

УДК 531.38

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2022 г. Ю. Ф. Голубев^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 25.08.2021 г.

Поступило 02.09.2021 г.

После доработки 22.11.2021 г.

Принято к публикации 25.11.2021 г.

Решается проблема управления колебаниями в окрестности положения равновесия склерономной механической системы с несколькими степенями свободы. Одна степень свободы не поддается непосредственному управлению, а остальные управляются сервоприводами. Предложен оригинальный метод поиска оптимального управления амплитудой колебаний по неуправляемой степени свободы за счет выбора управления законом изменения других степеней свободы. В число управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. По сравнению с принципом максимума Л.С. Понтрягина метод не содержит сопряженных переменных и дает существенное преимущество в уменьшении размерности анализируемой совокупной системы дифференциальных уравнений. На примере конкретной маятниковой системы продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: механическая система, колебания, амплитуда, управление, оптимизация

DOI: 10.31857/S2686954322010040

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n — число степеней свободы системы, q_i — обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости, а симметричная матрица (a_{ij}) зависит от координат и положительно определена. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

в которых t — время, а позиционные обобщенные силы $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n)$ стационарны. Пусть первыми в наборе $(q_1, \dots, q_n)$ идут s позиционных координат, а остальными — $(n-s)$ циклических координат. Пользуясь произволом в нумерации обобщенных координат, выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой x . Остальные координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = 1, \dots, s-1$

и $w_k = q_{s+k}$, $k = 1, \dots, n-s$, где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1})$ — вектор позиционных координат, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s})$ — вектор циклических координат, так что $\frac{\partial T}{\partial w_k} \equiv 0$,

$\frac{\partial Q_i}{\partial w_k} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-s$. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где s — число позиционных координат, включающее выделенную координату x , и

$$T^*(x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,s+k} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{s+k,s+r} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

В системе (1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}), \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$, $F(x, \mathbf{u}) = Q_1(x, u_1, \dots, u_{s-1})$. Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного изменения: $\dot{x} \neq 0$. Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: golubev@keldysh.ru

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}] - p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (3) \quad \text{где}$$

где $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{dx}$, $\mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{w}}{dx}$ и

$$\begin{aligned} f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') &= a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k, \\ p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \\ &+ \frac{\partial T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{\partial x}. \end{aligned}$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(x)$ заданы, а их компоненты ограничены:

$$\begin{aligned} |u_j^m| \leq u_j(x) \leq u_j^M, \quad j = 1, \dots, s-1, \\ |\dot{w}_k^m| \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M, \quad k = 1, \dots, n-s. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как сервосвязи, наложенные на систему. Обобщенные силы $Q_2, \dots, Q_n$ следует выбирать так, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\dot{\mathbf{w}}(x)$ были реализованы. Предположим, что это сделано, так что ограничения (4) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}^2 - \right. \\ \left. - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \dot{x}] \right\} dx = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где x_0 — начальное значение независимой переменной x , $\lambda(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')$ — произвольная функция. Уравнение (5) непосредственно следует из уравнения (3). Заметим, что если $f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \neq 0$, то уравнение (3) допускает интегрирующий множитель [1]. Выберем его в качестве λ :

$$\begin{aligned} \lambda = f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right), \\ f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда равенство (5) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} [\dot{x}^2 f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}') \lambda(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')] \Big|_{x_0}^x = 0$$

или

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \\ = \frac{1}{2} [f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}})] \Big|_{x_0}^x, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) &= a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k, \\ \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) &= \\ &= f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right). \end{aligned}$$

В том случае, когда $\dot{x} = \dot{x}(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (7) становится несобственным из-за того, что при $\dot{x} = 0$ значения $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}}/\dot{x}$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}}/\dot{x}$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (7) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности. Кроме того,

$$\begin{aligned} f^* \lambda^* &= (f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}))^2 \times \\ &\times \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')} dx \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (9)$$

имеет изолированный максимум по координате x для $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ — следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\dot{\mathbf{w}}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0, \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} f^*(x_0, \dot{x}_0, \mathbf{u}(x_0), \dot{\mathbf{u}}(x_0), \dot{\mathbf{w}}(x_0)) &= \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j(x_0) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_0), \\ f^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}(x_1), \dot{\mathbf{u}}(x_1), \dot{\mathbf{w}}(x_1)) &= \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j(x_1) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\dot{\mathbf{w}}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

Теперь рассмотрим обратное движение маятника и обозначим $\xi = -x$. Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11}\dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -F(-\xi, \mathbf{u}). \quad (12)$$

Уравнение (3) можно представить как

$$\xi \frac{d}{d\xi} [f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)\xi] - p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)\xi^2 = -F(-\xi, \mathbf{u}), \quad (13)$$

где $\mathbf{u}'_\xi = \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}$, $\mathbf{w}'_\xi = \frac{d\mathbf{w}}{d\xi}$ и

$$f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) = a_{11} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}u'_j\xi - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}w'_k\xi, \\ p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial \xi} u'_j\xi + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial \xi} w'_k\xi \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}')}{\partial \xi}.$$

Следовательно, получаем

$$\lambda_\xi = f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi) \exp \left(- \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)} d\xi \right), \quad (14)$$

и формулу (7) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_\xi F(-\xi, \mathbf{u}) d\xi = -\frac{1}{2} [f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}})]_{\xi_0}^{\xi}, \quad (15)$$

где

$$f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11}\dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k}\dot{w}_k, \\ \lambda_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) \times \exp \left(- \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}'_\xi)} d\xi \right).$$

Амплитуда колебаний имеет вид $J = \xi_1 - \xi_0$, где $\xi_1 > \xi_0$, $\xi_0 = \xi(\xi_0) = 0$, $\xi_1 = \xi(\xi_1) = 0$ и $\xi(\xi) \neq 0$, ес-

ли $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$. Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(\xi)$, $\dot{\mathbf{w}}(\xi)$, при которых значение функционала J максимально (минимально).

2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСКАЧИВАНИЕ (УСПОКОЕНИЕ) КОЛЕБАНИЙ

Пусть λ определено формулой (6). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (Принцип наилучшего раскачивания). *Предположим, что движение системы описывается уравнением (2) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда*

I. *Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (4), обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения*

$$\mathbf{u}_M(x) = \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) = \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M) \dot{w}_k \right], \quad (16)$$

где $\chi = \lambda(x) \cdot \text{sign}[\lambda(x_1 - 0)]$.

II. *Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (4), обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения*

$$\mathbf{u}_m(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) = \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m) \dot{w}_k \right], \quad (17)$$

где $\chi = \lambda(x) \cdot \text{sign}[\lambda(x_0 + 0)]$.

Теорема 2 (Принцип оптимального успокоения колебаний). *Предположим, что движение системы описывается уравнениями (2) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда:*

I. *Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые при выполнении ограничений (4) обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами*

$$\mathbf{u}_m(x) = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_1) = \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m) \dot{w}_k \right], \quad (18)$$

где $\chi = \lambda(x) \cdot \text{sign}[\lambda^*(x_1 - 0)]$.

II. *Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые при выполнении ограничений (4) обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями*

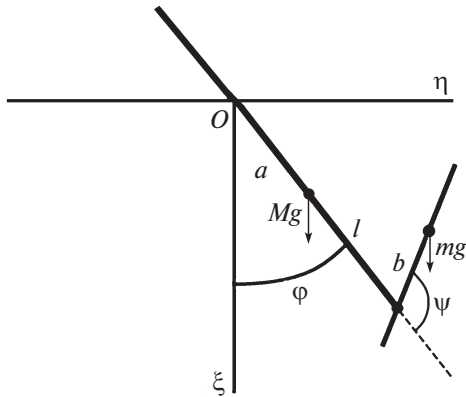


Рис. 1. Двухзвенный маятник.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} \left[\lambda(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u}) \right], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $\chi = \lambda(x) \cdot \text{sign}[\lambda^*(x_0 + 0)]$.

Доказательство приведенных теорем достигается применением формул (7) и (15), а также с учетом того, что в уравнении (2) коэффициент $a_{11} > 0$. Рассмотрим, например, утверждение I теоремы 1. В соответствии с общим принципом вариационного исчисления [2] множители λ и λ_ξ , входящие в формулы (7) и (15), играют вспомогательную роль и не участвуют в процессе оптимизации. Они служат лишь для тождественного преобразования уравнения движения. Пусть значение координаты $x = x_1$ соответствует максимально достижимому отклонению системы от положения равновесия, но первое равенство формулы (16) в какой-нибудь внутренней точке отрезка $[x_0, x_1]$ нарушено. Тогда, как следует из формулы (7), в этой точке можно за счет управления $\mathbf{u}$, оставив значения других управлений неизменными, увеличить подынтегральную функцию в (7), а за счет этого увеличить значение скорости $\dot{x}_1 > 0$. Тогда вырастет и новое значение координаты $x = x_1$, при котором скорость $\dot{x}$ делается равной нулю. Полученное противоречие доказывает необходимость выполнения первого соотношения равенства (16). Второе соотношение равенства (16) аналогичным образом следует из того, что функции f^* в (7), (11) линейно зависят от скоростей системы.

Для доказательства утверждения II теоремы 1 следует воспользоваться формулой (15) с последующей интерпретацией полученного результата в терминах независимой переменной x .

Теорема 2 является взаимной по отношению к теореме 1, и поэтому доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Подробное доказательство приведенных выше теорем с помощью метода первой вариации см. в [3].

3. ПРИМЕР. ДВУХЗВЕННЫЙ МАЯТНИК ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Двухзвенный маятник (рис. 1) состоит из двух стержней. Первый стержень прикреплен к неподвижной точке O . К этому стержню на расстоянии l от его центра масс шарнирно прикреплен второй стержень. Обозначим M массу первого стержня, I — момент инерции первого стержня относительно его центра масс, φ — угол отклонения первого стержня от нижнего направления вертикали. Центр масс первого стержня расположен на расстоянии $a(t)$ от точки O . Пусть m — масса второго стержня, I_2 — момент инерции второго стержня относительно его центра масс, b — расстояние от точки прикрепления второго стержня до его центра масс, ψ — угол между вторым стержнем и продолжением первого стержня за точку соединения стержней, g — ускорение силы тяжести. Угол ψ и расстояние a примем в качестве управления с целью раскачивания системы, ограничив их допустимые значения: $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$, $a_m \leq a \leq a_M$.

Представленная механическая система может служить упрощенной математической моделью как для человека, раскачивающегося на качелях, так и для гимнаста, раскачивающегося на перекладине.

Для описания движения выберем начало O абсолютной системы координат в точке подвеса первого стержня, ось $O\xi$ направим вертикально вниз, ось $O\eta$ направим горизонтально в правую координатную полуплоскость. Координаты и скорости центра масс первого стержня примут вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a \cos \varphi, & \eta_1 &= a \sin \varphi, \\ \dot{\xi}_1 &= -a\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{a} \cos \varphi, \\ \dot{\eta}_1 &= a\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{a} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Координаты и скорости центра масс второго стержня запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= (a + l) \cos \varphi + b \cos(\varphi + \psi), \\ \dot{\xi}_2 &= -[(a + l)\dot{\varphi} \sin \varphi + b(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \sin(\varphi + \psi)] + \dot{a} \cos \varphi, \\ \eta_2 &= (a + l) \sin \varphi + b \sin(\varphi + \psi), \\ \dot{\eta}_2 &= (a + l)\dot{\varphi} \cos \varphi + b(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\varphi + \psi) + \dot{a} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Найдем координаты центра масс системы:

$$\xi_c = \frac{aM + (a+l)m}{M+m} \cos \varphi + \frac{bm}{M+m} \cos(\varphi + \psi),$$

$$\eta_c = \frac{aM + (a+l)m}{M+m} \sin \varphi + \frac{bm}{M+m} \sin(\varphi + \psi).$$

Кинетический момент системы относительно точки O имеет вид

$$K = (I + Ma^2)\dot{\varphi} + I_c(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) + m(\xi_2\dot{\eta}_2 - \eta_2\dot{\xi}_2).$$

После преобразований получим

$$K = [I + Ma^2 + m(a+l)(a+l+b\cos\psi)]\dot{\varphi} + \{I_c + mb[(a+l)\cos\psi + b]\}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) - mab\sin\psi.$$

Уравнение изменения кинетического момента запишем следующим образом:

$$\frac{d(f\dot{\varphi})}{dt} = F(\varphi, a, \psi) = -g\{[a(M+m) + lm]\sin\varphi + bm\sin(\varphi + \psi)\}, \quad (20)$$

где

$$f = [I + m(a+l)(a+l+b\cos\psi)] + \{I_c + mb[(a+l)\cos\psi + b]\}(1 + \psi') - ma'b\sin\psi,$$

а ψ' , a' — производные по переменной φ . Из формулы (6) найдем $\lambda = f'$.

Предположим, что $0 < b < a + l$. Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ , а $\varphi_1 > 0$ — соответственно правая граница, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (16) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полуколебания состоит в применении правила

$$\psi = \begin{cases} \psi_M, & \text{если } \varphi + \psi_M < -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \text{если } \varphi + \psi_m \leq -\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_M, \\ \psi_m, & \text{если } \varphi + \psi_m > -\frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (21)$$

$$a = \begin{cases} a_M, & \text{если } \varphi < 0, \\ a_m, & \text{если } \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Из формулы для f видно, что при $0 < b < a + l$ в любом из перечисленных в формуле (21) случаев знак λ остается положительным.

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (17) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \begin{cases} \psi_m, & \text{если } \varphi + \psi_m > \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \varphi, & \text{если } \varphi + \psi_m \leq \frac{\pi}{2} \leq \varphi + \psi_M, \\ \psi_M, & \text{если } \varphi + \psi_M < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (22)$$

$$a = \begin{cases} a_m, & \text{если } \varphi < 0, \\ a_M, & \text{если } \varphi \geq 0. \end{cases}$$

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания двухзвенного маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения качелей следует применять формулы (22); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (21), и так далее.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний двухзвенного маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (21); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (22), и так далее.

Из уравнения (20) видим, что при $b = 0$ угол ψ становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться правилами для циклических координат раздела 2. В том случае, когда $b > (a + l)$, параметр χ для значений $|\psi| > \arccos\left[-\frac{a+l}{b}\right]$ в режиме

$\varphi + \psi = \pm \frac{\pi}{2}$ может менять знак. Для того чтобы избежать этой неприятности, следует принять ограничения $\psi_m > -\arccos\left[-\frac{a+l}{b}\right]$, $\psi_M < \arccos\left[-\frac{a+l}{b}\right]$.

В рассмотренном выше примере была применена теорема об изменении кинетического момента системы вместо уравнений Лагранжа второго рода. Применение этой теоремы к угловым координатам приводит к уравнениям, эквивалентным уравнениям Лагранжа, но содержащим меньше взаимно уничтожающихся слагаемых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение предложенных алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (16)–(19), предполагает учет информации о моментах времени достижения экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полуколебания. Условия оптимальности (16)–(19) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [4]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Дополнительным

преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. Условия оптимальности управления амплитудой колебаний, предложенные в работе, упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики,

Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2019-1623.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр., обновл. М.: URSS, 2016. 512 с. ISBN 978-5-382-01622-1.
2. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. М.: Гос. Изд-во технико-теор. лит-ры. (Успехи физических наук. Т. 63, вып. 1а), 1957. С. 5–32.
3. Голубев Ю.Ф. Метод оптимального управления колебаниями механических систем // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 33. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.

OPTIMIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS OSCILLATIONS

Yu. F. Golubev^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

The problem of control of oscillations in the vicinity of the equilibrium position of a scleronomic mechanical system with several degrees of freedom is solved. One degree of freedom is not controllable directly, and the rest are controlled by servos. An original method is proposed for finding the optimal control of amplitude of oscillations of the uncontrolled degree of freedom by the choice of control of other degrees of freedom. The set of controlled coordinates can include both positional and cyclic coordinates. Compared to Pontryagin's maximum principle, the proposed method does not contain conjugate variables and significantly reduces the dimension of the analyzed system of differential equations. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the example of a specific pendulum system.

Keywords: mechanical system, oscillations, amplitude, control, optimization