ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 502, с. 46–51

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

МЕТОД ВКБ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

© 2022 г. С. А. Степин[1,*], член-корреспондент РАН А. И. Шафаревич[1,2]

Поступило 27.10.2021 г.
После доработки 01.11.2021 г.
Принято к публикации 16.12.2021 г.

Для класса уравнений типа Эмдена–Фаулера развит метод асимптотического интегрирования, использующий обобщенное преобразование Прюфера, и установлена связь с методом двухмасштабных разложений.

Ключевые слова: уравнение типа Эмдена–Фаулера, обобщенное преобразование Прюфера, асимптотическое интегрирование, метод двухмасштабных разложений

DOI: 10.31857/S2686954322010118

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера (см. [1])

$$u''(t) + q(t)|u(t)|^{\lambda-1}u(t) = 0, \tag{1}$$

где $q(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и параметр $\lambda > 0$. Положим

$$\alpha(t) := q'(t) \cdot q(t)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)}$$

и всюду в дальнейшем будем рассматривать класс уравнений (1), для которых выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha(t) = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_+}|d\alpha(t)| < \infty. \tag{2}$$

1. ЭТАЛОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЮФЕРА

Обозначим через $w(x)$ решение эталонного уравнения

$$w''(x) + |w(x)|^{\lambda-1}w(x) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$. Функция $w(x)$ – периодическая с амплитудой $A(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^{1/(\lambda+1)}$ и периодом $T(\lambda) = 4\dfrac{A(\lambda)}{\lambda+1}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\lambda+1},\dfrac{1}{2}\right)$, причем

$$w'(x)^2 + \frac{2}{\lambda+1}|w(x)|^{\lambda+1} \equiv 1. \tag{3}$$

Для получения асимптотических представлений решений уравнения (1) воспользуемся обобщенным преобразованием Прюфера (ср. [2])

$$u(t) = q(t)^{-1/(\lambda+3)}\rho(t)w(\theta(t)), \tag{4}$$

$$u'(t) = q(t)^{1/(\lambda+3)}\rho(t)^{(\lambda+1)/2}w'(\theta(t)), \tag{5}$$

где $\rho(t)$, $\theta(t)$ – новые переменные типа действие–угол. Важную роль при этом будет играть величина

$$\begin{aligned}\rho(t)^{\lambda+1} = q(t)^{-2/(\lambda+3)}u'(t)^2 &+ \\ + \frac{2}{\lambda+1}q(t)^{(\lambda+1)/(\lambda+3)}|u(t)|^{\lambda+1} &=: I[u](t),\end{aligned} \tag{6}$$

представляющая собой аналог адиабатического инварианта Эренфеста (см., например, [3]). Замена (4)–(5) – невырожденная с якобианом

$$\frac{\partial(u,u')}{\partial(\rho,\theta)} = -\frac{\lambda+1}{2}\rho(t)^{(\lambda+1)/2},$$

причем $\theta(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\theta'(t) = q(t)^{2/(\lambda+3)}\rho(t)^{(\lambda-1)/2} + \frac{1}{\lambda+1}\frac{q'(t)}{q(t)}w(\theta(t))w'(\theta(t)),$$

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = -\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+3)}\frac{q'(t)}{q(t)}\left(1-\frac{\lambda+3}{\lambda+1}|w(\theta(t))|^{\lambda+1}\right).$$

Отметим в этой связи, что обобщенное преобразование Лиувилля

$$u(t) = Cq(t)^{-1/(\lambda+3)}v(\xi(t)), \;\; \xi(t) = C^{(\lambda-1)/2}\int\limits_0^t q(s)^{2/(\lambda+3)}ds,$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: ststepin@mail.ru*

где $C > 0$, приводит уравнение (1) к виду

$$v''(\xi(t)) + |v(\xi(t))|^{\lambda}\operatorname{sign} v(\xi(t)) + \\ + C^{1-\lambda}\{q(t)^{-3/(\lambda+3)}(q(t)^{-1/(\lambda+3)})''\}v(\xi(t)) = 0.$$

Если выражение, стоящее здесь в фигурных скобках, достаточно мало на бесконечности в определенном смысле, то естественно ожидать, что решение $v(\xi(t))$ полученного уравнения будет асимптотически эквивалентно решению эталонного уравнения $w(\xi(t))$.

2. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ И ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ

Утверждение 1. *При выполнении условия* (2) *для любого решения* $u(t)$ *уравнения* (1) *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} I[u](t) =: J[u]$$

конечный или бесконечный. При этом $J[u] > 0$, *если* $\lambda \le 1$, *и* $J[u] < \infty$, *если* $\lambda \ge 1$.

Действительно, если $u(t)$ – решение уравнения (1), то справедливо равенство

$$dI[u](t) = -\frac{2}{\lambda+3}\alpha(t)d(u(t)u'(t))$$

и, таким образом, для произвольных $t \ge s \ge 0$ имеет место соотношение

$$I[u](t) = I[u](s) + \\ + \frac{2}{\lambda+3}(\alpha(s)u(s)u'(s) - \alpha(t)u(t)u'(t)) + \\ + \frac{2}{\lambda+3}\int_s^t u(r)u'(r)d\alpha(r). \tag{7}$$

Ввиду вытекающего из (6) неравенства

$$|u(t)u'(t)| \le A(\lambda)I[u](t)^{(\lambda+3)/2(\lambda+1)}, \tag{8}$$

ограниченность величины $I[u](t)$ в силу условий (2) влечет существование предела $J[u] \ge 0$. Если $J[u] = 0$, то из соотношения (7) и неравенства (8) следует оценка

$$I[u](t)^{(\lambda-1)/2(\lambda+1)} \le \frac{8}{\lambda+3}(\lambda+1)^{1/(\lambda+1)}\int_t^\infty |d\alpha(s)|, \tag{9}$$

которая может реализоваться лишь при $\lambda > 1$ (ср. [4]) и, таким образом, в этом случае имеет место неравенство

$$I[u](t) \le M(\lambda)\left(\int_t^\infty |d\alpha(s)|\right)^{2(\lambda+1)/(\lambda-1)} \tag{10}$$

с константой $M(\lambda) = (\lambda+1)^{2/(\lambda-1)}(8/(\lambda+3))^{2(\lambda+1)/(\lambda-1)}$. Если же величина $I[u](t)$ неограничена при $t \to \infty$, то снова в силу соотношения (7) и неравенства (8) выполнена оценка (9), причем необходимо $\lambda < 1$, и соответственно в этом случае

$$I[u](t) \ge M(\lambda)\left(\int_t^\infty |d\alpha(s)|\right)^{2(\lambda+1)/(\lambda-1)}. \tag{11}$$

Утверждение 2. *Если* $0 < J[u] < \infty$, *то соответствующее решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *имеет вид* (4)–(5), *где*

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = \rho_\infty = J[u]^{1/(\lambda+1)},$$

$$\theta(t) = (\rho_\infty^{(\lambda-1)/2} + o(1))\int_0^t q(s)^{2/(\lambda+3)}ds.$$

В самом деле, первое предельное соотношение непосредственно следует из утверждения 1 и равенства (6), а для доказательства второго предварительно заметим, что при сделанных предположениях

$$\int_0^\infty q(t)^{2/(\lambda+3)}dt = \infty.$$

Допуская противное, ввиду (2) приходим к заключению, что интеграл

$$\int^\infty \alpha(t)q(t)^{2/(\lambda+3)}dt = \int^\infty d\ln q(t)$$

сходится. Последнее возможно лишь в том случае, если существует $\lim_{t\to+\infty} q(t) > 0$, что очевидно несовместимо со сделанным нами допущением. Отсюда, в силу дифференциального уравнения для $\theta(t)$ и существования первого интеграла (3), вытекает, что $\theta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и, более того, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)\left(\int_0^t q(s)^{2/(\lambda+3)}ds\right)^{-1} = \lim_{t\to+\infty}\theta'(t)q(t)^{-2/(\lambda+3)} = \\ = \lim_{t\to+\infty}\left(\rho(t)^{(\lambda-1)/2} + \frac{1}{\lambda+1}\alpha(t)w(\theta(t))w'(\theta(t))\right) = \rho_\infty^{(\lambda-1)/2}.$$

Следствие 1. *В случае* $\lambda = 1$ *формулы* (4)–(5) *дают известные ВКБ-асимптотики решений линейного уравнения*

$$u(t) = q(t)^{-1/4}\sin\left((1+o(1))\int_0^t \sqrt{q(s)}ds\right)(1+o(1)),$$

$$u'(t) = q(t)^{1/4}\cos\left((1+o(1))\int_0^t \sqrt{q(s)}ds\right)(1+o(1)).$$

Утверждение 3. *Для произвольного* $\rho_\infty > 0$ *существует решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *вида* (4)–(5), *где*

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t)=\rho_\infty,$$
$$\theta(t)=(\rho_\infty^{(\lambda-1)/2}+o(1))\int_0^t q(s)^{2/(\lambda+3)}ds. \tag{12}$$

Действительно, в силу утверждения 2 достаточно показать, что функционал $J[u]$ принимает всевозможные положительные значения. Для фиксированных $C>0$ и $\varepsilon>0$ выберем $T>0$ так, что

$$(C+\varepsilon)^{(\lambda+3)/2(\lambda+1)}\frac{A(\lambda)}{\lambda+3}\int_T^\infty|d\alpha(t)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $I[u](T)=C$. Тогда, согласно соотношению (7) и неравенству (8), при $t\ge T$ имеем $|I[u](t)-C|<\varepsilon$ и, следовательно, $|J[u]-C|\le\varepsilon$. Выберем теперь C_0, C_1 и ε так, что $C_0+\varepsilon<C<C_1-\varepsilon$, и построим решения $u_0(t)$ и $u_1(t)$ уравнения (1), для которых $J[u_0]\le C_0+\varepsilon$ и $J[u_1]\ge C_1-\varepsilon$ соответственно. Пусть $u_\tau(t)$ – однопараметрическое семейство решений уравнения (1) с начальными условиями $u_\tau(0)=(1-\tau)u_0(0)+\tau u_1(0)$ и $u'_\tau(0)= =(1-\tau)u'_0(0)+\tau u'_1(0)$, где $\tau\in[0,1]$. По теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных $J[u_\tau]$ – непрерывная функция параметра τ и, стало быть, она принимает заданное значение C на отрезке $[0,1]$.

Наряду с $I[u](t)$ для решения $u(t)$ уравнения (1) введем в рассмотрение величину

$$E[u](t):=q(t)^{-(\lambda+1)/(\lambda+3)}I[u](t)=$$
$$=\frac{1}{q(t)}u'(t)^2+\frac{2}{\lambda+1}|u(t)|^{\lambda+1},$$

логарифмическая производная которой имеет вид $(\ln E[u](t))'=-\dfrac{u'(t)^2}{E[u](t)}\dfrac{q'(t)}{q(t)^2}$, и как следствие этого

$$E[u](t)/E[u](s)=\exp\left(-\int_s^t\frac{u'(r)^2}{E[u](r)}\frac{dq(r)}{q(r)^2}\right).$$

Положим

$$q_\pm(t):=\pm\frac{q(0)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t(|q'(s)|\pm q'(s))ds$$

так, что $q(t)=q_+(t)-q_-(t)$, причем $q'_\pm(t)\ge 0$, и таким образом справедливо

Утверждение 4. *Для произвольных $s\le t$ выполнена двусторонняя оценка*

$$E[u](s)\exp\left(-\int_s^t\frac{dq_+(r)}{q(r)}\right)\le E[u](t)\le$$
$$\le E[u](s)\exp\left(\int_s^t\frac{dq_-(r)}{q(r)}\right). \tag{13}$$

3. УРАВНЕНИЯ С КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ АСИМПТОТИКОЙ РЕШЕНИЙ

Комбинируя утверждения 1–4 с оценками (10) и (11) в случаях $\lambda>1$ и $\lambda<1$ соответственно, сформулируем условия, при которых все решения уравнения (1) имеют вид (4)–(5).

Теорема 1. *Пусть $q(t)\in C^2(\mathbb{R}_+)$ и выполнено условие* (2). *Если $\lambda<1$, то дополнительно потребуем, чтобы*

$$q(t)^{(\lambda+1)/(\lambda+3)}\left(\int_t^\infty|d\alpha(s)|\right)^{2(\lambda+1)/(1-\lambda)}\times$$
$$\times\exp\left(\int_0^t\frac{dq_-(s)}{q(s)}\right)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{14}$$

а в случае, когда $\lambda>1$, предположим, что

$$q(t)^{-(\lambda+1)/(\lambda+3)}\left(\int_t^\infty|d\alpha(s)|\right)^{2(\lambda+1)/(\lambda-1)}\times$$
$$\times\exp\left(\int_0^t\frac{dq_+(s)}{q(s)}\right)\to 0,\quad t\to\infty. \tag{15}$$

Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1) *имеет вид* (4)–(5), *где $\rho(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют асимптотическим соотношениям* (12).

Условия теоремы 1 по сути означают некоторую регулярность поведения коэффициента $q(t)$ на бесконечности. Если $q(t)$ монотонно возрастает, то условие (2) в теореме 1 можно заменить требованием сходимости интеграла

$$\widehat{S}_\lambda(t):=\int_t^\infty|d(q'(s)q(s)^{-3/2})|<\infty,\quad \lambda\le 1,$$
$$\widehat{S}_\lambda(t):=\int_t^\infty|d(q'(s)q(s)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)})|<\infty,\quad \lambda\ge 1,$$

причем дополнительные ограничения (14)–(15) выполняются автоматически (см. [4]). Класс уравнений (1), удовлетворяющих условию $\widehat{S}_\lambda(t)<\infty$, для решений $u(t)$ которых справедливы асимптотические формулы (4)–(5), может быть расширен так, чтобы в соответствующем разложении $q(t)=q_+(t)-q_-(t)$ компонента $q_-(t)$ была в определенном смысле подчиненной по отношению к $q_+(t)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $\widehat{S}_\lambda(t) < \infty$, *существует монотонно возрастающая функция* $\hat{q}(t)$ *такая, что* $q(t) \geq \hat{q}(t) > 0$, *причем отношение* $\dfrac{q(t)}{\hat{q}(t)}$ *ограничено, и кроме того*

$$\widehat{S}_\lambda(t)^{2(\lambda+1)/|\lambda-1|} \exp\left(\int_0^t \frac{dq_-(s)}{q(s)}\right) \to 0, \quad t \to \infty. \quad (16)$$

Тогда любое решение $u(t)$ *уравнения* (1) *имеет вид* (4)–(5), *где* $\rho(t)$ *и* $\theta(t)$ *удовлетворяют асимптотическим соотношениям* (12).

В случае $\lambda < 1$ сходимость интеграла $\widehat{S}_\lambda(t)$ очевидно влечет существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} q'(t)q(t)^{-3/2} = c$. В самом деле, если $c > 0$, то $q'(t)q(t)^{-3/2} > c/2$ начиная с некоторого достаточно большого t_0, что, после интегрирования, немедленно приводит к противоречию:

$$2(q(t_0)^{-1/2} - q(t)^{-1/2}) > \frac{c}{2}(t - t_0), \quad t \geq t_0.$$

Если же $c < 0$, то $q'(t)q(t)^{-3/2} < \dfrac{c}{2}$ при $t \geq t_0$ и, стало быть,

$$2(q(t_0)^{-1/2} - q(t)^{-1/2}) < \frac{c}{2}(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

откуда следует, что $q(t) \to 0$, $t \to \infty$. Последнее несовместимо с существованием монотонно возрастающей положительной функции $\hat{q}(t) \leq q(t)$ и, таким образом, $c = 0$, а тем более, $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, ввиду отделенности $q(t)$ от нуля. Далее, устремляя t к бесконечности в равенстве

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t q(s)^{(\lambda-1)/2(\lambda+3)} d(q'(s)q(s)^{-3/2}) + \frac{\lambda-1}{2(\lambda+3)} \int_0^t q'(s)^2 q(s)^{-2(\lambda+4)/(\lambda+3)} ds$$

с учетом условия $\widehat{S}_\lambda(t) < \infty$, приходим к следующему заключению

$$\int^\infty q'(s)^2 q(s)^{-2(\lambda+4)/(\lambda+3)} ds < \infty \quad (17)$$

и, следовательно, предположения теоремы обеспечивают выполнение условия (2). Наконец заметим, что

$$\int_t^\infty |d\alpha(s)| \leq \hat{q}(t)^{(\lambda-1)/2(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t) + \frac{1-\lambda}{2(\lambda+3)} \int_t^\infty q'(s)^2 q(s)^{-2(\lambda+4)/(\lambda+3)} ds \leq$$
$$\leq 2\hat{q}(t)^{(\lambda-1)/2(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t) + \alpha(t) \leq 3\hat{q}(t)^{(\lambda-1)/2(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t),$$

поскольку

$$\alpha(t) = -q(t)^{(\lambda-1)/2(\lambda+3)} \int_t^\infty d(q'(s)q(s)^{-3/2}).$$

Стало быть, ввиду ограниченности отношения $\dfrac{q(t)}{\hat{q}(t)}$, условие (16) обеспечивает выполнение (14) и, таким образом, в рассматриваемой ситуации применима теорема 1.

Аналогично предыдущему в случае $\lambda > 1$ из сходимости интеграла $\widehat{S}_\lambda(t)$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} q'(t)q(t)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)} = 0$, и стало быть, ввиду отделенности $q(t)$ от нуля, имеем $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Переходя к пределу при $t \to \infty$ в равенстве

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t q(s)^{(1-\lambda)/(\lambda+1)(\lambda+3)} d(q'(s)q(s)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)}) + \frac{1-\lambda}{2(\lambda+3)} \int_0^t q'(s)^2 q(s)^{-2(\lambda+4)/(\lambda+3)} ds$$

с использованием условия $\widehat{S}_\lambda(t) < \infty$, снова получаем (17) и, стало быть, выполняется условие (2). Далее установим оценку

$$\int_t^\infty |d\alpha(s)| \leq \hat{q}(t)^{(1-\lambda)/(\lambda+1)(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t) + \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda+3)} \int_t^\infty q'(s)^2 q(s)^{-2(\lambda+4)/(\lambda+3)} ds \leq$$
$$\leq 2\hat{q}(t)^{(1-\lambda)/(\lambda+1)(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t) + \alpha(t) \leq 3\hat{q}(t)^{(1-\lambda)/(\lambda+1)(\lambda+3)} \widehat{S}_\lambda(t),$$

где

$$\alpha(t) = -q(t)^{(1-\lambda)/(\lambda+1)(\lambda+3)} \int_t^\infty d(q'(s)q(s)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)}).$$

Наконец, учитывая ограниченность отношения $\dfrac{q(t)}{\hat{q}(t)}$ и равенство

$$q(t) \exp\left(\int_0^t \frac{dq_-(s)}{q(s)}\right) = q(0) \exp\left(\int_0^t \frac{dq_+(s)}{q(s)}\right),$$

приходим к заключению, что в рассматриваемом случае, когда $\lambda > 1$, условие (16) обеспечивает выполнение (15) и, таким образом, при сделанных предположениях снова применима теорема 1. Класс коэффициентов уравнения (1), заведомо удовлетворяющих условиям теоремы 2, образуют $q(t)$ такие, что $\widehat{S}_\lambda(t) < \infty$ и $\int^{\infty} \frac{dq_-(s)}{q(s)} < \infty$.

Несколько иначе выглядят условия, обеспечивающие асимптотическое поведение вида (4)–(5) решений уравнения (1) рассматриваемого типа, если коэффициент $q(t)$ монотонно убывает (см. [4]). При этом условие (2) в теореме 1 можно заменить требованием сходимости интеграла

$$\widetilde{S}_\lambda(t) := \int_t^{\infty} |d(q'(s)q(s)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)})| < \infty, \quad \lambda \le 1,$$

$$\widetilde{S}_\lambda(t) := \int_t^{\infty} |d(q'(s)q(s)^{-3/2})| < \infty, \quad \lambda \ge 1,$$

а дополнительные ограничения (14)–(15) снова выполняются автоматически. Класс уравнений (1), удовлетворяющих условию $\widetilde{S}_\lambda(t) < \infty$, для решений $u(t)$ которых справедливы асимптотические формулы (4)–(5), устойчив относительно в определенном смысле малого возмущения свойства монотонности коэффициента $q(t)$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* $\widetilde{S}_\lambda(t) < \infty$, *существует монотонно убывающая функция* $\tilde{q}(t)$ *такая, что* $\tilde{q}(t) \ge q(t) > 0$, *причем отношение* $\frac{\tilde{q}(t)}{q(t)}$ *ограничено,*

$$\widetilde{S}_\lambda(t)^{2(\lambda+1)/|\lambda-1|} \exp\left(\int_0^t \frac{dq_+(s)}{q(s)}\right) \to 0, \quad t \to \infty,$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to+\infty} q'(t)q(t)^{-(\lambda+2)/(\lambda+1)} = 0$ *при* $\lambda < 1$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} q'(t)q(t)^{-3/2} = 0$ *при* $\lambda > 1$. *Тогда любое решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *имеет вид* (4)–(5), *где* $\rho(t)$ *и* $\theta(t)$ *удовлетворяют асимптотическим соотношениям* (12).

Как известно (см., например, [4]) сходимость интеграла

$$\int^{\infty} t^{2-\kappa+\lambda(\kappa-1)} q(t)dt < \infty, \quad \kappa = 1, 2,$$

обеспечивает существование у уравнения (1) решения с асимптотикой

$$u(t) = t^{\kappa-1}(1 + o(1)), \quad t \to \infty.$$

С учетом этого приходим к заключению о том, что условия сформулированной выше теоремы точны в степенной шкале коэффициентов $q(t) = t^{\gamma}$. Действительно, при $\lambda \ge 1$ условие $\widetilde{S}_\lambda(t) < \infty$ выполняется, когда $\gamma > -2$, а если $\gamma < -2$, то у соответствующего уравнения (1) существует решение вида $u(t) = 1 + o(1)$, $t \to \infty$, для которого $J[u] = 0$ и не могут иметь место асимптотические формулы (4)–(5). В свою очередь, при $\lambda \le 1$ условие $\widetilde{S}_\lambda(t) < \infty$ выполнено, если $\gamma > -(\lambda+1)$, а в случае $\gamma < -(\lambda+1)$ уравнение (1) имеет решение с асимптотикой $u(t) = t(1 + o(1))$, $t \to \infty$, для которого $J[u] = \infty$ и снова не справедливо представление (4)–(5). Наконец, при $\lambda = 1$ и $\gamma = -2$ в случае линейного уравнения (1) для описания поведения его решения $u(t) = \sqrt{t}\sin(\sqrt{3}t/2)$ также не применима формула ВКБ.

4. СВЯЗЬ С МЕТОДОМ ДВУХМАСШТАБНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В рамках нелинейной модификации метода ВКБ (см. [5, 6]) решение уравнения вида

$$\varepsilon^2 u''(t) + f(t,u) = 0 \tag{18}$$

при малых значениях параметра ε ищется в виде асимптотического ряда

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi(t)/\varepsilon, t). \tag{19}$$

Данный подход известен под названием метода двухмасштабных разложений, где наряду с исходным “медленным” временем t вводится “быстрая” переменная $\tau = \xi(t)/\varepsilon$. Подстановка двухмасшабного разложения (19) в (18) и приравнивание нулю коэффициентов при последовательных степенях параметра ε приводит к рекуррентной системе уравнений для $u_n(\tau,t)$, первые два из которых имеют вид

$$\xi'(t)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + f(t,u_0) = 0, \tag{20}$$

$$\xi'(t)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial u}(t,u_0)u_1 = -2\xi'(t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial t} - \xi''(t)\frac{\partial u_0}{\partial \tau}. \tag{21}$$

Уравнение (20) содержит две неизвестные функции $u_0(\tau,t)$ и $\xi(t)$, и найти их можно, лишь исследуя уравнение (21) для первой поправки $u_1(\tau,t)$. В случае, когда уравнение (20) имеет периодическое решение $u_0(\tau,t)$ с периодом $T = T(t)$, выполнение соотношения

$$\int_0^T \frac{\partial u_0}{\partial \tau}\left(2\xi'(t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial t} + \xi''(t)\frac{\partial u_0}{\partial \tau}\right)d\tau = 0 \tag{22}$$

является (см., например, [6]) необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (21) имело T-периодическое решение $u_1(\tau, t)$. Таким образом, для определения $u_0(\tau, t)$ и $\xi(t)$ к уравнению (20) следует присоединить условие (22). Этот подход позволяет эффективно находить главный член $u_0(\xi(t)/\varepsilon, t)$ асимптотического разложения (19), представляющий собой нелинейный аналог ВКБ-асимптотики. Для уравнения (18) типа Эмдена—Фаулера соответствующий результат разумеется согласуется с формулами (4)—(5).

Предложение 1. *В случае* $f(t, u) = q(t)|u|^{\lambda}\operatorname{sign} u$, *где* $q(t) > 0$, *для произвольного* $C > 0$ *уравнение* (18) *имеет формальное асимптотическое решение* (19) *с главным членом*

$$u_0(\xi(t)/\varepsilon, t) = Cq(t)^{-1/(\lambda+3)} w(\xi(t)/\varepsilon),$$

$$\xi(t) = C^{(\lambda-1)/2}\int_0^t q(s)^{2/(\lambda+3)} ds,$$

где $w(x)$ — *решение эталонного уравнения.*

В рассматриваемом случае решение уравнения (20) будем искать в форме $u_0(\tau, t) = a(t)w(\tau)$, где $a(t) > 0$. При этом $\xi'(t)^2 = q(t)a(t)^{\lambda-1}$, а соотношение (22) преобразуется к виду

$$(a(t)^2\xi'(t))'\int_0^T w'(\tau)^2 d\tau = 0,$$

откуда следует, что $a(t)^2\xi'(t) = \mathrm{const}$ — постоянная, параметризующая семейство формальных асимптотических решений. Фиксируя эту постоянную, находим

$$a(t) = Cq(t)^{-1/(\lambda+3)}, \quad \xi'(t) = C^{(\lambda-1)/2} q(t)^{2/(\lambda+3)}.$$

Таким образом, получена явная формула для главного члена $u_0(\xi(t)/\varepsilon, t) = a(t)w(\xi(t)/\varepsilon)$ асимптотического разложения (19), которая согласуется с (4)—(5).

Отметим, что для определения следующих поправок теории возмущений получается рекуррентная система неоднородных линейных уравнений относительно $u_n(\tau, t)$, в которых "медленное" время t играет роль параметра. О приложениях описанного выше метода двухмасштабных разложений см., например, [7, 8].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора (С.А. Степин) поддержана грантом РФФИ 19-01-00474, работа второго автора (А.И. Шафаревич) поддержана грантом РНФ 21-11-00341.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
2. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
4. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
5. *Кузмак Г.Е.* // ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 515—526.
6. *Федорюк М.В.* // ЖВММФ. 1986. Т. 26. № 2. С. 198—210.
7. *Карасев М.В.,Перескоков А.В.* // Изв. РАН, сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 92—151.
8. *Калякин Л.А.* // УМН. 2008. Т. 63. № 5. С. 3—72.

WKB METHOD FOR NONLINEAR EQUATIONS OF EMDEN-FOWLER TYPE

S. A. Stepin[a] and Corresponding Member of the RAS A. I. Shafarevich[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

A method of asymptotic integration based on application of generalized Prufer transform is elaborated for a class of Emden—Fowler type equations and a relationship with two-scales expansions method is established.

Keywords: Emden—Fowler type equation, generalized Prufer transform, asymptotic integration, two-scales expansions method