subset \left\{N, N+1,\ldots,N+m-1\right\}. \tag{52}$$

Рассмотрим определитель полученной системы форм

$$\Delta_{l,N,k}\left(\xi\right) = \begin{vmatrix} H_0 & \ldots & H_{m-1} \\ P_{N_1,0,k}\left(\xi\right) & \ldots & P_{N_1,m-1,k}\left(\xi\right) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ P_{N_{m-1},0,k}\left(\xi\right) & \ldots & P_{N_{m-1},m-1,k}\left(\xi\right) \end{vmatrix}, \tag{53}$$

представляющий собой, согласно сказанному выше, отличное от 0 целое число.

Рассмотрим формы (49) и (50) в точке $\Xi_k = \sum_{l=0}^{k}\vartheta_l\lambda_l$. Для формы $l_k\left(\Xi_k\right)$ тоже существуют $m-1$ линейных форм среди форм $u_{N,k}(\Xi_k)$, ..., $u_{N+m,k}(\Xi_k)$ линейно независимых с ней. Пусть это – формы

$$u_{N_1,k}\left(\Xi_k\right),\ldots,u_{N_{m-1},k}\left(\Xi_k\right)$$

где

$$\left\{N_1,\ldots,N_{m-1}\right\} \subset \left\{N, N+1,\ldots,N+m-1\right\}.$$

Отметим, что теперь выбор чисел $N_1,\ldots,N_{m-1}$ может быть отличен от того выбора (52), что ранее соответствовал определителю (53). Тем не менее мы сохраним для определителя вновь полученной системы из m линейно независимых форм прежнее обозначение $\Delta_{l,N,k}\left(\Xi_k\right)$.

Далее числа K_i зависят от числа h, постоянного для рассматриваемой формы $L_k\left(\xi\right)$.

Л е м м а 3. *Для любого $k \ge K_7$ выполняются неравенства*

$$\left|\Delta_{l,N,k}\left(\xi\right)\right| \le \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_9 s_k \ln\ln s_k), \tag{54}$$

$$\left|\Delta_{l,N,k}\left(\Xi_k\right)\right| \le \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_{10} s_k \ln\ln s_k). \tag{55}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 леммы 2, (неравенство (47)), при $k \ge K_5$,

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{l,N,k}\left(\xi\right)\right| &\le m!\,H\max\left|P_{N,i,k}\left(\xi\right)\right| \le \\ &\le m!\,H\exp((m-1)s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln\ln s_k) \le \\ &\le H\exp((m-1)s_k \ln s_k + C_{11} s_k \ln\ln s_k). \end{aligned} \tag{56}$$

Из неравенств (51) и (56) сразу следует (54).

Доказательство неравенства (55) дословно совпадает с доказательством неравенства (54). Единственное различие состоит в использовании следствия 2 леммы 2 (неравенства (48)). При этом K_7 – наибольшее из чисел K_5 и K_6.

6. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НОРМ ПРИБЛИЖАЮЩИХ ФОРМ

Лемма 4. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k \ge K_8$, где K_8 – эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = s_k$. Пусть M, ρ – натуральные числа. Пусть $\rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любого $N_i \in \{N, N+1 < \ldots, N+m-1\}$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &\prod_p \max_i\left|u_{N_i,k}\left(\xi\right)\right|_p \le \\ &\le \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{12} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \end{aligned} \tag{57}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\exp\sqrt{\ln s_k} \le p \le s_k + C_1(\ln s_k)^2. \tag{58}$$

Л е м м а 5. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k \ge K_9$, где K_9 – эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = s_k$. Пусть M, ρ – натуральные числа. Пусть $\rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любого $N_i \in \{N, N+1 < \ldots, N+m-1\}$ справедливы неравенства*

$$\prod_p \max_i \left|u_{N_i,k}(\Xi_k)\right|_p \le \le \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \tag{59}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$, *удовлетворяющим неравенствам* (58).

Доказательство леммы 4. Из равенств (18), (19) следует, что

$$u_{N_i,k}(\xi) = \alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N_i,k} F(\alpha_{N_i,k}+1,\ldots,\alpha_{N_i,k}+m,\xi).$$

Так как для любого простого числа p величина $F(\alpha_{N_i,k}+1,\ldots,\alpha_{N_i,k}+m,\xi)$ представляет собой целое p – адическое число, то

$$\max_i \left|u_{N_i,k}(\xi)\right|_p \le \left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N_i,k}\right|_p \le \left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}\right|_p,$$

поскольку все $\alpha_{l,k}$ – целые числа и, ввиду (52), $N_i \ge N$. Следовательно,

$$\prod_p \max_i \left|u_{N_i,k}(\xi)\right|_p \le \prod_p \left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}\right|_p, \tag{60}$$

где произведения взяты по любому множеству простых чисел p.

Согласно (17),

$$\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k} = \alpha_{1,k}(\alpha_{1,k}+1)\ldots(\alpha_{1,k}+s_k)\ldots \alpha_{r,k}(\alpha_{r,k}+1)\ldots(\alpha_{r,k}+s_k).$$

$$\alpha_{r+1,k}(\alpha_{r+1,k}+1)\ldots(\alpha_{r+1,k}+s_k-1)\ldots \alpha_{m,k}(\alpha_{m,k}+1)\ldots(\alpha_{m,k}+s_k-1). \tag{61}$$

В разложение величины $\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}$ на простые множители, согласно (28), (3), входят только простые числа p с условием

$$p \le s_k + C_1\lambda_k^2 \le s_k + C_1(\ln s_k)^2. \tag{62}$$

Оценим сверху величину произведения

$$\prod_p \left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}\right|_p, \tag{63}$$

взятого по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (62).

Рассмотрим произведение

$$\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k}+1)\ldots(\alpha_{i,k}+s_k) = \frac{(\alpha_{i,k}+s_k)!}{(\alpha_{i,k}-1)!}, \quad i = 1,\ldots,r. \tag{64}$$

Простое число p входит в произведение (64) в степени

$$\operatorname{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k}+1)\ldots(\alpha_{i,k}+s_k)) = = \frac{\alpha_{i,k}+s_k-S_{\alpha_{i,k}+s_k}}{p-1} - \frac{\alpha_{i,k}-1-S_{\alpha_{i,k}-1}}{p-1} =$$

$$= \frac{s_k - S_{\alpha_{i,k}+s_k} + S_{\alpha_{i,k}-1}+1}{p-1}, \tag{65}$$

где символом S_x для натурального числа x обозначена сумма цифр разложения этого числа по степеням p и, следовательно,

$$1 \le S_x \le (p-1)([\log_p x]+1) \le \le (p-1)(\log_p x + 1).$$

Поэтому

$$\frac{s_k+2}{p-1} - \log_p(\alpha_{i,k}+s_k) - 1 \le \le \frac{s_k - S_{\alpha_{i,k}+s_k} + S_{\alpha_{i,k}-1}+1}{p-1} \le \frac{s_k}{p-1} + \log_p(\alpha_{i,k}-1).$$

Поэтому степень (65), с учетом неравенств (28), при $k \ge K_{10}$ лежит в пределах

$$\frac{s_k}{p-1} - C_{14}\log_p s_k \le \le \operatorname{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k}+1)\ldots(\alpha_{i,k}+s_k)) \le \le \frac{s_k}{p-1} + C_{15}\log_p \ln s_k. \tag{66}$$

Рассмотрим произведение

$$\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k}+1)\ldots(\alpha_{i,k}+s_k-1) = \frac{(\alpha_{i,k}+s_k-1)!}{(\alpha_{i,k}-1)!}, \quad i = r+1,\ldots,m. \tag{67}$$

Для каждого из произведений (67) аналогично (66) получаем, что простое число p при $k \ge K_{11}$ входит в это произведение в степени, удовлетворяющей неравенствам

$$\frac{s_k}{p-1} - C_{16}\log_p s_k \le \le \operatorname{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k}+1)\ldots(\alpha_{i,k}+s_k-1)) \le \le \frac{s_k}{p-1} + C_{17}\log_p \ln s_k. \tag{68}$$

Таким образом, из неравенств (66), (68) и равенства (61) следует, что для всех рассматриваемых простых чисел p при $k \ge K_{12}$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}\right|_p \le \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{18}\ln s_k\right). \tag{69}$$

Неравенство (69) означает, что имеет место неравенство

$$\prod_p \left|\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{N,k}\right|_p \le \le \exp\left(\sum_p \left(-\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{18}\ln s_k\right)\right), \tag{70}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (62). Для этих значений p имеем оценку

$$C_{18}\sum_p \ln s_k \le C_{19}s_k. \tag{71}$$

Используем равенство

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + \sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + C_{20}, \tag{72}$$

а также известную оценку (см. [19], стр. 129)

$$\sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\varphi(M)}\ln x + O(1), \quad x \to +\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам $p \le x$, принадлежащим множеству $\mathbf{a}_i$ значений любой из рассматриваемых арифметических прогрессий. Следовательно, ввиду (62) и (72), для таких p при $k \ge K_{13}$ имеем

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \frac{1}{\varphi(M)}\ln(s_k + C_1(\ln s_k)^2)ms_k + {}$$
$$+C_{21}s_k \ge \frac{1}{\varphi(M)}ms_k \ln s_k + C_{22}s_k$$

и, следовательно, ввиду (70) и (71),

$$\prod_p |\alpha_{1,k}\dots\alpha_{N,k}|_p \le \exp\left(-\frac{m\rho}{\varphi(M)}s_k \ln s_k + C_{23}s_k\right), \tag{73}$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (62).

Оценим снизу произведение (63), взятое по всем простым числам p, удовлетворяющим неравенству

$$p \le \exp\sqrt{\ln s_k}. \tag{74}$$

Ввиду неравенств (66), (68) для этого произведения имеем оценку снизу

$$\prod_p |\alpha_{1,k}\dots\alpha_{N,k}|_p \ge$$
$$\ge \exp\left(\sum_p\left(-\frac{\ln p}{p-1}ms_k - C_{24}\ln s_k\right)\right), \tag{75}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p, удовлетворяющим неравенству (74). Используя равенство (72) и следующую из (74) оценку

$$\sum_p \ln s_k \le C_{25}\sqrt{\ln s_k}\exp\sqrt{\ln s_k},$$

оценим сумму

$$\sum_p\left(\frac{\ln p}{p-1}ms_k + C_{24}\ln s_k\right) \le ms_k\sum_p\frac{\ln p}{p} + {}$$
$$+C_{20}ms_k + C_{25}\sqrt{\ln s_k}\exp\sqrt{\ln s_k}. \tag{76}$$

Известно, что

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1), \quad x \to +\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам $p \le x$. Поэтому при $k \ge K_{14}$ выполнено неравенство

$$ms_k\sum_p\frac{\ln p}{p} \le ms_k\sqrt{\ln s_k} + C_{26}s_k. \tag{77}$$

Поэтому, ввиду неравенств (74)–(77), при $k \ge K_{15}$ имеем

$$\sum_p\left(\frac{\ln p}{p-1}ms_k + C_{24}\ln s_k\right) \le ms_k\sqrt{\ln s_k} + C_{27}s_k. \tag{78}$$

Из неравенств (75) и (78) сразу следует, что

$$\prod_p |\alpha_{1,k}\dots\alpha_{N,k}|_p \ge \exp\left(-ms_k\sqrt{\ln s_k} - C_{27}s_k\right), \tag{79}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p, удовлетворяющим неравенству (74).

Неравенства (73) и (79) дают справедливое при $k \ge K_{16}$ неравенство

$$\prod_p |\alpha_{1,k}\dots\alpha_{N,k}|_p \le$$
$$\le \exp\left(-\frac{m\rho}{\varphi(M)}s_k\ln s_k + C_{23}s_k + ms_k\sqrt{\ln s_k} + C_{27}s_k\right) \le$$
$$\le \exp\left(-\frac{m\rho}{\varphi(M)}s_k\ln s_k + C_{28}s_k\sqrt{\ln s_k}\right),$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Но тогда из неравенства (60) следует, что при условиях, что K_8 – наибольшее из чисел K_1, $K_2,\dots,K_{16}$ и $k \ge K_8$, а $C_{12} = C_{28}$, выполнено неравенство (57), т.е.

$$\prod_p \max_i |u_{N_i,k}(\xi)|_p \le$$
$$\le \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)}s_k\ln s_k + C_{12}s_k\sqrt{\ln s_k}\right),$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (58). Лемма 4 доказана.

Доказательство неравенства (59) леммы 5 дословно повторяет доказательство леммы 4.

8. ОЦЕНКИ СНИЗУ ВЕЛИЧИН $\left|l_k(\xi)\right|_p, \left|l_k(\Xi_k)\right|_p, \left|L_k(\xi)\right|_p, \left|L_k(\Xi_k)\right|_p$

Проделаем с определителем (53) такие преобразования: умножим его первый столбец на величину $u_{0,k}(\xi)$ и прибавим к полученному первому столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi)$, $j = 1, \ldots, m-1$. С учетом равенств (20) и (50) получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{0,k}(\xi) = \begin{vmatrix} l_k(\xi) & \ldots & H_{m-1} \\ u_{N_1,k}(\xi) & \ldots & P_{N_1,m-1,k}(\xi) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ u_{N_{m-1},k}(\xi) & \ldots & P_{N_{m-1},m-1,k}(\xi) \end{vmatrix}. \quad (80)$$

Аналогично, умножим последний столбец определителя (53) на величину $u_{m-1,k}(\xi)$ и прибавим к полученному последнему столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi), j = 0, \ldots, m-2$. С учетом равенств (20) и (50), получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{m-1,k}(\xi) = \begin{vmatrix} H_0 & \ldots & l_k(\xi) \\ P_{N_1,0,k}(\xi) & \ldots & u_{N_1,k}(\xi) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ P_{N_{m-1},0,k}(\xi) & \ldots & u_{N_{m-1},k}(\xi) \end{vmatrix}. \quad (81)$$

Из равенств (12) и (19) следует, что

$$u_{0,k}(\xi) = 1 + \xi u_{m-1,k}(\xi). \quad (82)$$

Обозначая $\delta_{0,i,j}$ алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении строки с номером i и столбца с номером j определителя (80) и $\delta_{m-1,i,j}$ алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя (81), соответственно, получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{0,k}(\xi) = l_k(\xi)\delta_{0,1,1} + \sum_{i=2}^{m}\delta_{0,i,1}u_{N_{i-1},k}(\xi), \quad (83)$$

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{m-1,k}(\xi) = = l_k(\xi)\delta_{m-1,1,m} + \sum_{i=2}^{m}\delta_{m-1,i,m}u_{N_{i-1},k}(\xi). \quad (84)$$

Из равенств (82), (83), (84) следует

$$\Delta_{l,N,k}(\xi) = l_k(\xi)(\delta_{0,1,1} + \xi\delta_{m-1,1,m}) + + \sum_{i=2}^{m}(\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1},k}(\xi). \quad (85)$$

Л е м м а 6. *Пусть* $k \in \mathbb{N}, k \geq K_{17}$. *Тогда существует простое число* p_k, *удовлетворяющее неравенствам* (58), *для которого справедливы оценки*

$$\left|l_k(\xi)\right|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{29}s_k\sqrt{\ln s_k}), \quad (86)$$

$$\left|L_k(\xi)\right|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{30}s_k\sqrt{\ln s_k}). \quad (87)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что существует простое число p_k, удовлетворяющее неравенствам (58), для которого выполнено неравенство (86). Предположим противное, т.е. что для всех простых чисел p, удовлетворяющее неравенствам (58), имеем неравенство

$$\left|l_k(\xi)\right|_p < \exp\left(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{29}s_k\sqrt{\ln s_k}\right). \quad (88)$$

В равенстве (85) коэффициент при форме $l_k(\xi)$ – целое число. Определитель (53) отличен от нуля. Для отличных от нуля целых чисел A выполнено неравенство

$$\left|A\right|_p \geq \frac{1}{\left|A\right|},$$

из которого, с учетом (54) следует, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено неравенство

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_9 s_k \ln\ln s_k),$$

что, вместе с (88) при $k \geq K_{18}$ дает

$$\left|l_k(\xi)\right|_p < \left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p. \quad (89)$$

Тогда равенства (85) и неравенство (89) означают, согласно известным свойствам p – адического нормирования, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено равенство

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p = \left|\sum_{i=2}^{m}(\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1},k}(\xi)\right|_p. \quad (90)$$

Так как числа $\left(\delta_{0,j,1} + \xi\delta_{m-1,j,m-1}\right)$ – целые, получаем справедливые для всех рассматриваемых простых чисел p неравенства

$$\left|\delta_{0,j,1} + \xi\delta_{m-1,j,m-1}\right|_p \leq 1$$

и из равенства (90) следует

$$\left|\sum_{i=2}^{m}(\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1},k}(\xi)\right|_p \leq \max_j\left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p.$$

Поэтому

$$\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \leq \max_j\left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p. \quad (91)$$

Из (91) следует, что для любого подмножества $\mathbb{P}_0$ множества простых чисел $\mathbb{P}$ имеет место неравенство

$$\prod_{p\in\mathbb{P}_0}\left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \leq \prod_{p\in\mathbb{P}_0}\max_j\left|u_{N_j,k}(\xi)\right|_p. \quad (92)$$

По лемме 4, неравенство (57),

$$\prod_p \max_i\left|u_{N_i,k}(\xi)\right|_p \leq \leq \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)}s_k \ln s_k + C_{12}s_k\sqrt{\ln s_k}\right),$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Известна формула произведения: для рационального числа $A\neq 0$

$$\prod_p |A|_p = \frac{1}{|A|}.$$

Поэтому из неравенства (54) следует неравенство

$$\prod_p \left|\Delta_{l,N,k}(\xi)\right|_p \geq \\ \geq \exp\left(-(m-1)s_k\ln s_k - C_9 s_k \ln\ln s_k\right), \tag{93}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Полученные оценки (92), (57), (93) противоречат друг другу при $k\geq K_{19}$ ввиду неравенства $\dfrac{\rho m}{\varphi(M)} > m-1$. При $K_{17}=\max\left(K_{18},K_{19}\right)$ это опровергает сделанное предположение и доказывает справедливость неравенства (86) при некотором p_k, удовлетворяющем неравенствам (58). Поскольку $l_k(\xi)$, определенная равенством (50), отличается от $L_k(\xi)$, определенной равенством (49), лишь множителем $\alpha_{1,k}\ldots\alpha_{m-1,k}$, из неравенств (86), (51) следует неравенство (81) и лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Пусть* $k\in\mathbb{N}, k\geq K_{20}$. *Тогда существует простое число* p_k, *удовлетворяющее неравенствам* (58), *для которого справедливы оценки*

$$\left|l_k(\Xi_k)\right|_{p_k} \geq \exp\left(-(m-1)s_k\ln s_k - C_{31}s_k\sqrt{\ln s_k}\right), \tag{94}$$

$$\left|L_k(\Xi_k)\right|_{p_k} \geq \exp\left(-(m-1)s_k\ln s_k - C_{32}s_k\sqrt{\ln s_k}\right). \tag{95}$$

Доказательство неравенств (94), (95) дословно повторяет доказательство леммы 6. Единственное отличие состоит в использовании неравенства (59) вместо неравенства (57) и неравенства (55) вместо неравенства (54).

6. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ 1 И 2

Рассматриваем простое число p_k, удовлетворяющее неравенствам (58).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_{m-1}f_{m-1}(\xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое p_k — адическое число, поэтому разность форм

$$L(\xi) - L_k(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \ldots + h_{m-1}f_{m-1}(\xi) - \\ -\left(h_0 f_{0,k}(\xi) + \ldots + h_{m-1}f_{m-1,k}(\xi)\right) \tag{96}$$

тоже представляет собой целое p_k — адическое число. Согласно равенствам (5), (6), (8), (10)

$$f_0(\xi) - f_{0,k}(\xi) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\alpha_1\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \left(\alpha_{1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n\right)\xi^n, \tag{97}$$

$$f_{m-1}(\xi) - f_{m-1,k}(\xi) = \\ =\sum_{n=0}^{\infty}\left((\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_{m-1}+1)_n - (\alpha_{1,k}+1)_n\ldots(\alpha_{m-1,k}+1)_n\right)\xi^n \tag{98}$$

и при $i=1,\ldots,m-2$, ввиду (9) и (11),

$$f_i(\xi) - f_{i,k}(\xi) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_1+1\right)_n\ldots\left(\alpha_i+1\right)_n\left(\alpha_{i+1}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n\xi^n - \\ -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_{1,k}+1\right)_n\ldots\left(\alpha_{i,k}+1\right)_n\left(\alpha_{i+1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n\xi^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\alpha_1+1\right)_n\ldots\left(\alpha_i+1\right)_n\left(\alpha_{i+1}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \right. \\ \left. -\left(\alpha_{1,k}+1\right)_n\ldots\left(\alpha_{i,k}+1\right)_n\left(\alpha_{i+1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n\right)\xi^n. \tag{99}$$

Рассмотрим величины

$$\left(\alpha_1\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \left(\alpha_{1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n, \tag{100}$$

$$(\alpha_1+1)_n\ldots(\alpha_{m-1}+1)_n - (\alpha_{1,k}+1)_n\ldots(\alpha_{m-1,k}+1)_n \tag{101}$$

и, при $i=1,\ldots,m-2$,

$$\left(\alpha_1+1\right)_n\ldots\left(\alpha_i+1\right)_n\left(\alpha_{i+1}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \\ -\left(\alpha_{1,k}+1\right)_n\ldots\left(\alpha_{i,k}+1\right)_n\left(\alpha_{i+1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n. \tag{102}$$

При $n=0$ все разности (100)–(102) равны 0. При $n\geq 1$ представим разность (100) в виде

$$\left(\alpha_1\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \left(\alpha_{1,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1,k}\right)_n = \\ = \left(\alpha_1\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \left(\alpha_{1,k}\right)_n\left(\alpha_2\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n + \\ +\left(\alpha_{1,k}\right)_n\left(\alpha_2\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - (\alpha_{1,k})_n(\alpha_{2,k})_n\ldots(\alpha_{m-1})_n + \ldots \\ +(\alpha_{1,k})_n(\alpha_{2,k})_n\ldots(\alpha_{m-2,k})_n(\alpha_{m-1})_n - \\ -(\alpha_{1,k})_n\ldots(\alpha_{m-1,k})_n. \tag{103}$$

Рассмотрим входящие в (103) величины

$$\left(\alpha_{1,k}\right)_n\left(\alpha_{2,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{j-1,k}\right)_n\left(\alpha_{j,k}\right)_n\left(\alpha_{j+1}\right)_n\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n - \\ -\left(\alpha_{1,k}\right)_n\left(\alpha_{2,k}\right)_n\ldots\left(\alpha_{j-1,k}\right)_n\left(\alpha_j\right)_n\left(\alpha_{j+1}\right)_n\ldots\ldots\left(\alpha_{m-1}\right)_n = \\ = ((\alpha_{j,k})_n - (\alpha_j)_n)(\alpha_{1,k})_n(\alpha_{2,k})_n\ldots \\ (\alpha_{j-1,k})_n(\alpha_{j+1})_n\ldots\ldots(\alpha_{m-1})_n. \tag{104}$$

Величину

$$\left(\alpha_{j,k}\right)_n - \left(\alpha_j\right)_n = \alpha_{j,k}\left(\alpha_{j,k}+1\right)\ldots\left(\alpha_{j,k}+n-1\right) - \\ -\alpha_j\left(\alpha_j+1\right)\ldots\left(\alpha_j+n-1\right) \tag{105}$$

можно рассматривать, как разность значений многочлена $x(x+1)\ldots(x+n-1)$ в точках $\alpha_{j,k}$ и α_j. Так как, согласно (5) и (6),

$$\alpha_{j,k}-\alpha_j=-\sum_{l=k+1}^{\infty}\mu_{j,l}\lambda_l,$$

из неравенства (2) следует, что для любого $j=1,\ldots,m-1$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha_{j,k}-\alpha_j\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}.$$

Следовательно, для определенной равенством (105) величины выполнено неравенство

$$\left|\left(\alpha_{j,k}\right)_n-\left(\alpha_j\right)_n\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (106)$$

Так как $(\alpha_{1,k})_n(\alpha_{2,k})_n\ldots(\alpha_{j-1,k})_n(\alpha_{j+1})_n\ldots\ldots(\alpha_{m-1})_n$ — целое p_k — адическое число, из (106) следует, что p_k — адическая норма величины (104) не превосходит числа

$$p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (107)$$

Поэтому представленная в виде суммы (103) величина (100) удовлетворяет неравенству

$$\left|(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_{m-1})_n-(\alpha_{1,k})_n\ldots(\alpha_{m-1,k})_n\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (108)$$

Легко видеть, что для разности (101) выполняется такая же оценка. Это означает, что все члены сходящихся p_k — адических рядов (97) и (98) оцениваются сверху величиной (107). Поэтому

$$\begin{gathered}\left|f_0(\xi)-f_{0,k}(\xi)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k},\\ \left|f_{m-1}(\xi)-f_{m-1,k}(\xi)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}.\end{gathered} \quad (109)$$

Представим разность (100) в виде, аналогичном (101), и заметим, что

$$\left|\left(\alpha_{j,k}+1\right)-\left(\alpha_j+1\right)\right|_{p_k}=\left|\alpha_{j,k}-\alpha_j\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}.$$

Проводя аналогичные приведенным выше выкладки (103)–(109), находим, что для любого $i=1,\ldots,m-2$ выполняется неравенство

$$\left|f_i(\xi)-f_{i,k}(\xi)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (110)$$

Из равенства (96) следует, что

$$\begin{gathered}L(\xi)-L_k(\xi)=h_0(f_0(\xi)-f_{0,k}(\xi))+\\ +\ldots+h_{m-1}(f_{m-1}(\xi)-f_{m-1,k}(\xi)),\end{gathered} \quad (111)$$

поэтому неравенства (109) и (110) дают

$$\left|L(\xi)-L_k(\xi)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (112)$$

В лемме 6 доказано, что для любого $k\ge K_{17}$ выполнено неравенство (87), т.е.

$$\left|L_k(\xi)\right|_{p_k}\ge\exp\left(-(m-1)s_k\ln s_k-C_{30}s_k\sqrt{\ln s_k}\right).$$

Вместе с неравенством (110) это дает

$$\begin{gathered}\left|L(\xi)\right|_{p_k}=\left|L_k(\xi)\right|_{p_k}\ge\\ \ge\exp(-(m-1)s_k\ln s_k-C_{30}s_k\sqrt{\ln s_k})>0.\end{gathered} \quad (113)$$

Неравенство (113) и является доказываемым неравенством (13).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\Xi)=h_0f_0(\Xi)+\ldots+h_{m-1}f_{m-1}(\Xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое p_k — адическое число.

Рассмотрим разность

$$L(\Xi)-L_k(\Xi_k)=L(\Xi)-L_k(\Xi)+L_k(\Xi)-L_k(\Xi_k). \quad (114)$$

Рассмотрим величину $L(\Xi)-L_k(\Xi)$ и повторим для нее рассуждения из предыдущего пункта, проведенные для разности (111). Хотя ξ — натуральное число, а Ξ — полиадическое число, при получении оценки (112) использовалось лишь то, что ξ — целое p_k — адическое число, поэтому замена ξ на Ξ не повлияет на справедливость полученной оценки, иными словами, имеет место неравенство

$$\left|L(\Xi)-L_k(\Xi)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (115)$$

Рассмотрим величину $L_k(\Xi)-L_k(\Xi_k)$. Она имеет вид

$$L_k(\Xi)-L_k(\Xi_k)=\sum_{i=0}^{m-1}h_i\left(f_{i,k}(\Xi)-f_{i,k}(\Xi_k)\right). \quad (116)$$

Каждую из разностей $f_{i,k}(\Xi)-f_{i,k}(\Xi_k)$ представим в виде

$$\begin{gathered}f_{i,k}(\Xi)-f_{i,k}(\Xi_k)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_{1,k}+1)_n\ldots\\ \ldots(\alpha_{i,k}+1)_n(\alpha_{i+1,k})_n\ldots(\alpha_{m-1,k})_n(\Xi^n-\Xi_k^n)\end{gathered} \quad (117)$$

и заметим, что величина $\Xi^n-\Xi_k^n$ равна произведению числа $\Xi-\Xi_k$ на целое p_k — адическое число, поэтому, согласно (2) и (15)

$$\left|\Xi^n-\Xi_k^n\right|_{p_k}\le\left|\Xi-\Xi_k\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (118)$$

Равенства (116), (117) и неравенство (118) означают, что

$$\left|L_k(\Xi)-L_k(\Xi_k)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (119)$$

Равенство (114) и неравенства (115) и (119) дают неравенство

$$\left|L(\Xi)-L_k(\Xi_k)\right|_{p_k}\le p_k^{-ms_k\ln s_k}. \quad (120)$$

Неравенства (95) леммы 7 и (120) показывают, что при $k\ge K_{21}$ выполняются соотношения

$$\left|L(\Xi)\right|_{p_k}=\left|L_k(\Xi_k)\right|_{p_k}>0,$$

иными словами, доказано неравенство (16).

Для завершения доказательства теорем осталось проверить, что при $k\ge K_{22}$ справедливо неравенство $p_k < p_{k+1}$. Для этого, ввиду (58), достаточно доказать, что при $k \geq K_{22}$ выполняется неравенство

$$s_k + C_2 (\ln s_k)^2 < \exp\sqrt{\ln s_{k+1}}.$$

Согласно (2) и (3), $s_{k+1} \geq \exp\lambda_{k+1}$ и

$$\lambda_{k+1} \geq \prod_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \exp(\ln p(ms_k \ln s_k)) =$$

$$= \exp\left(\sum_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \ln p(ms_k \ln s_k) \right) \geq \exp s_k^2.$$

Здесь была использована грубая оценка

$$\sum_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \ln p \geq \frac{s_k}{2\ln s_k}.$$

Таким образом, ввиду (3),

$$s_{k+1} \geq \exp\lambda_{k+1}, \quad \ln s_{k+1} \geq \lambda_{k+1} \geq \exp s_k^2,$$

$$\sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp\frac{1}{2} s_k^2,$$

следовательно,

$$\exp\sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp\left(\exp\frac{1}{2} s_k^2\right) > s_k + C_2 (\ln s_k)^2,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что для любых линейных форм $L(\xi)$и $L(\Xi)$ существуют бесконечные множества чисел k и простых чисел p_k, для которых $\left|L(\xi)\right|_{p_k} > 0$ и $\left|L(\Xi)\right|_{p_k} > 0$, что и утверждалось в теоремах.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из доказанных теорем не следует линейная независимость p-адических чисел $f_0(\xi), \ldots, f_{m-1}(\xi)$ и, соответственно, $f_0(\Xi), \ldots, f_{m-1}(\Xi)$, для заданного простого числа p.

Можно высказать гипотезу о том, что для любого простого числа p эти p-адические числа $f_0(\xi)$, ..., $f_{m-1}(\xi)$ и, соответственно, $f_0(\Xi)$, ..., $f_{m-1}(\Xi)$, линейно независимы и даже алгебраически независимы при определенных условиях на параметры этих рядов.

Однако задачи доказательства этих утверждений весьма трудны и для их решения требуются принципиально новые подходы.

Вместе с тем теорию F-рядов [14, 15] обобщенного метода Зигеля–Шидловского можно усилить и получить общие теоремы о бесконечной алгебраической независимости значений рядов из более широкого класса, содержащего ряды с некоторыми трансцендентными параметрами. Использование подходов работ [9–11] позволит доказать бесконечную алгебраическую независимость значений рассмотренных рядов вида (1).

Еще одно интересное направление исследований – исследование статистических свойств цифр натуральных чисел, представляющих собой частичные суммы полиадических рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чирский В.Г.* Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т. 505. С. 63–65. https://doi.org/10.31857/S2686954322040075
2. *Chirskii V.G.* Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021.V. 28. № 3. P. 294–302. https://doi.org/10.1134/S1061920819030051
3. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 156–167. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312
4. *Нестеренко Ю.В.* Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
5. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука. 1971. 416 с.
6. *Ernvall-Hytönen A.-M., Matala-aho T., Seppälä L.* Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.
7. *Matala-aho T., Zudilin W.* Euler factorial series and global relations // J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.026
8. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
9. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E-функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
10. *Салихов В.Х.* Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. V. 53. P. 453–471.
11. *Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.* Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
12. *Bombieri E.* On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.
13. *Галочкин А.И.* Об алгебраической независимости значений Е-функций в некоторых трансцендентных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. 1970. № 5. С. 58–63.
14. *Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
15. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305. https://doi.org/10.1134/S1061920821030031

16. *Chudnovsky G.V.* On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
17. *Иванков П.Л.* О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
18. *Чирский В.Г.* Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 193–210. https://doi.org/10.4213/im8169
19. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

ARITHMETIC PROPERTIES OF THE VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH POLYADIC TRANSCENDENTAL PARAMETERS

V. G. Chirskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Theorems on the infinite linear independence of the values of generalized hypergeometric series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n$ are proved, among the parameters of which are transcendental polyadic Liouville numbers.

Keywords: infinite linear independence, polyadic Liouville numbers, Hermite-Pade approximations