

УДК 517.956

ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗВОНКИНА К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ КОЛМОГОРОВА

© 2022 г. В. И. Богачев^{1,2,3,*}, М. Рёкнер⁴, С. В. Шапошников^{1,2,**}

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым

Поступило 31.05.2022 г.

После доработки 19.06.2022 г.

Принято к публикации 15.07.2022 г.

В заметке развивается новая аналитическая версия преобразования Звонкина коэффициента сноса стационарного уравнения Колмогорова и это преобразование применяется к выводу неравенства Харнака для неотрицательных решений в случае, когда матрица диффузии не является локально соболевской. Получено также обобщение известной теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова.

Ключевые слова: стационарное уравнение Колмогорова, условие Дини, класс VMO, преобразование Звонкина

DOI: 10.31857/S2686954322050046

В заметке развивается новая аналитическая версия преобразования Звонкина [1] коэффициента сноса стационарного уравнения Колмогорова на $\mathbb{R}^d$ и это преобразование применяется к выводу неравенства Харнака для неотрицательных решений при условии, что матрица диффузии A невырождена и удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, а коэффициент сноса b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$. Получено также обобщение известной теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова на случай, когда матрица A удовлетворяет условию Дини или принадлежит классу VMO.

Рассмотрим стационарное уравнение Колмогорова

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) - \partial_{x_i} (b^i \varrho) = 0 \quad (1)$$

на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, где коэффициенты a^{ij} и b^i — борелевские функции, а матрица

$A = (a^{ij})$ симметрична и положительно определена. Пусть

$$L\varphi = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi,$$

$$L^* \varphi = \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varphi) - \partial_{x_i} (b^i \varphi).$$

Тогда уравнение (1) можно записать в более коротком виде $L^* \varrho = 0$. Функция $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ называется решением уравнения (1), если

$$a^{ij} \varrho, \quad b^i \varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} L\varphi(x) \varrho(x) dx = 0.$$

Неотрицательное решение ϱ уравнения Колмогорова (1) с единичным интегралом называется вероятностным решением. Уравнения типа (1) называют также уравнениями двойного дивергентного вида.

Важным стимулом для изучения таких уравнений является то, что они выполнены для инвариантных мер диффузионных процессов.

В случае локально липшицевых коэффициентов существование вероятностного решения дается классической теоремой Хасьминского [2] при условии существования функции Ляпунова. Эта теорема была обобщена в [3–5], где либо коэффициент диффузии невырожден и является локально соболевским с порядком интегрируемо-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

³ Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴ Университет Билефельда, Билефельд, Германия

*E-mail: vibogach@mail.ru

**E-mail: starticle@mail.ru

сти выше размерности вместе с такой же локальной интегрируемостью коэффициента сноса, либо коэффициенты диффузии и сноса непрерывны. Согласно [6], в первом случае решение является локально соболевским и его непрерывная версия локально отделена от нуля. В работах [7] и [8] было доказано, что в случае, когда матрица $A = (a^{ij})$ невырождена и удовлетворяет условию Дини и коэффициенты b^i ограничены, решение имеет непрерывную версию, а если коэффициенты a^{ij} гёльдеровы, то решение имеет гёльдерову версию. Эти результаты были обобщены в [9] на случай локально интегрируемых b^i . Аналогичные результаты были получены в [10] и [11] при предположении, что A удовлетворяет условию Дини средней осцилляции (см. определение ниже), которое слабее, чем классическое условие Дини. Напомним, что отображение удовлетворяет условию Дини, если для его модуля непрерывности ω имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Некоторые интересные контрпримеры были построены в [12] и [13], в частности, пример положительно определенной и непрерывной матрицы диффузии A , для которой уравнение $\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) = 0$ имеет локально неограниченное решение. Неравенство Харнака для уравнений двойного дивергентного вида с матрицей A , принадлежащей классу Соболева с достаточно высоким порядком интегрируемости, является следствием неравенства Харнака для эллиптических уравнений дивергентного вида (см. [4, гл. 3]). В том случае, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, неравенство Харнака было получено в [14] для $b = 0$; для ограниченного сноса b оно было установлено в [9], причем доказательство существенно использовало ограниченность b . Другой способ доказательства неравенства Харнака для $b = 0$ был предложен в [11]. В работах [6] и [9] (см. также [4, гл. 1]) интегрируемость решений исследовалась без условия Дини. В частности, было показано, что если $A \in VMO$ и коэффициент b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$, то решение принадлежит всем $L^p_{loc}(\Omega)$.

Наша работа содержит следующие новые результаты: (i) неравенство Харнака для неотрицательных решений, если матрица A невырождена и удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, а коэффициент b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$, (ii) достаточные условия для локальной экспоненциальной интегрируемости ϱ , (iii) обобщение теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения ста-

ционарного уравнения Колмогорова на случай, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, а снос не является локально ограниченным.

Эти результаты основаны на новом результате о преобразованиях типа Звонкина. Так называемое преобразование Звонкина, введенное в [1], является эффективным методом в теории диффузионных процессов для сглаживания коэффициента сноса. Мы применяем преобразование Звонкина не к диффузионным процессам, а к решениям уравнения Колмогорова, более того, мы не предполагаем какой-либо связи решений с диффузионными процессами. Нами показано, что с помощью подходящей замены координат интегрируемый снос может быть преобразован в непрерывно дифференцируемый снос, для которого новая матрица диффузии позволяет применять известные результаты о регулярности решений.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Для удобства считаем, что коэффициенты a^{ij} определены на $\mathbb{R}^d$ и для некоторого числа $v > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполнены следующие неравенства:

$$v \cdot I \leq A(x) \leq v^{-1} \cdot I. \quad (H_a)$$

Кроме того, коэффициенты a^{ij} принадлежат классу VMO , т.е. существует такая непрерывная возрастающая функция ω на $[0, +\infty)$, что $\omega(0) = 0$ и

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} r^{-2d} \int_{B(z,r)} \int_{B(z,r)} |a^{ij}(x) - a^{ij}(y)| dx dy \leq \omega(r), \quad r > 0,$$

где $B(z, r)$ — шар радиуса r с центром z ,

$$b \in L^d_{loc}(\Omega), \quad (H_b)$$

что означает, что для каждого шара $B \subset \Omega$ найдется такое число $p = p(B) > d$, что ограничение $|b|$ на B входит в $L^p(B)$.

Теперь построим преобразование Звонкина Φ .

Пусть $B(x_0, 4R) \subset \Omega$ и $\beta(x) = b(x)$, если $x \in B(x_0, 4R)$, $\beta(x) = 0$, если $x \notin B(x_0, 4R)$. Тогда $\beta \in L^p(\mathbb{R}^d)$ и $\|\beta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\beta\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$. Пусть $1 \leq k \leq d$.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^d$ эллиптическое уравнение

$$\text{tr}(AD^2 u) + \langle \beta, \nabla u \rangle - \lambda u = -\beta^k, \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

Можно показать, что для каждого $\delta > 0$ существует такое $\lambda > 0$, что для всякого $k \leq d$ уравнение (2) имеет решение $u_k \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap W^{p,2}(\mathbb{R}^d)$, для которого

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla u_k(x)| \leq \delta, \quad \|u_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^d)} \leq M,$$

где постоянная M зависит только от d, v, ω и $\|b\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$. Пусть $u = (u^1, \dots, u^d)$ с упомянутыми выше решениями u^k уравнения (2). Ниже u' и Φ' обозначают матрицы Якоби отображений u и Φ . Возьмем достаточно малое δ так, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|u(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \det(I + u'(x)) \leq 2.$$

Положим

$$\Phi(x) = x + u(x).$$

Предложение 1. (i) Отображение Φ является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^d$ класса C^1 , более того, функции $\partial_{x_j} \Phi^k$ локально гёльдеровы. (ii) Верны неравенства

$$\frac{1}{2} \|x - y\| \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq 2 \|x - y\|.$$

Напомним, что $B(x_0, 4R) \subset \Omega$. Пусть $\Psi = \Phi^{-1}$ и $y_0 = \Phi(x_0)$. Рассмотрим шар $B(y_0, 2R)$. Согласно неравенствам в (ii) выше, имеем

$$B(x_0, R) \subset \Psi(B(y_0, 2R)) \subset B(x_0, 4R).$$

Предложение 2. Пусть $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ — решение уравнения (1). Тогда функция

$$\sigma(y) = |\det \Psi'(y)| \varrho(\Psi(y))$$

на $B(y_0, 2R)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \sigma = 0$, где

$$\mathcal{L}f(y) = q^{km}(y) \partial_{y_k} \partial_{y_m} f(y) + h^k(y) \partial_{y_k} f(y)$$

и коэффициенты имеют вид

$$q^{km}(y) = a^{ij}(\Psi(y)) \partial_{x_i} \Phi^k(\Psi(y)) \partial_{x_j} \Phi^m(\Psi(y)),$$

$$h^k(y) = \lambda u^k(\Psi(y)).$$

Заметим, что векторное поле $h(y) = \lambda u(\Psi(y))$ непрерывно дифференцируемо на шар $B(y_0, 2R)$. Кроме того, производная Φ также удовлетворяет условию Гёльдера. Следовательно, функция σ на $B(y_0, 2R)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \sigma = 0$, в котором коэффициенты q^{mk} при производных второго порядка образуют невырожденную матрицу и принадлежат классу VMO , а коэффициенты h^k непрерывны на $B(y_0, 2R)$. Это позволяет применить результаты работ [7–9, 11] к функции σ и затем перенести их на ρ . Приведем пример, демонстрирующий простой вывод известного результата [9, теорема 3.1]) из случая хорошего сноса.

Пример 1. Если выполнены условия (H_a) и (H_b) и матрица A удовлетворяет условию Дини, то всякое решение $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ уравнения (1) имеет непрерывную версию.

Доказательство. Проверим существование непрерывной версии функции ϱ на шар $B(x_0, R/2) \subset B(x_0, 4R) \subset \Omega$. Пусть Φ — диффеоморфизм, построенный выше. В силу предложения 2 функция $\sigma(y) = \varrho(\Psi(y)) |\det \Psi'(y)|$ удовлетворяет на $B(y_0, 2R)$ уравнению с некоторыми коэффициентами, для которых выполнены предположения из [8, теорема 1], т.е. матрица (q^{mk}) невырождена и функции q^{mk}, h^k удовлетворяют условию Дини. Значит, σ имеет непрерывную версию на $B(y_0, R)$. Поскольку Φ — диффеоморфизм класса C^1 , отображения Φ и Ψ переводят множества меры нуль в множества меры нуль и модификация функции σ на множестве меры нуль приводит к изменению функции ρ на множестве меры нуль. Следовательно, функция ρ имеет непрерывную версию на $B(x_0, R/2)$.

Теперь приведем наши новые результаты о решениях стационарных уравнений Колмогорова, полученные с помощью преобразования Звонкина, построенного выше.

Следуя [10] и [11], будет говорить, что измеримая функция f на Ω удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, если

$$\int_0^1 \frac{w(r)}{r} dr < \infty,$$

где

$$w(r) = \sup_{x \in \Omega} \frac{1}{|\Omega(x, r)|} \int_{\Omega(x, r)} |f(y) - f_{\Omega}(x, r)| dy,$$

$$f_{\Omega}(x, r) = \frac{1}{|\Omega(x, r)|} \int_{\Omega(x, r)} f(y) dy,$$

$$\Omega(x, r) = \Omega \cap B(x, r).$$

Классическое условие Дини влечет условие Дини средней осцилляции.

Следующее утверждение обобщает неравенство Харнака на случай, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини средней осцилляции и коэффициент сноса локально неограничен (а лишь интегрируем в некоторой степени выше размерности). В известных результатах коэффициент сноса либо равен нулю, либо локально ограничен.

Теорема 1. Предположим, что выполнено условие (H_a) , на каждом шар B матрица A удовлетворяет условию Дини средней осцилляции с некоторой функцией $\omega, b^i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Предположим также, что $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ — решение уравнения (1). Тогда функция ϱ имеет непрерывную версию. Более того, если $\varrho \geq 0$, то непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству Харнака: для каждого ша-

ра $B(x_0, R/2) \subset B(x_0, 4R) \subset \Omega$ существует такое число C , что

$$\sup_{x \in B(x_0, R/2)} \rho(x) \leq C \inf_{x \in B(x_0, R/2)} \varrho(x),$$

где C зависит от R, w, d, v, p и $\|b\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$, но не зависит от ϱ . Модуль непрерывности функции ϱ на $B(x_0, R/2)$ зависит от тех же объектов.

Согласно [9, теорема 2.1], если a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (H_a) и (H_b) , причем $a^{ij} \in VMO$, то всякое решение $\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ локально интегрируемо во всякой степени $p \geq 1$. Если функции a^{ij} удовлетворяют условию Дини средней осцилляции, то решение локально ограничено и даже непрерывно. Рассмотрим промежуточный случай, когда A лежит в более узком классе, чем VMO , но не удовлетворяют условию Дини. Предположим, что a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (H_a) и (H_b) и

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \omega(\|x - y\|),$$

где ω — возрастающая непрерывная функция на $[0, +\infty)$ с $\omega(0) = 0$. Предположим также, что для некоторого $C_\omega > 0$ и всех $t \geq 0$ мы имеем

$$\omega(t) \geq C_\omega t^{1-d/p}.$$

Например, подходит функция $\omega(t) = |\ln t|^{-1}$ около нуля, для которой условие Дини не выполнено.

Теорема 2. Пусть $\varrho \in L^1_{loc}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда для всякого замкнутого шара $B \subset \Omega$ верны следующие утверждения.

(i) Если $\lim_{t \rightarrow 0+} \omega(t) |\ln t| = 0$, то

$$\exp(\gamma_1 |\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B) \quad \text{для всех } \gamma_1, \gamma_2 > 0.$$

(ii) Если функция $\omega(t) |\ln t|$ ограничена на $(0, 1]$, то существуют такие числа $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, что

$$\exp(\gamma_1 |\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B).$$

(iii) Если для некоторого $\beta \in (0, 1)$ функция $\omega(t) |\ln t|^\beta$ ограничена на $(0, 1]$, то для некоторого $\gamma > 0$ имеем

$$\exp(\gamma |\ln(|\varrho| + 1)|^{1-\beta}) \in L^1(B).$$

Следующая теорема обобщает утверждение (i) теоремы 2.4.1 в книге [4] на случай, когда коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условию Дини средней осцилляции. В цитированной теореме предполагалось, что функции a^{ij} принадлежат локально к классу Соболева $W^{p,1}$ с некоторым $p > d$.

Теорема 3. Предположим, что коэффициенты a^{ij} и b^i определены на $\mathbb{R}^d$, $b^i \in L^{d+}_{loc}$, причем для каждого шара B найдутся такие число $v_B > 0$ и непрерывная неотрицательная возрастающая функция w_B на $[0, 1]$, что $w_B(0) = 0$, функция $w_B(t)/t$ интегрируема на $[0, 1]$, $v_B \cdot I \leq A(x) \leq v_B^{-1} \cdot I$ для всех x , а также для всех $r \in (0, 1]$ имеем

$$\sup_{x \in B} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |a^{ij}(y) - a^{ij}_B(x, r)| dy \leq w_B(r).$$

Тогда существует непрерывное положительное решение ρ уравнения (1) на $\mathbb{R}^d$.

Этот результат дает следующее обобщение теоремы Хасьминского.

Следствие 1. Если в дополнение к предположениям теоремы 3 имеются функция V класса $W^{d,2}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и числа $C > 0$ и $R > 0$, для которых

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(x) \leq -C \quad \text{при } |x| \geq R,$$

то существует непрерывное положительное вероятностное решение ρ уравнения (1) на $\mathbb{R}^d$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарим А.Н. Ширяева за полезные обсуждения, а рецензента за ряд замечаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Это исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда 22-11-00015. С.В. Шапошников является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит его жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звонкин А.К. // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 1. С. 129–149.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., Наука, 1969.
3. Богачев В.И., Рёкнер М. // Теория вероятн. и ее примен. 2000. V. 45. № 3. С. 417–436.
4. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
5. Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. // Докл. АН. 2012. Т. 444. № 3. С. 245–249.
6. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. // Commun. Partial Differ. Equ. 2001. V. 26. № 11–12. P. 2037–2080.
7. Sjögren P. // Ark. Mat. 1973. V. 11. P. 153–165.
8. Sjögren P. // Ann. Inst. Фурье. 1975. V. 25. № 3–4. P. 509–518.

9. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V.* // *Annali di Matematica*. 2017. V. 196. P. 1609–1635.
10. *Dong H., Kim S.* // *Comm. Partial Differ. Equ.* 2017. V. 42. № 3. P. 417–435.
11. *Dong H., Escauriaza L., Kim S.* // *Math. Ann.* 2018. B. 370. S. 447–489.
12. *Bauman P.* // *Ark. Mat.* 1984. V. 22. P. 153–173.
13. *Bauman P.* // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 91. P. 64–68.
14. *Мамедов Ф.И.* // *Сиб. матем. ж.* 1992. Т. 33. № 5. С. 100–106.

APPLICATIONS OF ZVONKIN'S TRANSFORM TO STATIONARY KOLMOGOROV EQUATIONS

V. I. Bogachev^{a,b,c}, M. Röckner^d, and S. V. Shaposhnikov^{a,b}

^a *Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

^c *Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

^d *Bielefeld University, Bielefeld, Germany*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

In this note we develop a new analytic version of Zvonkin's transform of the drift coefficient of a stationary Kolmogorov equation and apply this transform to derive the Harnack inequality for nonnegative solutions in the case where the diffusion matrix is not locally Sobolev. We also obtain a generalization of the known theorem of Hasminskii on existence of a probability solution to the stationary Kolmogorov equation.

Keywords: Keywords: stationary Kolmogorov equation, Dini's condition, class VMO, Zvonkin's transform