

УДК 519.2

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ДАННЫМИ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАЛОГО МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА И ПРАВОЙ ЧАСТИ ПО ЧАСТИЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ

© 2022 г. В. Б. Левенштам^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Е.И.Моисеевым 03.09.2021 г.

Поступило 07.09.2021 г.

После доработки 07.09.2021 г.

Принято к публикации 22.12.2021 г.

Рассматривается задача Коши для одномерного гиперболического уравнения, младший коэффициент и правая часть которого осциллируют по времени с большой частотой, причем амплитуда младшего коэффициента мала. Исследован вопрос о восстановлении этих осциллирующих функций по заданной в некоторой точке пространства частичной асимптотике решения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, быстро осциллирующие данные, асимптотические методы, обратная задача

DOI: 10.31857/S2686954322010088

Теория обратных коэффициентных задач для уравнений математической физики последние четыре-пять десятилетий интенсивно развивается. К настоящему времени она разработана с большой полнотой (см., например, монографии [1–4]), однако обратные задачи для уравнений с быстро осциллирующими данными в этой теории почти не представлены. Вместе с тем обратные задачи для уравнений такого типа часто встречаются при математическом моделировании физических, химических и иных процессов, протекающих в средах с неизвестными характеристиками, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т.п. полей. Укажем некоторые примеры таких уравнений: уравнение теплопроводности для стержня, через который пропускается высокочастотный электрический ток, вследствие чего в стержне образуются высокочастотные тепловые источники; волновое уравнение, описывающее колебания струны или стержня под действием высокочастотных внешних сил (вспомним знаменитую задачу В.Н. Челомея о высокочастотных сжатиях–растяжениях стержня, стабилизирующих его прямолинейную

форму); уравнение переноса вещества в несжимаемой жидкости при наличии высокочастотных источников; уравнения тепловой конвекции жидкости в сосуде при его высокочастотных вибрациях и др. Сказанное свидетельствует об актуальности развития теории обратных задач для уравнений математической физики с быстро осциллирующими данными.

В данной работе рассматривается задача Коши для одномерного гиперболического уравнения, младший коэффициент и правая часть которого осциллируют по времени с большой частотой ω , причем амплитуда младшего коэффициента пропорциональна ω^{-1} . Исследован вопрос о восстановлении этих осциллирующих функций (точнее, их неизвестных высокочастотных сомножителей) по заданной в некоторой точке пространства четырехчленной асимптотике решения. При решении задачи используется неклассический алгоритм (см. [5, 6]) решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими по времени данными.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть $T > 0$, $\Pi = \{(x, t): x \in R, t \in [0, T]\}$, $Q = \{(t, \tau): t \in [0, T], \tau \in [0; \infty)\}$. В полосе Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω :

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

² Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: vlevenshtam@yandex.ru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega} A(x, t) \rho(t, \omega t) u &= B(x, t) r(t, \omega t), \\ u(x, 0) &= d_0(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= d_1(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Фигурирующие здесь функции $A(x, t), B(x, t)$ и $d_0(x), d_1(x)$ определены в полосе Π и на прямой R соответственно, вещественны и удовлетворяют условиям $A, A_t, A_{tx} \in C^4(\Pi)$, $A_{x^2} \in C^2(\Pi)$, $B, B_{x^2} \in C^2(\Pi)$, $B_t, B_x, B_{tx} \in C^4(\Pi)$, $d_0 \in C^5(R)$, $d_1 \in C^4(R)$. Здесь символом $C^m(\Pi)$, $m \in N$, (аналогично $C^m(R)$) обозначен линейал, состоящий из непрерывных на Π функций $s(x, t)$, обладающих непрерывными производными

$$\frac{\partial^{i+j} s(x, t)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad 0 \leq i + j \leq m.$$

Вещественные функции $\rho(t, \tau)$ и $r(t, \tau)$ определены в Q и 2π -периодичны по τ . Представим их в виде

$$\rho(t, \tau) = \rho_0(t) + \rho_1(t, \tau), \quad r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau),$$

где ρ_0 и r_0 – средние по τ (на периоде) функций ρ и r соответственно. Например,

$$\rho_0(t) = \langle \rho(t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(t, \tau) d\tau.$$

Пусть $\rho_0 \in C^2(R)$, $\rho_1 \in C^{5,0}(Q)$, $r_0 \in C^2(R)$, $r_1 \in C^{5,0}(Q)$. Здесь символом $C^{m,0}(Q)$, $m \in N$, обозначен линейал, состоящий из непрерывных на Q функций, обладающих непрерывными на Q производными по t до m -го порядка включительно. Предполагая вначале, что функции A, B, d_0, d_1, ρ и r известны, мы аналогично [5, первый раздел], где рассматривается начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения, построим четырехчленную асимптотику решения $u_\omega(x, t)$, $\omega \gg 1$ в виде:

$$\begin{aligned} u_\omega^4(x, t) &= u_0(x, t) + \omega^{-1} u_1(x, t) + \\ &+ \sum_{k=2}^3 \omega^{-k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)). \end{aligned}$$

Функции $u_i(x, t)$ и $v_j(x, t, \tau)$ заданы на множествах Π и $\Pi \times [0; \infty)$ соответственно и являются решениями линейных однозначно разрешимых задач, которые аналогичны задачам из [5] для одноименных функций. Здесь мы выпишем лишь задачи для функций u_2, u_3 , а также для вспомогательной функции v_4 , которая используется при построении u_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} &= -A(x, t) \rho_0(t) u_1(x, t), \\ u_2(x, 0) &= -v_2(x, 0, 0), \\ \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} &= -\frac{\partial v_2(x, 0, 0)}{\partial t} - \frac{\partial v_3(x, 0, 0)}{\partial \tau}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_4}{\partial \tau^2} &= -2 \frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - \\ &- A(x, t) \rho_1(t, \tau) u_1(x, t), \\ v_4(x, t, \tau + 2\pi) &= v_4(x, t, \tau), \\ \langle v_4(x, t, \tau) \rangle &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} &= -A(x, t) \rho_0(t) u_2(x, t) - \\ &- A(x, t) \langle \rho_1(t, \tau) v_2(x, t, \tau) \rangle, \\ u_3(x, 0) &= -v_3(x, 0, 0), \\ \frac{\partial u_3(x, 0)}{\partial t} &= -\frac{\partial v_3(x, 0, 0)}{\partial t} - \frac{\partial v_4(x, 0, 0)}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для $M > 0$ определим прямоугольник $\Pi_M = \{(x, t) \in R^2: |x| \leq M, t \in [0; T]\}$.

Теорема 1. При любом $M > 0$ справедлива оценка

$$\|u_\omega(x, t) - u_\omega^4(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Предполагая теперь, что функции A, B, d_0 и d_1 известны, а ρ и r – неизвестны, сформулируем обратную задачу о восстановлении ρ и r . Для этого введем в рассмотрение следующие объекты: $x_0 \in R$ – точка, в которой $A(x_0, t) \neq 0$, $B(x_0, t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $d_0(x_0) \neq 0$; $q_0 \in C^5([0; T])$ – функция, такая что $q_0(t) \neq 0$, $t \in [0; T]$, $q_0(0) = d_0(x_0)$, $q_0(0)' = d_1(x_0)$; $\lambda_1(t, \tau)$ – определенная и непрерывная на множестве Q функция, 2π -периодическая по τ с нулевым средним, для которой: $\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t \partial \tau} \in C^{5,0}(Q)$;

$q_1 \in C^4([0; T])$ – функция, для которой $q_1(0) = 0$, $q_1'(0) = -\frac{\partial \lambda_1(0, 0)}{\partial \tau}$; $\lambda_2(t, \tau)$ – определенная и непрерывная на множестве Q функция, 2π -периодическая по τ с нулевым средним, такая что $\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \tau^2} \in C^{5,0}(Q)$; q_2 – функция, определенная на отрезке $t \in [0; T]$ равенством $q_2(t) = u_2(x_0, t)$, где u_2 – решение задачи (2) с известными функциями ρ_0, u_1, v_2 и v_3 , которые однозначно определяются на предыдущих этапах исследования (при решении задач для соответствующих младших коэффициентов асимптотики); q_3 – функция, определенная на отрезке $t \in [0; T]$ равенством $q_3 = u_3(x_0, t)$, где u_3 –

решение задачи (4) с известными функциями $\rho_0, \rho_1, u_2, v_2, v_3$ и v_4 , которые также однозначно находятся на предыдущих этапах (в частности последняя служит единственным решением задачи (3)).

Обратная задача состоит в определении функций $\rho(t, \tau)$ и $r(t, \tau)$, принадлежащих указанным выше функциональным классам, при которых решение $u_\omega(x, t)$ задачи (1) удовлетворяет асимптотической формуле

$$\|u_\omega(x_0, t) - (q_0(t) + \omega^{-1}q_1(t) + \omega^{-2}[q_2(t) + \lambda_1(t, \omega t)] + \omega^{-3}[q_3(t) + \lambda_2(t, \omega t)])\|_{C([0, T])} = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. *Обратная задача однозначно разрешима.*

З а м е ч а н и е. Решение обратной задачи сводится к решению двух уравнений Вольтерра 2-го рода.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Основной результат работы (теорема 2) получен при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 458 с.
2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Изд. Ин-та математики, 2009. 458 с.
4. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 271 с.
5. Бабич П.В., Левенштам В.Б. Восстановление быстро осциллирующей правой части волнового уравнения по частичной асимптотике решения // Владикавказ. матем. журн. 2020. Т. 22. № 4. С. 28–44.
6. Левенштам В.Б. Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 412–425.

HYPERBOLIC EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATING DATA. RECONSTRUCTION OF THE SMALL JUNIOR COEFFICIENT AND THE RIGHT SIDE THE PARTIAL ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION

V. B. Levenshtam^{a,b}

^a Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^b Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We consider the Cauchy problem for the one-dimensional hyperbolic equation with the junior term. The junior coefficient and right hand side oscillates in time with a high frequency, the amplitude of the junior coefficient is small. We study the way of reconstruction these oscillating functions using partial asymptotics of the solution, which are given at a certain point of the domain.

Keywords: hyperbolic equation, rapidly oscillating data, asymptotic methods, inverse problem