

УДК 517.957

О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ВЯЗКОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЕ

© 2022 г. М. А. Кисатов^{1,*}, В. Н. Самохин^{2,**}, Г. А. Чечкин^{1,3,4,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 13.09.2021 г.

Поступило 15.09.2021 г.

После доработки 15.09.2021 г.

Принято к публикации 22.12.2021 г.

Приведено обобщение теоремы существования и единственности классического решения системы уравнений температурного пограничного слоя в вязкой среде с реологическим законом О.А. Ладыженской.

Ключевые слова: пограничный слой жидкости, вязкая среда, реологический закон О.А. Ладыженской, тепловой пограничный слой

DOI: 10.31857/S2686954322010076

ВВЕДЕНИЕ

В случае если температуры поверхности пластины и набегающего потока различны, то вблизи поверхности формируется тепловой пограничный слой, в пределах которого температура изменяется от ее значения у стенки до температуры невозмущенного потока на границе теплового пограничного слоя. При этом между поверхностью пластины и потоком жидкости протекает процесс теплообмена, см. [1].

Таким образом, при обтекании тела потоком жидкости вблизи стенки образуются динамический и тепловой пограничные слои, которые представляют собой границы соответствующих фронтов возмущения, отделяющие возмущенный поток от невозмущенного.

В работе [2] рассмотрена система уравнений температурного пограничного слоя для плоско-

параллельного, установившегося, вынужденного конвективного течения ньютоновской жидкости.

В данной работе изучается система уравнений температурного пограничного слоя для плоскопараллельного течения жидкости с реологией Ладыженской (см. рис. 1¹). При этом изучается тепловой пограничный слой, который образуется на границе двух жидкостей или жидкости и газа (пограничный слой Марангони).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система уравнений температурного пограничного слоя для плоскопараллельного течения жидкости с реологическим законом Ладыженской:

$$\begin{aligned} v \left(1 + 3k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} &= -U U_x, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{v}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) предполагается заданной в области

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < y < \infty\}, \quad X > 0.$$

Вместе с системой уравнений (1), (2) рассматриваются граничные условия вида

¹ <https://slide-share.ru/konvektivnij-teploobmen-v-odnofaznikh-sredakh1prodolzhenie-3-171377>

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский политехнический университет, Москва, Россия

³ Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

⁴ Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

*E-mail: kisatov@mail.ru

**E-mail: avt428212@yandex.ru

***E-mail: chekchin@mech.math.msu.su

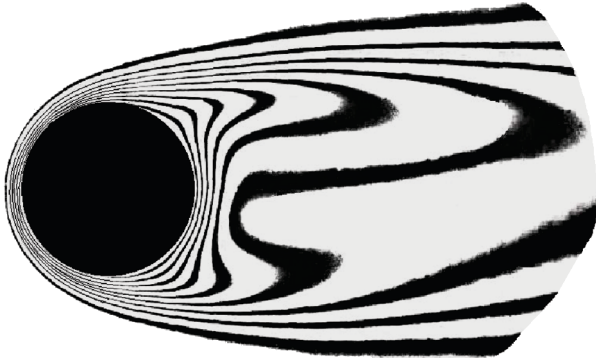


Рис. 1. Плоскопараллельный тепловой слой с конвекцией.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \hat{A}(x), \quad u|_{x=0} = u_0(y), \quad v|_{y=0} = v_0(x),$$

$$u(x, y) \rightarrow U(x) \quad (3)$$

равномерно по $x \in [0, X]$ при $y \rightarrow +\infty$,

$$T|_{y=0} = T_w(x), \quad T(x, y) \rightarrow T_\infty \quad (4)$$

равномерно по $x \in [0, X]$ при $y \rightarrow +\infty$.

В задаче (1)–(4) неизвестными являются продольная и поперечная компоненты скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$ течения в точке (x, y) , а также температура $T(x, y)$ среды в этой точке. Постоянные v , a и c , являющиеся физическими параметрами рассматриваемой жидкости, считаются заранее известными. Постоянная T_∞ является температурой внешнего потока. Также заранее известными считаются функции $U(x)$, $\hat{A}(x)$, $v_0(x)$, $T_w(x)$, которые, соответственно, обозначают скорость внешнего течения жидкости, поверхностное натяжение на границе $\{y = 0\}$, скорость вдува (отсоса) жидкости в поток (из потока) в точке x нижней стенки области, температуру стенки в точке x .

Поскольку функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ в задаче (1), (3) не зависят от температуры $T(x, y)$, то задача (1), (3) может быть решена отдельно.

Для задачи (1), (3) ранее установлена теорема единственности решения, см. [3]. Предположим, что функции u и v удовлетворяют уравнениям (1) в области

$$Q = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\},$$

непрерывны в $\bar{Q}$ и удовлетворяют условиям (3); пусть, кроме того, выполняются неравенства

$$0 < u < C_1, \quad \psi > 0, \\ C_2 y \leq u \leq C_3 y, \quad 0 < y < y_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq C_4, \quad (x, y) \in Q,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 и y_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда u, v — единственное решение задачи (1), (3) с указанными свойствами.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В этом разделе с учетом указанных условий на функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ приводится доказательство теоремы существования и единственности для классического решения $T(x, y) \in C^2(Q) \cup C(\bar{Q})$ задачи (2), (4). Без ограничения общности предполагается, что коэффициент a равен единице. Для удобства обозначим правую часть уравнения (2) через $f(x, y)$.

Теорема 1. Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y) \in C(\bar{Q})$ удовлетворяют системе уравнений (1), условиям (3) и условиям единственности решения. Пусть также функция $f(x, y) \in C(Q_X)$ локально гёльдерова в Q с некоторым показателем Гёльдера $0 < \gamma \leq 1$, функция T_w является дифференцируемой на $[0, X]$ и ее производная ограничена на $[0, X]$. Пусть также

$$\int_0^{+\infty} \exp \left(\int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) dt < \infty,$$

где $\beta(y) = \max_{0 \leq x \leq X} v(x, y)$, а для функции $g(y) = \max_{0 \leq x \leq X} |f(x, y)|$ выполнено

$$\int_0^{+\infty} g(\tau) \exp \left(- \int_0^\tau \beta(s) ds \right) d\tau < \infty.$$

Тогда задача (2), (4) имеет в Q единственное классическое ограниченное решение $T(x, y)$.

Доказательство. С помощью замены переменных

$$x = x, \quad \eta = 1 - \frac{1}{1 + y} \quad (5)$$

область $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ переводится в открытый прямоугольник $D = \{(x, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < \eta < 1\}$. Перепишем задачу (2), (4) в новых переменных, см. (5). Для этого выпишем частные производные, входящие в уравнение (2):

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{(1 + y)^2} = (1 - \eta)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -\frac{2}{(1 + y)^3} = -2(1 - \eta)^3,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (1 - \eta)^2 \frac{\partial T}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \\ &= (1 - \eta)^4 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2(1 - \eta)^3 \frac{\partial T}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Далее всюду будем предполагать, что $u = u(x, y(\eta))$, $v = v(x, y(\eta))$, $f = f(x, y(\eta))$. С учетом последних вычислений и замены (5) уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} L(T) \equiv & \left((1 - \eta)^4 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2(1 - \eta)^3 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \\ & - u \frac{\partial T}{\partial x} - v(1 - \eta)^2 \frac{\partial T}{\partial \eta} = f. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые в последнем уравнении, имеем окончательно задачу в терминах замены из (5):

$$L(T) \equiv c(\eta) \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial T}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial T}{\partial \eta} = f, \quad (6)$$

$$T|_{\eta=0} = T_w, \quad T|_{\eta=1} = T_\infty. \quad (7)$$

Здесь

$$c(\eta) = (1 - \eta)^4, \quad b(x, \eta) = -(1 - \eta)^2(2(1 - \eta) + v).$$

Докажем единственность решения задачи (6), (7). Пусть $T_1(x, \eta)$, $T_2(x, \eta)$ — два решения задачи (6), (7). Обозначим разность этих решений за $T(x, \eta) = T_1(x, \eta) - T_2(x, \eta)$.

При произвольном $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $x \in [0, X]$, $\eta = 1 - \delta(\varepsilon)$ было выполнено $|T(x, \eta)| \leq \varepsilon$. Тогда функция $V(x, \eta) = T(x, \eta) - \varepsilon$ удовлетворяет уравнению $L(V) = 0$ в области D и неравенству $V(x, \eta) \leq 0$ при $x \in [0, X]$, $\eta = 0$, $\eta = 1 - \delta(\varepsilon)$. Покажем, что $V \leq 0$ в прямоугольнике

$$D_\varepsilon = \{(x, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < \eta < 1 - \delta(\varepsilon)\}.$$

Положим

$$V(x, \eta) = H(\eta)R(x, \eta),$$

где функция $H(\eta)$ предполагается положительной и из класса $C^1([0, 1 - \delta(\varepsilon)])$. Далее будем предполагать $H = H(\eta)$, $R = R(x, \eta)$. Рассмотрим оператор $L(V)$. Выпишем частные производные, входящие в уравнение $L(V) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} &= H'R + H \frac{\partial R}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} &= H''R + 2H' \frac{\partial R}{\partial \eta} + H \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = H \frac{\partial R}{\partial x}.$$

С учетом вычисленных производных получаем следующий вид оператора $L(V)$:

$$\begin{aligned} L(V) \equiv & c \left(H''R + 2H' \frac{\partial R}{\partial \eta} + H \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} \right) - \\ & - uH \frac{\partial R}{\partial x} + b \left(H'R + H \frac{\partial R}{\partial \eta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Преобразовав слагаемые в последнем уравнении, получаем

$$\begin{aligned} L(V) \equiv & cH \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + (2cH' + bH) \frac{\partial R}{\partial \eta} - \\ & - uH \frac{\partial R}{\partial x} + (bH' + cH'')R = 0. \end{aligned}$$

Поделив обе части уравнения $L(V) = 0$ на функцию $H(\eta)$, выводим следующее уравнение:

$$L(R) \equiv c \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial R}{\partial x} + B \frac{\partial R}{\partial \eta} + FR = 0,$$

где

$$B(x, \eta) = \frac{2cH'}{H} + b, \quad F(x, \eta) = \frac{bH' + cH''}{H}.$$

Функция $H(\eta) > 0$ выбирается так, чтобы для некоторой постоянной $F_0 < 0$ при всех $\eta \in [0, 1 - \delta(\varepsilon)]$ выполнялось неравенство $F(x, \eta) \leq F_0$.

Далее введем функцию

$$\Phi(x) = \int_x^X \frac{dt}{U(t)}, \quad 0 < x < X.$$

Тогда, учитывая вид функции $\Phi(x)$ и условия, наложенные на $u(x, y(\eta))$, имеем в D_ε неравенство

$$L(\Phi) = F(x, \eta)\Phi(x) + \frac{u(x, y(\eta))}{U(x)} \leq F_0\Phi(x) + 1.$$

Поскольку $F_0 < 0$ и $\Phi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0 + 0$, можно найти такое число $0 < x_0 < X$, что при всех $0 < x \leq x_0$, $0 < \eta < 1 - \delta(\varepsilon)$ будет выполнено $L(\Phi) \leq 0$. Тогда при любом $\lambda > 0$ для линейного оператора L выполняется неравенство

$$\begin{aligned} L(\lambda\Phi(x) - R(x, \eta)) &= L(\lambda\Phi(x)) - L(R(x, \eta)) \leq 0, \\ 0 < x &\leq x_0, \quad 0 < \eta < 1 - \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Далее, для каждого $\lambda > 0$ находится число $0 < x_1(\lambda) < x_0$ такое, чтобы $\lambda\Phi(x) - R(x, \eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1 - \delta(\varepsilon)$, $0 < x \leq x_1$. Кроме того, $\lambda\Phi(x) - R(x, \eta) \geq 0$ при $\eta = 0$, $0 < x \leq X$ и при $\eta = 1 - \delta(\varepsilon)$, $0 < x \leq X$. По принципу максимума $\lambda\Phi(x) - R(x, \eta) \geq 0$ при $0 < x \leq x_0$, $0 \leq \eta \leq 1 - \delta(\varepsilon)$. В силу произвольности $\lambda > 0$ получаем $R(x, \eta) \leq 0$

при $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq \eta \leq 1 - \delta(\varepsilon)$. Снова применяя принцип максимума, получаем $R(x, \eta) \leq 0$ в $\overline{D_\varepsilon}$. Значит $T(x, \eta) \leq \varepsilon$ в $\overline{D_\varepsilon}$. В силу симметрии между T_1 и T_2 получим $|T(x, \eta)| \leq \varepsilon$ в $\overline{D_\varepsilon}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $T_1 = T_2$ в $\overline{D}$. Единственность решения установлена.

Докажем существование решения задачи (6), (7). При каждом $0 < \delta < \frac{1}{4}$ уравнение (6) рассмотрим в прямоугольнике

$$D_\delta = \{(x, \eta) \in \mathbb{R}^2: \delta < x \leq X, \delta < \eta < 1 - \delta\}$$

со следующими граничными условиями:

$$T|_{\eta=\delta} = T_w(x), \quad T|_{\eta=1-\delta} = T_\infty, \quad T|_{x=\delta} = T_1^\delta(\eta), \quad (8)$$

где непрерывная на отрезке $[\delta, 1 - \delta]$ функция $T_1^\delta(\eta)$ удовлетворяет свойствам

$$T_1^\delta(\eta) = T_w(\delta) \quad \text{при} \quad \eta \leq \frac{1}{3},$$

$$T_1^\delta(\eta) = T_\infty \quad \text{при} \quad \eta \geq \frac{2}{3},$$

$$|T_1^\delta(\eta)| \leq M = \max\{|T_\infty|, \max_{0 \leq x \leq X} |T_w(x)|\} \\ \text{при} \quad \delta \leq \eta \leq 1 - \delta.$$

Решение $T^\delta(x, \eta)$ задачи (6), (8) существует и, согласно принципу максимума для невырожденных параболических уравнений (см., например, [4]),

$$|T^\delta(x, \eta)| \leq M, \quad (9)$$

где M не зависит от δ . В силу оценок типа Шаудера [4] в любом фиксированном прямоугольнике D_δ при каждом $0 < \delta < \frac{1}{4}$ гёльдеровские нормы решения T^δ и производных $\frac{\partial T^\delta}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 T^\delta}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial T^\delta}{\partial x}$ удовле-

творяют оценке

$$\|T^\delta\|_{2+\alpha} \leq \overline{K}(\|\psi\|_{2+\alpha} + \|f\|_\alpha), \quad \overline{K} = \text{const}, \quad (10)$$

где для произвольной непрерывной по Гёльдеру функции $\varphi(x, \eta)$ нормы $\|\varphi\|_\alpha$ и $\|\varphi\|_{2+\alpha}$ в (10) определяются следующим образом (см., например, [4]):

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{(x, \eta) \in D_\delta} |\varphi| + \sup_{P_1, P_2 \in D_\delta, P_1 \neq P_2} \frac{|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)|}{|P_1 - P_2|^\alpha},$$

$$P_1 = (x, \eta), P_2 = (\bar{x}, \bar{\eta}),$$

$$\|\varphi\|_{2+\alpha} = \|\varphi\|_\alpha + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|_\alpha + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right\|_\alpha + \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right\|_\alpha.$$

Функция ψ в (10) обозначает граничные условия (8).

На основании оценок (10) выделяется подпоследовательность T^{δ_m} , $m = 1, 2, \dots$, сходящаяся при $m \rightarrow \infty$ равномерно вместе с производными, входящими в уравнение (6), в каждой замкнутой области, лежащей строго внутри D . Переходя к пределу в уравнении для T^{δ_m} при $m \rightarrow \infty$, получаем, что предельная функция $T(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению (6) в прямоугольнике D .

Для доказательства выполнения условия $T(x, 0) = T_w(x)$ оценивается разность

$$S^\delta(x, \eta) = T^\delta(x, \eta) - T_w(x)$$

при малых η . Рассмотрим в области

$$D'_\delta = \left\{ \delta \leq x \leq X, \delta < \eta < \frac{1}{3} \right\}$$

уравнение

$$L(S^\delta) = f(x, \eta) + u(x, \eta)T_w(x),$$

которому удовлетворяет функция $S^\delta(x, \eta)$. Пусть в области D'_δ выполняются неравенства

$$|f(x, \eta)| \leq M_1, \quad u(x, \eta)|T_w(x)| \leq M_2.$$

Далее вводится вспомогательная функция $Y(\eta) = K(1 - e^{-N\eta})$. Постоянная $N > 0$ выбирается из условия $c(\eta)N \geq |b(x, \eta)| + 1$. Это возможно, так как коэффициент $v(x, y)$ ограничен при ограниченных y или, согласно замене (5), при $\eta \leq \eta_0 < 1$. Постоянная $K > 0$ выбирается так, чтобы

$$K \geq \max \left\{ \frac{2M}{1 - e^{-\frac{N}{3}}}, \frac{M_1 + M_2}{Ne^{-N}} \right\}, \quad (11)$$

где M — то же, что в неравенстве (9). По выбранному $N > 0$ вычислим $L(Y)$. Имеем

$$L(Y) = -KN(c(\eta)N - b(x, \eta))e^{-N\eta} \leq -KNe^{-N} < 0. \quad (12)$$

Рассмотрим функцию $Y \pm S^\delta(x, \eta)$. Принимая во внимание (11) и (12), оценим $L(Y \pm S^\delta)$ в D'_δ . Получаем

$$L(Y \pm S^\delta) \leq -KNe^{-N} \pm f(x, \eta) \pm u(x, \eta)T_w(x) \leq \\ \leq -KNe^{-N} + M_1 + M_2 \leq 0. \quad (13)$$

Из граничных условий (8) и неравенств (9), (13) вытекает, что функция $Y \pm S^\delta \geq 0$ на границе области D'_δ , лежащей на прямых $x = \delta$, $\eta = \delta$, $\eta = \frac{1}{3}$. По принципу максимума отсюда выводим,

что $Y \pm S^\delta \geq 0$ всюду в D'_δ . Следовательно, справедлива оценка

$$|S^\delta(x, \eta)| \leq Y(\eta),$$

равномерная по δ и x . Отсюда, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$, получается условие $T(x, 0) = T_w(x)$.

Для доказательства выполнения второго граничного условия в (7) оценивается разность

$$J^\delta(x, \eta) = T^\delta(x, \eta) - T_\infty$$

при малых $1 - \eta$. Уравнение $L(J^\delta) = f(x, \eta)$, которому удовлетворяет функция $J^\delta(x, \eta)$, рассматривается в области

$$D_\delta'' = \left\{ \delta < x \leq X, \frac{2}{3} \leq \eta < 1 - \delta \right\}.$$

Далее вводится в рассмотрение новая функция

$$Z(\eta) = K_1 \int_\eta^1 G(t) G_1(t) dt, \quad (14)$$

где

$$G(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \exp \left\{ \int_0^t \frac{\beta(\tau) d\tau}{(1-\tau)^2} \right\},$$

$$G_1(t) = 1 + \int_0^t \frac{g(\tau) d\tau}{(1-\tau)^4 G(\tau)},$$

а функции $\beta(\tau)$, $g(\tau)$ — те же, что и в утверждении теоремы. Интеграл (14) существует в силу условий теоремы и определяет положительную функцию при $\eta < 1$. Постоянная $K_1 \geq 1$ выбирается из условия $Z\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2M$, где M — постоянная из неравенства (9). Вычислим функцию $L(Z)$:

$$L(Z) = -K_1 G_1(\eta) [c(\eta) G'(\eta) + b(x, \eta) G(\eta)] - K_1 g(\eta). \quad (15)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & c(\eta) G'(\eta) + b(x, \eta) G(\eta) = \\ & = \exp \left\{ \int_0^\eta \frac{\beta(\tau) d\tau}{(1-\tau)^2} \right\} [\beta(\eta) - v(x, \eta)] \geq 0 \end{aligned}$$

по определению функции $\beta(\eta)$, то из (15) получим неравенство $L(Z) \leq -K_1 g(\eta)$. На границе D_δ'' , лежащей на прямых $x = \delta$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\eta = 1 - \delta$, выполняется неравенство $Z(\eta) \pm J^\delta(x, \eta) \geq 0$. Внутри D_δ'' , в силу выбора $K_1 \geq 1$, имеем

$$L(Z \pm J^\delta) \leq -K_1 g(\eta) \pm f(x, \eta) \leq -K_1 g(\eta) + g(\eta) \leq 0.$$

Отсюда, согласно принципу максимума, получаем, что неравенство $Z \pm J^\delta \geq 0$ выполняется всюду в области D_δ'' , или $|J^\delta(x, \eta)| \leq Z(\eta)$ в этой области. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в последнем

неравенстве, получим, что $T(x, \eta) \rightarrow T_\infty$ при $\eta \rightarrow 1$ равномерно, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. При постановке задачи (2), (4) предполагалось, что температура внешнего потока T_∞ является постоянной. Оказывается, что для ограниченного в полосе Q решения $T(x, y)$ уравнения (2) нельзя задавать на бесконечности значение, отличное от постоянного.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что решение $T(x, y)$ задачи (2), (4) таково, что $\lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_\infty(x)$. В силу замены (5) это равносильно условию $T(x, \eta)|_{\eta=1} = T_\infty(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что будет выполнено неравенство

$$|T(x, 1 - \delta) - T_\infty(x)| < \varepsilon.$$

Положим $J^\delta(x, \eta) = T^\delta(x, \eta) - T_\infty(\delta)$. Уравнение (6), которому удовлетворяет функция $J^\delta(x, \eta)$, рассмотрим в области

$$D_\delta'' = \left\{ \delta < x \leq X, \frac{2}{3} \leq \eta < 1 - \delta(\varepsilon) \right\}.$$

Далее, рассматривая новую функцию $Z(\eta) + \varepsilon \pm J^\delta(x, \eta)$, где $Z(\eta)$ определена равенством (14), и повторяя дословно весь ход рассуждений, проведенных при доказательстве выполнения второго условия из (4), получим в области $\bar{D}_\delta''$ равномерную по δ и x оценку:

$$|J^\delta(x, \eta)| \leq \varepsilon + Z(\eta).$$

Отсюда, устремляя δ к нулю и замечая, что $Z(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 1$, имеем:

$$|T(x, 1) - T_\infty(0)| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора ε получим $T(x, 1) \equiv T_\infty(0)$, т.е. $T_\infty(x) \equiv T_\infty(0) = \text{const}$.

З а м е ч а н и е 2. Если задать только первое условие в (4), а второе условие опустить, то ограниченное решение уравнения (2) с граничным условием $T|_{y=0} = T_0(x)$, где $T_0(x)$ — заданная в $0 \leq x \leq X$ непрерывная функция, может оказаться неединственным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнению (2) при $a = 1$, $u = x^k$, $v = \lambda y$, $f \equiv 0$ ($k \geq 1, \lambda = \text{const} < 0$) и граничному условию $T|_{y=0} = 0$ удовлетворяет ограниченная и отличная от нуля в полосе Q функция

$$T(y) = \int_0^y e^{\frac{\lambda t^2}{2}} dt.$$

Отсюда следует, что решение задачи (2), (4) при рассмотренных условиях неединственно.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
2. Джуряев Т. Д. Об однозначной разрешимости основной краевой задачи теории температурного пограничного слоя // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. № 1. С. 170–175.
3. Кисатов М.А. Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А. Ладыженской // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. С. 41–44.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

ON THERMAL BOUNDARY LAYER IN A VISCOUS NONNEWTONIAN MEDIUM

M. A. Kisatov^a, V. N. Samokhin^b, and G. A. Chechkin^{a,c,d}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia*

^c *Institute of Mathematics with Computing Center — Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russia*

^d *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

The paper presents a generalization of the existence and uniqueness theorem for the classical solution to the system of equations for the temperature boundary layer in a viscous medium with O.A. Ladyzhenskaya rheological law.

Keywords: fluid boundary layer, viscous medium, O.A. Ladyzhenskaya rheological law, thermal boundary layer