

УДК 519.63

## О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА В ОБЛАСТЯХ ВЛИЯНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2022 г. О. А. Ковыркина<sup>1,2,\*</sup>, В. В. Остапенко<sup>1,2,\*\*</sup>,  
член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин<sup>3,\*\*\*</sup>

Поступило 04.10.2021 г.

После доработки 24.01.2022 г.

Принято к публикации 28.03.2022 г.

Проведен сравнительный анализ точности разностных схем Русанова, CABARETM и WENO5 при расчете задачи о разрушении плотины для уравнений теории мелкой воды. Показано, что все три схемы имеют первый порядок сходимости внутри области, занимаемой центрированной волной разрежения, а в области постоянного течения между ударной волной и волной разрежения схема Русанова имеет второй порядок сходимости, в то время как в схемах CABARETM и WENO5 в этой области локальная сходимость отсутствует. Связано это с тем, что численные решения, получаемые по схемам CABARETM и WENO5, имеют незатухающие осцилляции в области влияния ударной волны, амплитуда которых не снижается при уменьшении шагов разностной сетки. В результате, с учетом теоремы Лакса-Вендрофа, численные решения, получаемые по консервативным схемам CABARETM и WENO5, лишь слабо сходятся к точному постоянному решению в области влияния ударной волны, в отличие от схемы Русанова, которая в этой области локально сходится к точному решению со вторым порядком.

*Ключевые слова:* схема Русанова, схема CABARET, схема WENO5, ударная волна, локальная сходимость разностного решения

DOI: 10.31857/S2686954322030043

1. В работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности разностной схемы и показано, что среди линейных двухслойных по времени схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Дальнейшее развитие теории разностных схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы разностных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность (при аппроксимации линейной системы и скалярного закона сохранения) достигались за счет нелинейной коррекции

потоков, приводящей к нелинейности этих схем даже при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL-схемы [2], WENO-схемы [3], DG-схемы [4] и CABARET-схемы [5]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

Было показано, что NFC-схемы имеют не более чем первый порядок как локальной сходимости в областях влияния ударных волн [6, 7], так и интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны [8–10]. В то же время некоторые немонотонные схемы повышенной точности, имеющие аналитические функции численных потоков и, как следствие, с повышенной точностью аппроксимирующие  $\epsilon$ -условия Югонио, сохраняют повышенный порядок сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы [8]. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

<sup>1</sup> Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский национальный исследовательский  
государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: olyana@ngs.ru

\*\*E-mail: ostapenko\_vv@ngs.ru

\*\*\*E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

В связи с этим был предложен метод построения комбинированных разностных схем сквозного счета [11], которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно, с повышенной точностью локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок сходимости в областях их влияния. В комбинированной разностной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем. В [11] в качестве базисной использовалась схема Русанова [12] третьего порядка классической аппроксимации, а в качестве внутренней NFC-схемы применялась монотонная модификация схемы CABARET [5] второго порядка точности на гладких решениях. Для этой модификации схемы CABARET, изученной в [10], будем использовать аббревиатуру CABARETM.

Один из потенциальных недостатков комбинированной схемы может заключаться в том, что осцилляции, возникающие на фронте ударной волны в немонотонной базисной схеме, с течением времени могут распространяться в гладкие части рассчитываемого точного решения (прежде всего, в область влияния ударной волны), что будет приводить к постепенному расширению расчетной области для внутренней NFC-схемы и к соответствующему снижению эффективности комбинированной схемы. Однако на самом деле имеет место противоположная ситуация. В [13] было обнаружено, что при численном расчете по NFC-схеме DG-метода [4] классической задачи Шу–Ошера [14] за фронтом ударной волны, распространяющейся по энтропийному возмущению, отсутствует локальная сходимость численного решения к точному. Связано это с возникновением численных осцилляций, амплитуда которых перестает убывать при уменьшении пространственного шага сетки, начиная с некоторого его достаточно малого значения.

В настоящей работе показано, что аналогичная проблема возникает при расчете ударных волн и по другим NFC-схемам. А именно, численное решение задачи о разрушении плотины для уравнений мелкой воды, получаемое по немонотонной схеме Русанова [12], несмотря на заметные осцилляции на ударной волне, в области ее влияния монотонно сходится к точному решению со вторым порядком. В то же время численные решения этой задачи, получаемые по NFC-схемам CABARETM [10] и WENO5 [3], имеют незатухающие осцилляции в области постоянного

течения между ударной волной и центрированной волной разрежения, что приводит к отсутствию локальной сходимости этих решений в области влияния ударной волны.

2. Векторная форма записи системы законов сохранения первого приближения теории мелкой воды в случае прямоугольного горизонтального русла без учета донного трения имеет вид

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$H(x, t)$  и  $q(x, t)$  – глубина и расход жидкости,  $g=9.81$  – ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (1), (2) задачу о разрушении плотины, т.е. задачу Римана со следующими кусочно-постоянными начальными данными

$$H(x, 0) = \begin{cases} 5, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad q(x, 0) = 0. \quad (3)$$

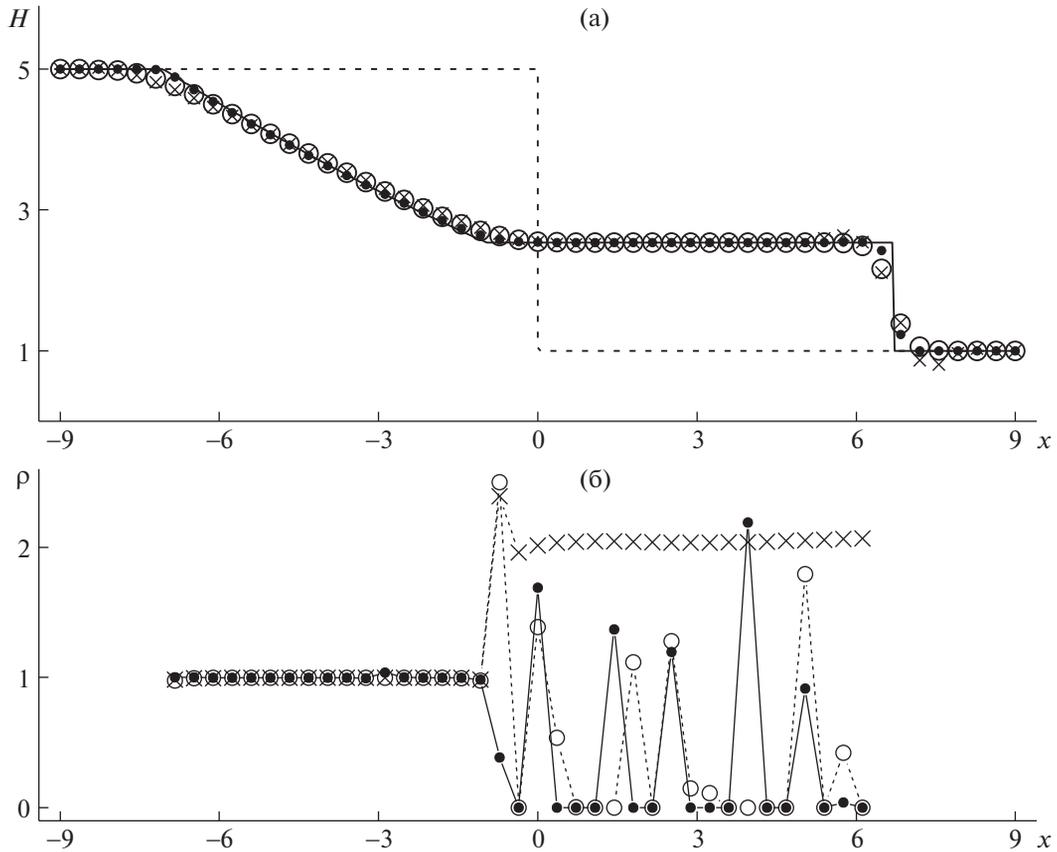
Решение этой задачи представляет собой ударную волну, распространяющуюся с постоянной скоростью  $D = 6.64$ , и центрированную волну понижения, между которыми расположена область постоянного течения. Численное решение задачи (1)–(3) будем строить на равномерной прямоугольной сетке  $x_j = jh, t_n = n\tau(h)$ , в которой временной шаг  $\tau(h)$  выбирается из условия устойчивости Куранта

$$\tau(h) = \frac{zh}{\max_{x,t} \max(|\lambda_+(\mathbf{u}(x, t))|, |\lambda_-(\mathbf{u}(x, t))|)}, \quad (4)$$

где  $\lambda_{\pm} = q/H \pm \sqrt{gH}$  – скорости характеристик в системе (1), (2),  $\mathbf{u}(x, t)$  – точное решение задачи (1)–(3),  $z = 0.45$  – коэффициент запаса.

На рис. 1 и 2 на момент времени  $T = 1$  приведены результаты численных расчетов задачи (1)–(3) по разностным схемам Русанова [12], CABARETM [10] и WENO5 [3]. На рис. 1а показано сравнение точного решения для глубины жидкости с результатами ее численных расчетов на разностной сетке с пространственным шагом  $h = 0.36$ . Из этого рисунка следует, что немонотонная схема Русанова имеет нефизические осцилляции на фронте ударной волны, которые отсутствуют в NFC-схемах CABARETM и WENO5. При этом схема CABARETM размывает ударную волну и слабые разрывы на границах центрированной волны понижения существенно меньше, чем схема Русанова и схема WENO5.

На рис. 1б приведены порядки локальной сходимости разностных решений, которые вычисляются по формуле Рунге



**Рис. 1.** Глубина жидкости (а) и локальные порядки сходимости (б) в момент времени  $T = 1$ , получаемые по схемам Русанова (крестики), CABARETM (точки) и WENO5 (кружки); на рисунке (а) сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – начальное значение глубины жидкости.

$$\tilde{\rho}_j = \log_{1/3} \frac{|\mathbf{v}_{h/3}(x_j(h), T) - \mathbf{u}(x_j(h), T)|}{|\mathbf{v}_h(x_j(h), T) - \mathbf{u}(x_j(h), T)|}, \quad (5)$$

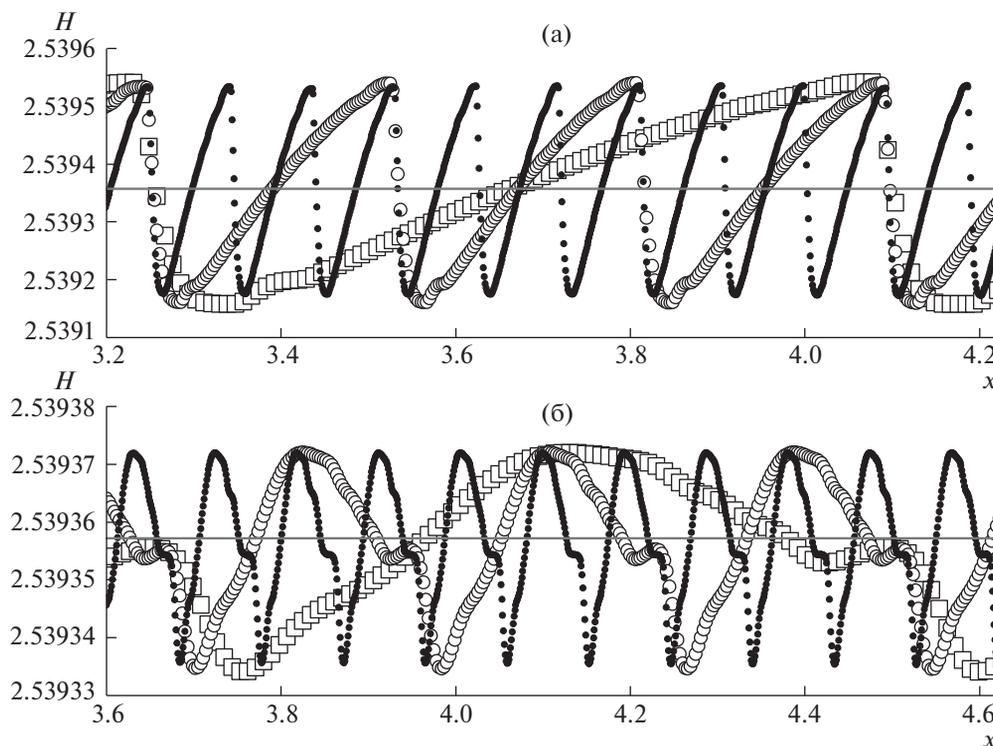
и корректируются при помощи функции ограничения

$$\rho_j = \begin{cases} \tilde{\rho}_j, & 0 \leq \tilde{\rho}_j \leq 2.5, \\ 0, & \tilde{\rho}_j < 0, \\ 2.5, & \tilde{\rho}_j > 2.5, \end{cases} \quad (6)$$

где  $x_j(h) = jh$ ,  $T = N\tau(h)$ ,  $N$  – натуральное число,  $\mathbf{v}_h$  и  $\mathbf{v}_{h/3}$  – численные решения, получаемые на сетках с пространственными шагами  $h$  и  $h/3$  соответственно. Расчеты порядков сходимости  $\rho_j$  проводились на базисной сетке с пространственным шагом  $h = 0.009$  и показаны на рис. 1б для каждого 40-го пространственного узла  $j = 40i$  разностной сетки. Из рис. 1б следует, что внутри центрированной волны понижения все три схемы имеют первый порядок сходимости, а в области постоянного течения между ударной волной и волной разрежения схема Русанова имеет второй порядок сходимости, в то время как значения  $\rho_j$ , получаемые по формулам (5), (6) для схем

CABARETM и WENO5, сильно осциллируют, в силу чего порядок локальной сходимости этих схем в области влияния ударной волны является неопределенным.

Для объяснения этих результатов были проведены серии тестовых расчетов на последовательности сжимающихся сеток, которые показали следующее. Разностное решение, получаемое по схеме Русанова, является монотонным (как по глубине, так и по расходу жидкости) внутри области влияния ударной волны вне некоторых окрестностей фронта ударной волны и слабого разрыва на правой границе волны понижения, где со вторым порядком сходится к точному постоянному решению. В то же время разностные решения, получаемые по NFC-схемам CABARETM и WENO5, имеют незатухающие осцилляции в области влияния ударной волны, структура которых зависит от значения параметра  $z$ , входящего в условие устойчивости (4). Из рис. 2а видно, что при  $z = 0.45$  на отрезке  $[3.2, 4.2]$ , расположенном внутри области влияния ударной волны, схема CABARETM имеет численные осцилляции, амплитуда которых приблизительно одинаковая при пространствен-



**Рис. 2.** Глубина жидкости в области постоянного течения, получаемая при численном расчете по схемам SABARETM (а) и WENO5 (б) на разностных сетках с пространственными шагами  $h = 0.009$  (квадратики),  $h = 0.003$  (кружки) и  $h = 0.001$  (точки); горизонтальная линия – точное решение.

ных шагах разностной сетки  $h_1 = h$ ,  $h_2 = h/3$  и  $h_3 = h/9$ , где  $h = 0.009$ , а длина волн уменьшается приблизительно в три раза при переходе от сетки с шагом  $h_i$  к сетке с шагом  $h_{i+1}$ , т.е. пропорционально отношению  $h_{i+1}/h_i$ . Из рис. 2б подобный результат следует для численных решений схемы WENO5 на отрезке  $[3.6, 4.6]$ . Аналогичное поведение осцилляций в области влияния ударной волны было получено в [13] при расчете DG-методом [4] задачи Шу–Ошера [14]. Из рис. 2 также следует, что амплитуда осцилляций, получаемых при расчете по схеме SABARETM, приблизительно на порядок больше, чем при расчете по схеме WENO5, в то время как длина осцилляционных волн почти одинаковая для обеих схем при фиксированном значении шага сетки  $h_i$ .

Таким образом, наблюдается следующая общая тенденция: в разностных решениях, получаемых по NFC схемам, может отсутствовать локальная сходимость к точному решению в областях влияния ударных волн. В этом случае, с учетом теоремы Лакса–Вендрофа [15], предельные разрывные решения консервативных NFC схем являются лишь слабыми решениями аппроксимируемой системы законов сохранения в областях влияния ударных волн.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН (проект № 21-51-53012), а также РНФ (проект № 21-11-00198).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат. сб.* 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
4. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // *Lecture Notes in Mathematics.* 1998. V. 1697. P. 151–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
5. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>

6. *Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
7. *Casper J., Carpenter M.H.* Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.
8. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем сквозного счета // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.  
<https://doi.org/10.1134/S1064562410040265>
9. *Михайлов Н.А.* О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048215050075>
10. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // Выч. технологии. 2018. Т. 23. № 2. С. 37–54.
11. *Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.  
<https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>
12. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
13. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Решение задач гидродинамики с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Тезисы докладов международной конференции “Современные проблемы прикладной математики и информатики”. С. 20–23 / Дубна, 22–27 августа 2012 г.
14. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. № 1 P. 32–78.
15. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237.

## ON CONVERGENCE OF FINITE-DIFFERENCE SHOCK-CAPTURING SCHEMES IN THE REGIONS OF SHOCK WAVES INFLUENCE

**O. A. Kovyorkina<sup>a,b</sup>, V. V. Ostapenko<sup>a,b</sup>, and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics, the Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

We perform a comparative accuracy study of the Rusanov, CABARETM, and WENO5 difference schemes used to compute the dam break problem for shallow water theory equations. We demonstrate that all three schemes have the first order of convergence inside the region occupied by a centered rarefaction wave, and the Rusanov scheme has the second order of convergence in the area of constant flow between the shock and the rarefaction wave, while in the CABARETM and WENO5 schemes there is no local convergence in this area. This is due to the fact that the numerical solutions obtained by the CABARETM and WENO5 schemes have undamped oscillations in the region of influence of the shock, the amplitude of which does not decrease with decreasing of the difference grid steps. As a result, taking into account the Lax-Wendroff theorem, the numerical solutions obtained by the conservative schemes CABARETM and WENO5 converge only weakly to the exact constant solution in the region of influence of the shock wave, in contrast to the Rusanov scheme, which locally converges with the second order to the exact solution in this region.

**Keywords:** Rusanov scheme, CABARET scheme, WENO5 scheme, shock, local convergence of the difference solution