

О ЧИСЛАХ РАМСЕЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГРАФОВ

© 2022 г. В. С. Карась¹, А. М. Райгородский^{1,2,3,4,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 15.09.2021 г.

Поступило 16.09.2021 г.

После доработки 06.01.2022 г.

Принято к публикации 12.01.2022 г.

Изучено нетривиальное обобщение классического числа Рамсея на случай произвольных последовательностей графов. Для многих классов последовательностей найдены точные значения и асимптотики чисел Рамсея.

Ключевые слова: числа Рамсея, числа независимости, устойчивость, случайные графы

DOI: 10.31857/S2686954322010052

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена задачам теории Рамсея. Для начала напомним определение классического числа Рамсея в одном из наиболее естественных случаев. Пусть K_n — полный граф на n вершинах (граф обыкновенный, т.е. не содержит петель и кратных ребер, а также не имеет ориентации). Для обыкновенного графа G на тех же n вершинах обозначим $K_n \setminus G$ дополнение графа G , т.е. остоновый подграф графа K_n , в котором нет ни одного ребра графа G и есть все ребра, которых в графе G нет. Независимым множеством вершин графа называется любое множество вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Мощность максимального независимого множества вершин графа G называется числом независимости и обозначается $\alpha(G)$. Кликой в графе называется любой его полный подграф. Мощность максимальной клики называется кликовым числом и обозначается $\omega(G)$. Двойственность числа независимости и кликового числа, отраженная даже в обозначениях, легко описывается очевид-

ным равенством $\alpha(G) = \omega(K_n \setminus G)$. В этих терминах (диагональное) число Рамсея $R(k)$ для данного натурального k определяется как минимальное натуральное n , такое, что для любого остонового подграфа G графа K_n либо в G , либо в $K_n \setminus G$ есть клика мощности k .

Отыскание классических чисел Рамсея — одна из ключевых и в то же время труднейших проблем на стыке теории графов и теории алгоритмов. Сейчас известно, что (см. [1, 2])

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k 2^{k/2} \leq R(k) \leq 4^k e^{-\gamma \frac{\ln^2 k}{\ln \ln k}}, \quad \gamma > 0.$$

Также есть множество результатов относительно малых k (см. [3]), но нам в дальнейшем будут интереснее асимптотические утверждения.

У классических чисел Рамсея есть огромное количество важных обобщений (см., например, [1–6]). В настоящей работе мы сосредоточимся на постановке, которая была впервые предложена в работе [7]. Пусть дана произвольная последовательность графов $\{G_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Подчеркнем сразу, что здесь n — это просто номер графа, т.е. это не обязательно число его вершин. Пусть, как и прежде, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $R_{\min}(\{G_n\}, k)$ минимальное натуральное m , такое, что для любого остонового подграфа G графа G_m либо в G , либо в $G_m \setminus G$ есть индуцированный подграф графа G_m на k вершинах. Обозначение $G_m \setminus G$ следует понимать как дополнение графа G до графа G_m , т.е. мы, опять-таки, все ребра графа G удаляем, а все ребра графа G_m , которых нет в G , проводим. Реб-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

³ Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия

⁴ Бурятский государственный университет, институт математики и информатики, Улан-Удэ, Россия

*E-mail: mraigor@yandex.ru

ра, не принадлежащие графу G_m , в принципе возникнуть не могут.

Понятно прежде всего, что, поскольку клика — это индуцированный подграф графа K_n , причем иных индуцированных подграфов в полном графе не существует, справедливо равенство $R(k) = R(\{K_n\}, k)$. С другой стороны, ясно, что для многих последовательностей графов данное определение не имеет смысла или тривиально. Более того, для классического случая рамсеевского свойства в некотором смысле монотонно: если для какого-то n оно выполняется, то оно выполняется и для всех $m \geq n$; если для какого-то n оно не выполняется (т.е. существует такой граф на n вершинах, что ни в нем, ни в его дополнении до K_n нет k -клики), то оно не выполняется и для всех $m \leq n$. Это связано, очевидно, с тем, что K_n является подграфом каждого K_m с $m \geq n$. В общем случае это не так. А потому заведомо имеет смысл рассматривать и величину $R_{\max}(\{G_n\}, k)$, равную максимальному $m \in \mathbb{N}$, для которого существует такой остовный подграф G графа G_m , что ни в нем, ни в $G_m \setminus G$ нет индуцированных k -вершинных подграфов графа G_m . Разумеется, $R_{\max}(\{K_n\}, k) = R_{\min}(\{K_n\}, k) - 1$, но в общем случае могут быть самые разные соотношения между двумя величинами.

В работе [7] в роли $\{G_n\}$ выступила последовательность графов $G(n, n/2, n/4)$, где $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$, вершинами служат все возможные $n/2$ -элементные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, а ребрами вершины соединяются тогда и только тогда, когда мощность пересечения соответствующих множеств равна $n/4$. Эти графы возникают в связи с задачами теории кодирования (см. [8, 9]), и в этой науке они называются графами или схемами Джонсона. Также они играют огромную роль в комбинаторной геометрии, и там их зачастую называют дистанционными графами (см. [9–14]). Отметим, наконец, что максимальная клика в графе $G(n, n/2, n/4)$ находится в прямом соответствии с классической матрицей Адамара (см. [8]).

На самом деле, $G(n, n/2, n/4)$ — это лишь очень специальный случай более общего графа Джонсона $G(n, r, s)$: снова вершинами здесь служат r -элементные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, а ребра образуются тогда и только тогда, когда мощности пересечений равны s . Эти графы играют все ту же огромную роль в теории кодирования и в комбинаторной геометрии. Более того, при $s = 0$ возникают так называемые кнезеровские графы (см. [15–17]), являющиеся одними из центральных объектов современной комбинаторики. Наконец, нельзя не отметить тот факт, что $G(n, 1, 0) = K_n$, т.е. классический полный граф служит очень

специальным случаем в общем многообразии ситуаций.

С графами $G(n, r, s)$ очень тесно связаны графы $G(n, r, < s)$. Отличие в том, что теперь ребра соответствуют парам вершин, пересечение которых имеет мощность, строго меньшую s .

В следующем разделе мы приведем формулировки основных результатов и дадим комментарии к ним. Наконец, в разделе 3 мы кратко изложим идеи доказательств.

2. ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $r = r(n)$ и $s = s(n)$ — такие функции, что выполнены следующие условия:

1) если при всех достаточно больших n верно неравенство $r - s \geq 2$, то $r^3 = o(n/\ln n)$;

2) если при всех достаточно больших n верно равенство $r - s = 1$, то $r^3 = o(n/\ln^3 n)$;

3) функции C_n^r и C_{n-s}^{r-s} строго монотонно возрастают.

Тогда существует такое k_0 , что для любого $k \geq k_0$ имеет место точное равенство

$$R_{\max}(\{G(n, r(n), < s(n))\}, k) = m,$$

где m таково, что

$$C_{m-s(m)}^{r(m)-s(m)} < k \leq C_{m+1-s(m+1)}^{r(m+1)-s(m+1)}.$$

Очевидно, что ввиду монотонности функции C_{m-s}^{r-s} число m в формулировке теоремы определено однозначно. Ясно, что не составит труда во многих случаях найти и асимптотику этого m как функции от k . Но гораздо пафоснее то, что здесь для очень широкого класса параметров найдено точное значение числа Рамсея. При этом, разумеется, классическое число Рамсея выпадает из условий теоремы, ведь $K_n = G(n, 1, 0) = G(n, 1, < 1)$, т.е. функция C_{n-1}^{1-1} должна бы монотонно расти, но она тождественно равна единице. Отметим также, что индекс $\max$ здесь по существу. Для $\min$ -случая мы не знаем аналогичных оценок, и у нас есть основания полагать, что в его рамках числа Рамсея некорректно определены.

Теорема 2. Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность графов. Пусть $N_n = |V_n|$, $\alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть γ_n — это максимальное число вершин графа G_n , которые не смежны с обеими вершинами данного ребра. Допустим, величины N_n , α_n , γ_n монотонно стремятся к бесконечности, причем $\alpha_n = o(N_n)$, и существует такая функция β_n , что выполнены следующие асимптотические условия:

1) $\beta_n > \gamma_n$ и $\beta_n = o(\alpha_n)$;

$$2) \log_2 N_n = o\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right);$$

$$3) \log_2 N_n = o(\beta_n - \gamma_n).$$

Пусть φ_n — любая функция, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и с которой все еще верно, что $\log_2 N_n = o(\varphi_n(\beta_n - \gamma_n))$. Тогда существует такое k_0 , что для любого $k \geq k_0$ выполнено неравенство $R_{\max}(\{G_n\}, k) \geq t$, где t — максимальное натуральное число, удовлетворяющее условиям $k \geq \alpha_m(1 + \varphi_m)$ и $k < N_m$.

Если же t таково, что $k \leq \alpha_m$, то

$$R_{\max}(\{G_n\}, k) < t.$$

С одной стороны, пафос теоремы 2 в ее общности. Начнем с того, что ее условиям удовлетворяют многие последовательности графов из теоремы 1. Дело в том, что для них $\alpha_n = C_{n-s(n)}^{r(n)-s(n)}$ (см. [18, 19]), $N_n = C_n^{r(n)}$, и пусть для простоты расчетов r фиксировано, а $s = 1$ (кнезеровский граф). Тогда $\gamma_n \leq r^2 C_n^{r-2}$. Последняя величина имеет порядок роста n^{r-2} , тогда как α_n растет как n^{r-1} . Таким образом, выбрать нужную β_n не составляет труда. Для других параметров считать чуть труднее, но картина похожая. Есть и множество других последовательностей графов, удовлетворяющих условиям теоремы 2 (см. [21]).

С другой стороны, если теорема 1 давала точное значение числа Рамсея, то теорема 2 говорит, как правило, о его асимптотике (что, впрочем, тоже намного сильнее результатов о классической величине $R(k)$).

Как видно, ключевое отличие теорем 1 и 2 от того, что мы знаем про классическую величину $R(k)$, состоит в том, что для последней величины число независимости исходного графа $G_n = K_n$ равно 1, тогда как в теоремах 1 и 2 оно по условию строго монотонно возрастает. В следующем разделе мы приведем схемы доказательств, за счет которых это отличие станет еще яснее.

3. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Верхние оценки в обеих теоремах достаточно просты. Дело в том, что независимые множества вершин являются, конечно, индуцированными подграфами в любых графах. В теореме 2 прямо из формулировки видно, как это использовать. В теореме 1 достаточно воспользоваться неравенством $k \leq C_{m+1-s(m+1)}^{r(m+1)-s(m+1)}$, монотонностью функции, стоящей в правой части этого неравенства, и тем фактом, что эта функция как раз и выражает число независимости графа из теоремы 1 (см. [18–20]).

Нижние оценки значительно труднее. Для получения нижней оценки нужно доказать, что для данного t существует остовный подграф исходного графа, у которого на каждом множестве из k вершин хотя бы одно ребро исходного графа отсутствует и хотя бы одно ребро исходного графа присутствует (за счет этого ни в самом графе, ни в его дополнении не возникнет индуцированного подграфа исходного графа). Применяется вероятностный метод, т.е. берется случайный подграф исходного графа, в котором каждое ребро сохраняется независимо от остальных ребер с вероятностью $1/2$. Доказывается, что при достаточно больших t вероятность множества графов, обладающих нужным свойством, положительна, откуда и следует существование таких графов. В доказательстве теоремы 1 оценки проводятся с помощью методов из работы [18], а в доказательстве теоремы 2 используется техника из статьи [21]. Также большую роль играют оценки в духе тех, что получены в работах [10, 11, 22].

Если говорить чуть более подробно, то в работах [18] и [21] доказывалось, что с вероятностью, стремящейся к единице, число независимости случайного подграфа исходного графа не превосходит величины $C_{m-s(m)}^{r(m)-s(m)}$ в случае первой работы и строго меньше величины $\alpha_m(1 + \varphi_m)$ в случае второй работы. Это равносильно тому, что при всех больших t в каждом множестве вершин мощности k есть хотя бы одно ребро исходного графа с вероятностью, большей половины. Но ребра сохраняются и исчезают с одной и той же вероятностью $1/2$. Значит, верно и то, что в каждом множестве вершин мощности k нет хотя бы одного ребра исходного графа с вероятностью, большей половины. А следовательно, с положительной вероятностью нет ни одного множества вершин размера k , где сохранились бы все ребра исходного графа (остался бы его индуцированный подграф), и нет ни одного множества вершин размера k , где пропали бы все ребра исходного графа (остался бы его индуцированный подграф в дополнении). Таким образом, существование искомого остовных подграфов обосновано и теоремы 1–2 доказаны.

Отметим, что фактически здесь использована так называемая устойчивость числа независимости случайного подграфа, которой в последние годы было посвящено множество работ (см., например, [23–25]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена за счет гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2540.2020.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graham Ronald L., Rothschild Bruce L., Spencer Joel H.* Ramsey Theory. Wiley. 2nd ed. 1990.
2. *Conlon D.* A new upper bound for diagonal Ramsey numbers // *Ann. of Math.* 2009. V. 170. P. 941–960.
3. *Radziszowski S.* Small Ramsey Numbers // *The Electronic Journal of Combinatorics*. <https://doi.org/10.37236/21>
4. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой // *УМН.* 2020. Т. 75. № 455. С. 191–192.
5. *Kupavskiy A.B., Sagdeev A.A.* All finite sets are Ramsey in the maximum norm // *Forum of Mathematics, Sigma.* 2021. V. 9. e:55. P. 1–12.
6. *Frankl N., Kupavskii A., Swanepoel K.J.* Embedding graphs in Euclidean space // *J. Combinatorial Theory. Series A.* 2020. V. 171. P. 105–146.
7. *Райгородский А.М., Михайлов К.А.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ // *Матем. сборник.* 2009. Т. 200. № 12. С. 63–80.
8. *Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
9. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial geometry and coding theory // *Fundamenta Informatica.* 2016. V. 145. P. 359–369.
10. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // *Матем. заметки.* 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.
11. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графов Джонсона // *Доклады РАН.* 2021. Т. 499. С. 40–43.
12. *Райгородский А.М.* О разбиении множеств на части меньшего диаметра // *Доклады РАН.* 2020. Т. 495. С. 74–77.
13. *Демидович Ю.А., Жуковский М.Е.* Хроматические числа дистанционных графов без коротких нечетных циклов в рациональных пространствах // *Матем. заметки.* 2021. Т. 109. № 5. С. 723–733.
14. *Бердников А.В., Райгородский А.М.* Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида // *Проблемы передачи информации.* 2021. Т. 57. № 2. С. 44–50.
15. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* Об одном обобщении кнезеровских графов // *Матем. заметки.* 2020. Т. 107. № 3. С. 351–365.
16. *Воронов В.А., Дергачев Е.А., Жуковский М.Е., Неопрятная А.М.* Решение задачи об описательной сложности изоморфизма подграфа с помощью кнезеровских графов // *Матем. заметки.* 2021. Т. 109. № 1. С. 36–46.
17. *Kiselev S., Kupavskii A.* Sharp bounds for the chromatic number of random Kneser graphs // *J. Combinatorial Theory. Ser. B.* 2021.
18. *Карась В.С., Озарок П.А., Райгородский А.М.* Асимптотика числа независимости случайного подграфа графа $G(n, r, < s)$ // *Доклады РАН.* 2021. Т. 499. С. 17–19.
19. *Ahlswede R., Khachatrian L.H.* The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets // *J. Combin. Theory A.* 1996. Т. 76. С. 121–138.
20. *Ahlswede R., Khachatrian L.H.* The complete intersection theorem for systems of finite sets // *Europ. J. Combin.* 1997. V. 18. P. 125–136.
21. *Райгородский А.М.* Об устойчивости числа независимости случайного подграфа // *ДАН.* 2017. Т. 477. № 6. С. 649–651.
22. *Дубинин Н.А.* Новые оценки турановского типа для графов Джонсона // *Проблемы передачи информации.* 2021. Т. 57. № 4. С. 79–86.
23. *Пядёркин М.М.* О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе // *Матем. заметки.* 2019. Т. 106. № 2. С. 280–294.
24. *Pyaderkin M.M.* On the stability of some Erdos-Ko-Rado type results // *Discrete Math.* 2017. V. 340. № 4. P. 822–831.
25. *Ellis D., Keller N., Lifshitz N.* Stability versions of Erdos-Ko-Rado type theorems via isoperimetry // *J. European Mathematical Society.* 2019. V. 21. № 12. P. 3857–3902.

ON RAMSEY NUMBERS FOR ARBITRARY SEQUENCES OF GRAPHS

V. S. Karas^a and A. M. Raigorodskii^{a,b,c,d}^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*^b *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*^c *Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Maykop, Russia*^d *Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this work, we study non-trivial generalizations of Ramsey numbers in the case of arbitrary sequences of graphs. For many classes of sequences we found exact values or asymptotics for Ramsey numbers.

Keywords: Ramsey numbers, independence numbers, stability, random graphs