

УДК 517.9

ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И С АНТИДИФФУЗИОННОЙ СВЯЗЬЮ

© 2022 г. С. А. Кащенко^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.03.2020 г.

Поступило 27.03.2020 г.

После доработки 12.05.2021 г.

Принято к публикации 01.12.2021 г.

Методами локального анализа исследуется динамика цепочек связанных логистических уравнений с запаздыванием. Показано, что критические случаи имеют бесконечную размерность. В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи параболического типа, которые описывают эволюцию медленно осциллирующих около состояния равновесия решений исходного уравнения.

Ключевые слова: динамика, логистическое уравнение, запаздывание

DOI: 10.31857/S2686954322010064

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются связанные в цепочку осцилляторы на базе логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t-1)]u. \quad (1)$$

Уравнение (1) играет важную роль во многих прикладных задачах биофизики, математической экологии, лазерной физики и др. [1–4]. Функция $u(t)$ неотрицательна и $r > 0$. Свойства уравнения (1) хорошо известны (см., например, [4–6]). Отметим, что при $0 < r < \frac{\pi}{2}$ состояние равновесия $u_0 = 1$ асимптотически устойчиво, а при $r > \frac{\pi}{2}$ — неустойчиво и в (1) имеется устойчивый цикл.

Сначала введем в рассмотрение кольцевую систему N связанных уравнений

$$\dot{u}_j = r[1 - u_j(t-1)]u_j + d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad (2)$$

где $j = 1, \dots, N$, $u_0 \equiv u_N$, $u_{N+1} \equiv u_1$. При условии $d > 0$ связь, определяемая последним слагаемым в правой части (2), называют диффузионной, а при $d < 0$ — антидиффузионной. С точки зрения приложений к математической экологии условие $d < 0$ в уравнении (2) смысла не имеет, поскольку не

выполняется условие инвариантности области $u_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, N$). Антидиффузионная связь в несколько иной постановке характерна, например, в моделях взаимодействующих конкурирующих популяций,

$$\dot{u}_j = r[1 - u_j(t-1) - d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})]u_j, \quad (3)$$
$$d > 0, j = 1, \dots, N.$$

Значение $u_j(t)$ удобно связать со значением функции двух переменных $u(t, x)$ в точке некоторой окружности с угловой координатой $x_j = 2\pi N^{-1}j$ ($j = 1, \dots, N$). Будем предполагать, что количество N точек окружности достаточно велико, т.е.

$$\varepsilon = 2\pi N^{-1} \ll 1. \quad (4)$$

В этой ситуации от системы (3) естественно перейти к уравнению с непрерывной пространственной переменной относительно $u(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r[1 - u(t-1, x) - d(u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon))]u \quad (5)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение со связью более общего вида. Такая связь означает, что влияние одного элемента цепочки тем меньше, чем больше расстояние между элементами. Рассмотрим краевую задачу

¹ Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r \left[1 - u(t-1, x) - d \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) u(t, x+s) ds - u \right) \right] u, \quad (7)$$

где $F(s, \varepsilon) = F_+(s, \varepsilon) + F_-(s, \varepsilon)$,

$$F_{\pm}(s, \varepsilon) = \frac{1}{4\varepsilon\sigma\sqrt{\pi}} \exp[-(\varepsilon\sigma)^{-2}(s \pm \varepsilon)^2], \quad (8)$$

$$F(s, \varepsilon) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) ds = 1.$$

Отметим, что при $\sigma \rightarrow 0$ в (7) приходим к уравнению (5).

Поставим задачу исследования при малом ε всех решений краевой задачи (7), (6) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. Тем самым речь идет об изучении динамики распределенных цепочек логистических уравнений с запаздыванием. Отметим, что исследованию динамики в различных цепочках связанных систем были посвящены результаты многих авторов (см., например, [7–12]). В настоящей работе используются специальные методы локального анализа [13–15]. На их основе строятся так называемые квазинормальные формы, которые представляют собой нелинейные краевые задачи, не содержащие малых параметров. Изучение нелокальной динамики этих краевых задач позволит ответить на вопрос о структуре решений исходной системы уравнений в окрестности состояния равновесия u_0 .

Приведем сначала результаты, которые вытекают непосредственно из линейного анализа краевой задачи (7), (6). Рассмотрим линеаризованную на u_0 краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -rv(t-1, x) - d \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) v(t, x+s) ds - v(t, x) \right), \quad (9)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x). \quad (10)$$

Характеристическое уравнение для (9), (10) имеет вид

$$\lambda + r \exp(-\lambda) = -d \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon) \exp(iks) ds - 1 \right), \quad (11)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В том случае, когда все корни (11) (при всех $k = 0, \pm 1, \dots$) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, нулевое

решение (9), (10) и состояние равновесия u_0 в (7), (6) асимптотически устойчиво, причем все решения из некоторой независимой от ε окрестности u_0 стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$. Тем самым локальная динамика в таком случае тривиальна.

Если же (11) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, то задача о динамике в окрестности u_0 краевой задачи (7), (6) становится нелокальной: решение u_0 неустойчиво и в некоторой достаточно малой не зависящей от ε его окрестности не может быть аттракторов этой краевой задачи.

Будем рассматривать критический случай, когда среди корней (11) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Необходимым условием реализации критического случая является выполнение неравенств

$$0 < r \leq \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Будет показано, что в критическом случае бесконечно много корней (11) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. реализуется критический в задаче об устойчивости случай бесконечной размерности. Используя методику работ автора [13–15], будут построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм для (7), (6). Их нелокальная динамика будет определять при малых ε локальное, в окрестности u_0 , поведение всех решений исходной краевой задачи (7), (6). Этот результат можно интерпретировать как принцип сведения (7), (6) к наиболее простым уравнениям, которые позволяют описать структуру и найти асимптотику решений (7), (6) по решениям построенных квазинормальных форм.

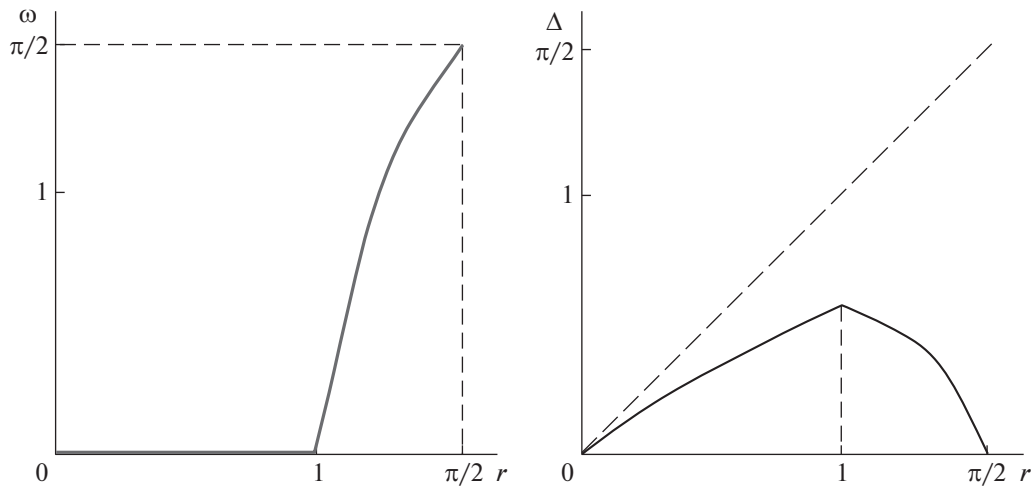
2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Сначала определим пороговое значение $d(r)$ параметра d , при котором реализуется критический случай. Для этого обозначим $z = \varepsilon k$ и предположим, что в (11) существует чисто мнимый корень $\lambda = i\omega$, $\omega = \omega_z \geq 0$. В результате приходим к уравнению

$$i\omega + r \exp(-i\omega) = \Delta, \quad (13)$$

$$\Delta = d\rho(z) \text{ и } \rho(z) = 1 - \cos z \cdot \exp(-\sigma^2 z^2).$$

Введем несколько обозначений. Пусть $\max_z \rho(z) = \rho(z_0)$, т.е. z_0 – корень из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ уравнения $\operatorname{tg}(z) = (-2\sigma^2)z$ и $\rho''(z_0) < 0$. Через $\Delta(r)$ обозна-

Рис. 1. Графики функций $\omega(r)$ и $\Delta(r)$.

чим наименьшее неотрицательное значение параметра Δ , при котором уравнение (13) имеет решение $\omega = \omega_\Delta \geq 0$. Отметим, что $\omega_\Delta < r$ при $0 < r < \frac{\pi}{2}$ и $\omega_\Delta = 0$ при $0 < r \leq 1$, $\omega_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. При $1 < r < \frac{\pi}{2}$ выражение ω_Δ является корнем на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ уравнения $\operatorname{tg} \omega = \omega(r^2 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$. Положим $d(r) = \Delta_\pm(r) \rho^{-1}(z_0)$.

Л е м м а 1. *Имеет место равенство*

$$d(r) = \begin{cases} r \exp(-\sigma^2 z_0^2), & 0 < r \leq 1, \\ (r^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}, & 1 < r \leq \frac{\pi}{2}, \quad \omega(r) = \omega_{\Delta(r)}, \\ 0, & r = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что при $0 < d < d(r)$ нулевое решение в (9), (10) устойчиво, а при $d > d(r)$ — неустойчиво. Критический случай реализуется при $d = d(r)$. Графики $\Delta(r)$ и $\omega(r)$ приведены на рис. 1.

Пусть $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Фиксируем произвольно значения r_1 и d_1 и рассмотрим близкий к критическому в задаче об устойчивости решений (9), (10) случай, когда

$$r = r_0 + \varepsilon^2 r_1, \quad d = d(r_0) + \varepsilon^2 d_1.$$

Выпишем асимптотику всех тех корней $\lambda_m(\varepsilon), \bar{\lambda}_m(\varepsilon)$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) уравнения (11), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого понадобятся еще обозначения. Пусть $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ такое значение, которое до-

полняет до целого выражение $z_0 \varepsilon^{-1}$. Через $v_m(t, x, \varepsilon)$ обозначим решение (9), (10), отвечающее корню $\lambda_m(\varepsilon)$ уравнения (11):

$$v_m(t, x, \varepsilon) = \exp(\lambda_m(\varepsilon)t + i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta + m)x), \quad (14)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Л е м м а 2. *Пусть $0 < r_0 \leq 1$. Тогда корни $\lambda_m(\varepsilon)$ вещественные и имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_m(\varepsilon) = \varepsilon^2 \lambda_{m2} + \varepsilon^3 \lambda_{m3} + \dots$$

$$\lambda_{m2} = (1 - r_0)^{-1} \left\{ -r_1 + d_1 \rho(z_0) + \frac{1}{2} d(r_0) \rho''(z_0) (\theta + m)^2 \right\}.$$

Л е м м а 3. *Пусть $1 < r_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда корни $\lambda_m(\varepsilon)$ комплексные и имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_m(\varepsilon) = i\omega(r_0) + \varepsilon^2 \lambda_{m2} + \varepsilon^3 \lambda_{m3} + \dots,$$

$$\lambda_{m2} = (1 - r_0 \exp(-i\omega(r_0)))^{-1} (d_1 \rho(z_0) - r_1 \exp(-i\omega(r_0)) + \frac{1}{2} d(r_0) \rho''(z_0) (\theta + m)^2).$$

Итак, при сформулированных условиях определены значения параметров задачи, при которых реализуется критический случай и найдена асимптотика бесконечного множества таких корней характеристического уравнения, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Фиксируем $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для исследования асимптотики близких к состоянию равновесия $u_0 = 1$ решений введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned}
u = & 1 + \varepsilon[\xi(\tau, x) \exp(i\omega(r_0)t + (z_0\varepsilon^{-1} + \theta)x) + \\
& + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega(r_0)t - (z_0\varepsilon^{-1} + \theta)x)] + \\
& + \varepsilon^2[u_{20}|\xi(\tau, x)|^2 + u_{21}\xi^2 \exp(2i\omega(r_0)t + 2iy) + \\
& + \bar{u}_{21}\bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega(r_0)t - 2iy)] + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots,
\end{aligned} \quad (15)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ — медленное время, $y = (z_0\varepsilon^{-1} + \theta)x$, $\xi(\tau, x)$ — неизвестная комплекснозначная амплитуда, функции $u_j(t, \tau, x, y)$ периодические по t , x и y . Отметим, что второе слагаемое в правой части (15) основано на решении линеаризованного уравнения и имеет амплитуду $\xi(\tau, x)$. Подставим (15) в (7) и будем последовательно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . При первой степени ε получаем верное равенство, а на следующем шаге находим, что

$$\begin{aligned}
u_{20} = & -2(r_0 \exp(-2i\omega(r_0)) + \\
& + d(r_0)g(2z_0))^{-1}(r \cos(\omega(r_0)) + d(r_0)g(z_0)), \\
u_{21} = & i\omega(r_0)[2i\omega(r_0) + r_0 \exp(-2i\omega(r_0)) + d(r_0)g(2z_0)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при ε^3 , получаем уравнение для u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций приходим к краевой задаче относительно $\xi(\tau, x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & (1 - r_0 \exp(-i\omega(r_0)))^{-1} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} d(r_0)g''(z_0) \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta^2 \xi \right) - \right. \\
& \left. - (-r_1 + d_1 g(z_0))\xi + \delta \xi |\xi|^2 \right],
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x),$$

а для ляпуновской величины δ имеет место формула

$$\begin{aligned}
\delta = & -(r_0(1 + \exp(-i\omega(r_0))) + d(r_0)(g(z_0) + \\
& + g(2z_0)))u_{20} - (r_0(\exp(i\omega(r_0)) + \exp(-2i\omega(r_0))) + \\
& + d(r_0)(g(z_0) + g(2z_0)))u_{21}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Квазинормальная форма (16) играет роль нормальной формы. Смысл этого термина раскрывает следующее утверждение. В нем через $\varepsilon_n(\theta_0)$ обозначается такая последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что при всех n имеем $\theta(\varepsilon_n(\theta_0)) = \theta_0$.

Теорема 1. Пусть $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $\xi_0(\tau, x)$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (16) при $\theta = \theta_0$. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_0)$ функция

$$\begin{aligned}
u_0(t, x, \varepsilon, \theta_0) = & 1 + \varepsilon[\xi_0(\tau, x) \exp(i\omega(r_0)t + iy) + \\
& + \bar{\xi}_0(\tau, x) \exp(-i\omega(r_0)t - iy)] + \varepsilon^2[u_{20}|\xi_0(\tau, x)|^2 +
\end{aligned}$$

$$+ u_{21}\xi_0^2 \exp(2i\omega(r_0)t + 2iy) + \quad (18)$$

$$+ \bar{u}_{21}\bar{\xi}_0^2(\tau, x) \exp(-2i\omega(r_0)t - 2iy)],$$

$$\tau = \varepsilon_n^2(\theta_0)t, \quad y = (z_0\varepsilon_n^{-1}(\theta_0) + \theta_0)x$$

удовлетворяет краевой задаче (7), (6) с точностью до $O(\varepsilon_n^3(\theta_0))$.

Отметим, что в том случае, когда $\xi_0(\tau, x)$ — грубое периодическое по τ решение (16), можно обосновать результат о существовании точного почти периодического решения, близкого к (18), той же, что и $\xi_0(\tau, x)$, устойчивости.

4. КВАЗИНОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПРИ $\sigma = \varepsilon\sigma_0$

Этот случай имеет особое значение, поскольку

тогда выражение $\int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon)u(t, x + s)ds$ в (17) близко к $u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)$ и для каждого z имеет место асимптотическое представление $g(z) = 1 - \cos z \cdot (1 - \varepsilon^2 \sigma_0^2 z^2 + o(\varepsilon^4))$. Для $w(r)$ сохраняется выражение из раздела 2, а $d(r) = \frac{1}{2}(r^2 - \omega^2(r))^{\frac{1}{2}}$.

Основное отличие здесь связано с тем, что значение z_0 определяется неоднозначно: $z_0 = \pi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Приведем итоговый результат.

Роль квазинормальной формы (16) играет краевая задача с двумя пространственными переменными для $\xi(\tau, x, y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & (1 - r_0 \exp(i\omega(r_0)))^{-1} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} d(r_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (2d_1 - r_1)\xi + \right. \\
& \left. + 2\sigma_0^2 d(r_0) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - 2\pi i \frac{\partial \xi}{\partial y} - \pi^2 \xi \right) + \delta \xi |\xi|^2 \right],
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y + 1) \equiv \xi(\tau, x, y).$$

Выражение (17) для коэффициента δ здесь упрощается, поскольку $g(z_0) = 2$, $g''(z_0) = -1$ и $g(2z_0) = 0$.

Решение $\xi(\tau, x, y)$ связано с решением $u(t, x, \varepsilon)$ исходной краевой задачи (7), (6) формулой

$$\begin{aligned}
u(t, x, \varepsilon) = & 1 + \varepsilon(\xi(\tau, x, y) \exp(i\omega(r_0)t + i\pi x) + \\
& + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp(-i\omega(r_0)t - i\pi x) + \dots,
\end{aligned}$$

$\tau = \varepsilon^2 t$, $y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$. Отметим, что в силу равенства (4) параметр θ в (19) отсутствует.

5. ВЫВОДЫ

Показано, что локальная динамика связанных логистических уравнений с запаздыванием при определенных условиях описывается решениями параболических уравнения типа Гинзбурга–Ландау. Получено асимптотическое представление решений при $t \in [t_0, \infty)$, $x \in [0, 2\pi]$. Простейшие решения вида $\text{const} \cdot \exp(i\omega t + ikx)$ таких уравнений оказываются неустойчивы. В ряде случаев в нормализованные уравнения входит параметр θ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут происходить неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций. Особо отметим, что при $r < \frac{\pi}{2}$, т.е. в условии, когда в отсутствии связей нет колебаний в базовом уравнении (1), в связанной системе могут наблюдаться сложные неоднородные колебательные процессы. Особо отметим, что задача с антидиффузионной связью при сформулированных условиях редуцируется к нелинейной краевой задаче параболического типа.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuang Y. Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 410 p.
2. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. N.Y.: Springer Verlag, 1996. 439 p.
3. Gourley S.A., Sou J.W.-H., Wu J.H. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics // J. Mathematical Sciences. 2004. V. 124. № 4. P. 5119–5153.
4. Kashchenko S.A. Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. № 7. P. 470–494.
5. Kashchenko I.S. Normalization of a System with Two Large Delays // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2014. V. 24. № 8. P. 1440021. ISSN 0218-1274. <https://doi.org/10.1142/S0218127414400215>
6. Кащенко С.А., Логинов Д.О. Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 138–143.
7. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Springer, 1984.
8. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexisting of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom Complex Syst. 2002. V. 5 (4). P. 380–5.
9. Haken H. Brain dynamics: synchronization and activity patterns in pulse-coupled neural nets with delays and noise. Springer, 2002.
10. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов. Цепочка и решетка связанных элементов // Изв. вузов “ПНД”. 2009. Т. 17. № 2.
11. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
12. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. May. V. 34. P. 123–129.
13. Kashchenko I.S. Local dynamics of an equation with distributed delay // Differential Equations. 2014. V. 50. № 1. P. 15–24. ISSN 0012-2661. <https://doi.org/10.1134/S0012266114010030>
14. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. V. 6. № 6. P. 1093–1109.
15. Кащенко С.А. Простейшие критические случаи в динамике нелинейных систем с малой диффузией // Труды Московского математического общества. 2018. Т. 79. Вып. 1. С. 97–115.

DYNAMICS OF THE CHAIN OF LOGISTIC EQUATIONS WITH DELAY AND ANTIDIFFUSIVE LINKAGE

S. A. Kashchenko^a

^a P.G. Demidov Yaroslavl State University, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Yaroslavl, Russia

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The methods of local analysis study the dynamics of the chains of connected logistic equations with delay. It is shown that the critical cases have infinite dimension. As the main results, special non-linear boundary-value problems of the parabolic type, which describe the evolution of slowly oscillating at the equilibrium state solutions of the initial equation, have been constructed.

Keywords: dynamics, logistic equation, delay