ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 502, с. 11–18

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

ОБ УСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ, ПЕРФОРИРОВАННОЙ МНОЖЕСТВАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ И КРИТИЧЕСКОГО РАЗМЕРА

© 2022 г. Ж. И. Диаз[1],*, А. В. Подольский[2], Т. А. Шапошникова[2],**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 30.08.2021 г.
Поступило 30.08.2021 г.
После доработки 27.11.2021 г.
Принято к публикации 02.12.2021 г.

Изучено асимптотическое поведение оптимального управления для уравнения Пуассона, заданного в области, периодически перфорированной множествами произвольной формы. На границе полостей рассматривается краевое условие типа Робина. Функционал стоимости зависит от интеграла энергии и L^2-нормы управления. Рассматривается так называемое критическое соотношение между параметрами задачи и периодом структуры $\varepsilon \to 0$. Два "странных" члена появляются в предельной задаче. Данная статья обобщает на случай полостей произвольной формы предыдущие работы авторов, посвященные усреднению задач оптимального управления в областях перфорированных шарами.

Ключевые слова: усреднение, оптимальное управление, "странный член", перфорированная область, критический случай

DOI: 10.31857/S2686954322010039

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается усреднение задачи оптимального управления для уравнения Пуассона в области, перфорированной множествами произвольной формы, с функционалом стоимости, зависящим от интеграла энергии и L^2-нормы управления. На границе полостей задается краевое условие Робина, содержащее большой параметр, зависящий от периода структуры. Предполагается, что параметры задачи принимают так называемые критические значения. В работах [4, 7] изучена аналогичная задача управления в области, перфорированной шарами критического радиуса. Как известно, исследование подобных задач в областях, перфорированных множествами произвольной формы, сталкивается с трудностями при определении "странных" членов, что было показано в [2, 3, 11]. Следуя данным работам, для определения "странных" членов в предельной задаче и в предельном функционале стоимости мы используем вспомогательные функции, являющиеся решениями задач, аналогичных тем, которые появляются при определении емкости выбрасываемых множеств. Более того, в работе показано, что данный подход может применяться для доказательства сходимости энергии в задаче без управления. Это позволяет улучшить предыдущие оценки, полученные в [2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$. В кубе $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$ рассмотрим подобласть G_0, $\overline{G_0} \subset Y$, которая является звездной относительно шара $T_\rho^0 \subset Y$ радиуса ρ с центром в начале координат. Пусть $\delta B = \{x\colon \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta > 0$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\widetilde{\Omega_\varepsilon} = \{x \in \Omega\colon \rho(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}.$$

Через $\mathbb{Z}^n$ обозначим множество всех векторов $j = (j_1, \dots, j_n)$ с целочисленными координатами j_k, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

[1] *Instituto de Matematica Interdisciplinar, Universidad Complutense Madrid, Spain*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: ji_diaz@mat.ucm.es*
***E-mail: shaposh.tan@mail.ru*

где $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \overline{G_\varepsilon^j} \subset Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j, G_\varepsilon^j \cap \widetilde{\Omega_\varepsilon} \neq \varnothing\}$, $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\alpha$, $\alpha = \dfrac{n}{n-2}$. Легко видеть, что $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, $d = \text{const} > 0$. Заметим, $\overline{G_\varepsilon^j} \subset T_{Ca_\varepsilon}^j \subset T_{\varepsilon/4}^j \subset Y_\varepsilon^j$, где T_r^j – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$, $C = \text{const} > 0$.

Определим множества

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{G_\varepsilon}, \quad S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon, \quad \partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \partial\Omega.$$

В Ω_ε мы рассматриваем задачу оптимального управления: для данного управления $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ и функций $f \in L^2(\Omega)$, $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq a_0 > 0$ и при $\gamma = \dfrac{n}{n-2}$, $n \geq 3$, мы обозначаем через $u_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ единственное обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered} -\Delta u_\varepsilon(v) = f + v, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(v) + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon(v) = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(v) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где ν – вектор внешней единичной нормали к S_ε. Введем функционал стоимости $J_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}$ вида

$$J_\varepsilon(v) \equiv \frac{\eta}{2} \|\nabla(u_\varepsilon(v) - u_T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{N}{2} \|v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{2}$$

где u_T – целевая функция, $u_T \in H_0^1(\Omega)$, η, N – положительные постоянные. Отметим, что если параметр η принимает достаточно большое значение, то мы получаем аппроксимативную управляемость в $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ (в том смысле, что состояние $u_\varepsilon(v)$ может быть на столько близким к целевой функции, насколько требуется, т.е. $\|\nabla(u_\varepsilon(v) - u_T)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta$, для произвольно малого $\delta > 0$ (см. [5, Параграф 1.6]). Надо найти такое $v_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, что выполнено

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{v \in L^2(\Omega_\varepsilon)} J_\varepsilon(v). \tag{3}$$

Известно (см. [6]), что существует единственное управление $v_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, такое что имеет место (3). Такое управление называется оптимальным. Цель настоящей работы – изучение предела при $\varepsilon \to 0$ оптимального управления v_ε и функционала стоимости $J_\varepsilon(v_\varepsilon)$.

Будем говорить, что функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ является обобщенным решением задачи (1), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(v) \nabla\phi dx + \varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon} a(x) u_\varepsilon(v) \phi ds = \int_{\Omega_\varepsilon} (f + v)\phi dx, \tag{4}$$

где ϕ – произвольная функция из $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$. Через $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ обозначено замыкание по норме пространства $H^1(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}_\varepsilon$, обращающихся в нуль в окрестности границы $\partial\Omega$.

Сопряженная задача, связанная с оптимальным управлением v_ε, имеет вид (см. [4, 7])

$$\begin{gathered} \Delta p_\varepsilon = \Delta(u_\varepsilon(v_\varepsilon) - u_T), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu(p_\varepsilon - u_\varepsilon(v_\varepsilon) + u_T) + \varepsilon^{-k} a(x) p_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ p_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{5}$$

где $p_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ – обобщенное решение приведенной задачи. Известно, что

$$v_\varepsilon = -\frac{\eta}{N} p_\varepsilon. \tag{6}$$

Таким образом, оптимальная пара $\left(u_\varepsilon, -\dfrac{\eta}{N} p_\varepsilon\right) \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \times H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ – обобщенное решение системы

$$\begin{gathered} -\Delta u_\varepsilon = f - \frac{\eta}{N} p_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \Delta p_\varepsilon = \Delta(u_\varepsilon - u_T), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ \partial_\nu(p_\varepsilon - u_\varepsilon + u_T) + \varepsilon^{-\gamma} a(x) p_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = p_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{7}$$

Для $u_\varepsilon, p_\varepsilon$ справедливы оценки (см. [4, 7])

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} + \|p_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \leq K\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_T\|_{H_0^1(\Omega)}\right), \tag{8}$$

где K здесь и далее не зависит от ε. Из оценки (8) получим

$$\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K, \quad \|P_\varepsilon p_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K, \tag{9}$$

где $P_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ – оператор H^1-продолжения, такой что

$$\begin{gathered} \|P_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)}, \\ \|\nabla P_\varepsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{gathered} \tag{10}$$

Из оценок (8)–(10) получаем, что существует подпоследовательность (сохраним за ней обозначение исходной), такая что при $\varepsilon \to 0$

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad P_\varepsilon p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{11}$$

Формулировка результатов усреднения оптимальной задачи требует введения ряда вспомогательных функций. Отметим, что данные функции могут быть записаны в явном виде в том случае, когда перфорации являются шарами.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть $w_\varepsilon^j(x) \in H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j)$, $j \in \Upsilon_\varepsilon$, – обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \\ \partial_\nu w_\varepsilon^j + \varepsilon^{-\gamma} a(x)(w_\varepsilon^j - 1) = 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{gathered} \tag{12}$$

Введем функцию

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon^j(x), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}. \end{cases} \tag{13}$$

Ниже формулируются некоторые результаты, полученные в работах [2, 3, 11].

Л е м м а 1. *Для* $W_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ *выполнены оценки*

$$\|\nabla W_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \|W_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \le K, \quad \|W_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le K\varepsilon^2, \tag{14}$$

$$0 \le W_\varepsilon \le 1, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \tag{15}$$

Следовательно, для некоторой подпоследовательности при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} P_\varepsilon W_\varepsilon &\rightharpoonup 0 \ \text{ слабо в } \ H_0^1(\Omega), \\ P_\varepsilon W_\varepsilon &\to 0 \ \text{ сильно в } \ L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть $w_0(x, y)$ – обобщенное решение внешней задачи

$$\begin{gathered} \Delta_y w_0 = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}, \\ \partial_\nu w_0 + C_0 a(x)(w_0(x, y) - 1) = 0, \quad y \in \partial G_0, \\ w_0(x, y) \to 0, \quad |y| \to \infty, \end{gathered} \tag{17}$$

где $x \in \Omega$ рассматривается в качестве параметра. Следуя работам [2, 3, 11], обозначим через $\mathscr{C}$ пространство функций $\phi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}})$, для которых существует положительная константа $R > 0$, такая что $\phi = 0$ вне T_R^0, где T_R^0 – шар радиуса R с центром в начале координат. Для произвольной функции $u \in \mathscr{C}$ имеем

$$\left\| |y|^{-1} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})} \le K(n) \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})}. \tag{18}$$

В пространстве $\mathscr{C}$ мы можем ввести норму

$$\|v\|_{\mathscr{C}} \equiv \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})}. \tag{19}$$

Обозначим через $\mathscr{V}$ – замыкание пространства функций $\mathscr{C}$ по норме (19). Легко видеть, что $\mathscr{V}$ является гильбертовым пространством.

Будем говорить, что функция $w_0 \in \mathscr{V}$ – обобщенное решение внешней задачи (17), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla w_0 \nabla \phi \, dy + C_0 a(x) \int_{\partial G_0} (w_0 - 1) \phi \, ds = 0, \tag{20}$$

для произвольной функции $\phi \in \mathscr{V}$.

Имеем (см. [2, 3, 11]) следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Существует единственное обобщенное решение* $w_0 \in \mathscr{V}$ *задачи* (17) *и оно удовлетворяет оценкам*

$$\begin{gathered} 0 \le w_0 \le 1, \quad \max_{x \in \Omega} |w_0(x, y)| \le \frac{K}{|y|^{n-2}}, \\ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}. \end{gathered} \tag{21}$$

Следующая лемма описывает соотношение между функциями w_ε^j и $w_0\left(P_\varepsilon^j, \dfrac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}\right)$ на ячейке (см. [2, 3, 11]).

Л е м м а 3. *Положим* $v_\varepsilon^j(x) = w_\varepsilon^j - w_0\left(P_\varepsilon^j, \dfrac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}\right)$. *Тогда*

$$\begin{gathered} \left\|\nabla v_\varepsilon^j\right\|^2_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})} + \varepsilon^{-\gamma} \left\|v_\varepsilon^j\right\|^2_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)} \le K\varepsilon^{n+2}, \\ \left\|v_\varepsilon^j\right\|^2_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})} \le K\varepsilon^{n+2}, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\left|v_\varepsilon^j\right| \le \max_{x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j} \left| w_0\left(P_\varepsilon^j, \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}\right)\right|. \tag{23}$$

Определим функцию

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \int_{\partial G_0} \partial_\nu w_0(x, y) \, ds_y = \\ &= C_0 |\partial G_0| a(x)(1 - \langle w_0(x, y)\rangle_{\partial G_0}), \end{aligned} \tag{24}$$

где через $\langle w\rangle_{\partial G_0}$ обозначено среднее значение функции w на ∂G_0. Заметим, что функция $H_0(x)$ неявно зависит от функции a и поверхности полостей ∂G_0, т.е. $H_0(x : \partial G_0, a)$.

Введем в рассмотрение еще одну вспомогательную функцию θ_ε^j как решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta \theta_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \\ \partial_\nu \theta_\varepsilon^j + \varepsilon^{-\gamma} a(x)(\theta_\varepsilon^j - w_\varepsilon^j) = 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ \theta_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{gathered} \tag{25}$$

Положим

$$\Theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \theta_\varepsilon^j(x), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \tag{26}$$

Легко видеть, что $\Theta_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Л е м м а 4. *Функция* Θ_ε, *определенная в* (26), *удовлетворяет следующим оценкам*:

$$\|\nabla\Theta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}\|\Theta_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \le K, \quad \|\Theta_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le K\varepsilon^2, \tag{27}$$

$$0 \le \Theta_\varepsilon \le W_\varepsilon. \tag{28}$$

Доказательство. Возьмем θ^j_ε в качестве пробной функции в интегральном тождестве для задачи (25) и получим

$$\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} |\nabla\theta^j_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)|\theta^j_\varepsilon|^2 ds = \\ = \varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)\theta^j_\varepsilon w^j_\varepsilon ds. \tag{29}$$

Отсюда следует, что

$$\|\nabla\theta^j_\varepsilon\|^2_{L^2(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon})} + \varepsilon^{-\gamma}\|\theta^j_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial G^j_\varepsilon)} \le K\varepsilon^{-\gamma}\|w^j_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial G^j_\varepsilon)}. \tag{30}$$

Тогда, из леммы 1 получаем оценки (27).

Покажем, что $\Theta_\varepsilon \le W_\varepsilon$. Возьмем в интегральном тождестве для задачи (25) $(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ = \sup(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon, 0) \in H^1(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}, \partial T^j_{\varepsilon/4})$ в качестве пробной функции и получим

$$\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} \nabla\theta^j_\varepsilon\nabla(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ dx + \\ + \varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)((\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+)^2 ds = 0.$$

Возьмем эту же функцию в интегральном тождестве для w^j_ε, тогда

$$\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} \nabla w^j_\varepsilon\nabla(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ dx = \\ = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)(w^j_\varepsilon - 1)(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ ds \ge 0.$$

Объединяя полученные тождества, выводим

$$0 \le \int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} |\nabla(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+|^2 dx + \\ + \varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)((\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+)^2 ds = \\ = \varepsilon^{-\gamma}\int_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)(w^j_\varepsilon - 1)(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ ds \le 0.$$

Таким образом, $(\theta^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon)^+ \equiv 0$ в $T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}$. Оставшиеся неравенства могут быть получены аналогичным способом.

Из леммы 4 следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$P_\varepsilon\Theta_\varepsilon \rightharpoonup 0, \ \text{слабо в} \ H^1_0(\Omega). \tag{31}$$

Также рассмотрим функцию $\theta(x, y)$, являющуюся решением внешней задачи

$$\Delta_y\theta = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n\setminus\overline{G_0}, \\ \partial_\nu\theta + C_0 a(x)(\theta(x, y) - w_0(x, y)) = 0, \quad y \in \partial G_0, \\ \theta(x, y) \rightharpoonup 0, \quad |y| \to \infty, \tag{32}$$

где $x \in \Omega$ рассматривается в качестве параметра.

Аналогично лемме 2 имеем, что существует единственное обобщенное решение задачи (32) в пространстве $\mathcal{V}$, которое удовлетворяет оценкам (21). Более того, справедлива оценка $0 \le \theta \le w_0$ и утверждение

Лемма 5. *Функция* $h^j_\varepsilon = \theta^j_\varepsilon - \theta\left(P^j_\varepsilon, \dfrac{x - P^j_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)$ *удовлетворяет следующим оценкам*:

$$\|\nabla h^j_\varepsilon\|^2_{L^2(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon})} + \varepsilon^{-\gamma}\|h^j_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial G^j_\varepsilon)} \le K\varepsilon^{n+2}, \\ \|h^j_\varepsilon\|^2_{L^2(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G}^j_\varepsilon)} \le K\varepsilon^{n+2}. \tag{33}$$

Определим функцию

$$H_1(x) = \int_{\partial G_0} \partial_\nu\theta ds_y = \\ = C_0|\partial G_0| a(x)(\langle w_0(x, y)\rangle_{\partial G_0} - \langle\theta(x, y)\rangle_{\partial G_0}). \tag{34}$$

Отметим, что так же, как и для H_0, имеем $H_1(x) = H_1(x : \partial G_0, a)$.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема дает описание предельных функций u_0, p_0, определенных в (11).

Теорема 1. *Пусть* $n \ge 3$, $\alpha = \gamma = \dfrac{n}{n-2}$ *и пара* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *является обобщенным решением системы* (7). *Тогда пара* (u_0, p_0), *определенная в* (11), *является обобщенным решением системы*

$$-\Delta u_0 + C_0^{n-2} H_0(x) u_0 = f - \frac{\eta}{N} p_0, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta p_0 + C_0^{n-2} H_0(x) p_0 = -\Delta(u_0 - u_T) + \\ + C_0^{n-2} H_1(x) u_0, \quad x \in \Omega, \\ u_0 = p_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{35}$$

где $H_0(x)$, $H_1(x)$ — *функции, определенные в* (24) *и* (34) *соответственно.*

Замечание 1. Если $G_0 = \{|y| < 1\}$, мы можем найти функции $w_0(x, y)$ и $\theta(x, y)$ в явном виде, а значит, и вспомогательные функции $H_0(x)$, $H_1(x)$:

$$w_0(x,y) = \frac{a(x)}{a(x)+\dfrac{n-2}{C_0}}|y|^{2-n},$$
$$\theta(x,y) = \left(\frac{a(x)}{a(x)+\dfrac{n-2}{C_0}}\right)^2 |y|^{2-n}, \tag{36}$$

$$H_0(x) = (n-2)\omega_n \frac{a(x)}{a(x)+\dfrac{n-2}{C_0}},$$
$$H_1(x) = (n-2)\omega_n \left(\frac{a(x)}{a(x)+\dfrac{n-2}{C_0}}\right)^2, \tag{37}$$

где ω_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Этот частный случай был рассмотрен в [7] для перфорированной области и в [4] для области, перфорированной вдоль многообразия.

Доказательство. Во-первых, покажем, что функция u_0 является обобщенным решением задачи

$$\begin{gathered}-\Delta u_0 + C_0^{n-2}H_0(x)u_0 = f - \eta N^{-1}p_0, \quad x\in\Omega,\\ u_0 = 0, \quad x\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{38}$$

Возьмем функцию $\phi = \psi - W_\varepsilon\psi$, где W_ε определена в (13), $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, в качестве пробной в интегральном тождестве для функции u_ε. Получим

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(\psi - W_\varepsilon\psi)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon(\psi - W_\varepsilon\psi)ds = \\ = \int_{\Omega_\varepsilon}(f-\eta N^{-1}p_\varepsilon)(\psi - W_\varepsilon\psi)dx.\end{gathered} \tag{39}$$

Используя (16), выводим

$$\begin{gathered}-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\psi)dx = -\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u_\varepsilon\psi)\nabla W_\varepsilon dx + \alpha_\varepsilon = \\ = -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\nabla(u_\varepsilon\psi)\nabla w^j_\varepsilon dx + \alpha_\varepsilon = \\ = -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}\cup\partial G^j_\varepsilon}\partial_\nu w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds + \alpha_\varepsilon = \\ = \varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial G^j_\varepsilon}a(x)w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds - \varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial G^j_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon\psi ds - \\ - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds + \alpha_\varepsilon = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon(\psi - W_\varepsilon\psi)ds - \\ - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds + \alpha_\varepsilon,\end{gathered} \tag{40}$$

где $\alpha_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Из (39) и (40) следует

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla\psi dx - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = \\ = \int_{\Omega_\varepsilon}(f-\eta N^{-1}p_\varepsilon)(\psi - W_\varepsilon\psi)dx + \alpha_\varepsilon.\end{gathered} \tag{41}$$

Далее, справедливо равенство (см. работы [2, 3, 11])

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w^j_\varepsilon\psi u_\varepsilon ds = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w_0\left(P^j_\varepsilon, \frac{x-P^j_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)\psi u_\varepsilon ds = \\ = -C_0^{n-2}\int_\Omega H_0(x)u_0\psi(x)dx.\end{gathered} \tag{42}$$

Тогда из (41) и (42) получаем интегральное тождество для функции u_0

$$\begin{gathered}\int_\Omega\nabla u_0\nabla\psi dx + C_0^{n-2}\int_\Omega H_0(x)u_0\psi(x)dx = \\ = \int_\Omega(f-\eta N^{-1}p_0)\psi dx.\end{gathered} \tag{43}$$

Во-вторых, покажем, что функция p_0 является обобщенным решением задачи

$$\begin{gathered}-\Delta p_0 + C_0^{n-2}H_0(x)p_0 = -\Delta(u_0 - u_T) + C_0^{n-2}H_1(x)u_0,\\ x\in\Omega,\\ p_0 = 0, \quad x\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{44}$$

В интегральном тождестве для задачи (5) в качестве пробной функции возьмем $\phi = \psi - W_\varepsilon\psi$. Получим

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\nabla(\psi - W_\varepsilon\psi)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon}a(x)(\psi - W_\varepsilon\psi)p_\varepsilon ds = \\ = \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u_\varepsilon - u_T)\nabla(\psi - W_\varepsilon\psi)dx = \\ = \int_\Omega\nabla(u_0 - u_T)\nabla\psi dx - \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\psi)dx + \beta_\varepsilon,\end{gathered} \tag{45}$$

где $\beta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Используя свойства функции W_ε и формулу Грина, имеем

$$\begin{gathered}-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\psi)dx = -\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla W_\varepsilon\nabla(p_\varepsilon\psi)dx + \hat\alpha_\varepsilon = \\ = -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial G^j_\varepsilon}\partial_\nu w^j_\varepsilon p_\varepsilon\psi ds - \\ - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w^j_\varepsilon p_\varepsilon\psi ds + \hat\alpha_\varepsilon =\end{gathered} \tag{46}$$

$$= \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)p_\varepsilon\psi(W_\varepsilon - 1)ds - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} \partial_\nu w^j_\varepsilon p_\varepsilon \psi ds + \hat{\alpha}_\varepsilon.$$

Из (45) и (46) выводим, что левая часть равенства (45) есть

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon \nabla\psi dx - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} \partial_\nu w^j_\varepsilon p_\varepsilon\psi ds + \hat{\alpha}_\varepsilon,$$

где $\hat{\alpha}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, предел при $\varepsilon \to 0$ левой части равенства (45) равен

$$\int\limits_{\Omega}\nabla p_0\nabla\psi dx + C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega} H_0(x)p_0\psi dx. \tag{47}$$

В силу (45) и (47), чтобы получить интегральное тождество для функции p_0, достаточно найти предел выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\psi)dx.$$

Из свойств функции W_ε следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\psi)dx = -\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon W_\varepsilon\psi ds + \kappa_\varepsilon, \tag{48}$$

где $\kappa_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Беря в интегральном тождестве для u_ε в качестве пробной функции $\Theta_\varepsilon\psi$, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(\Theta_\varepsilon\psi)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\Theta_\varepsilon\psi ds = \\ = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}(f - \eta N^{-1}p_\varepsilon)\Theta_\varepsilon\psi dx.\end{gathered} \tag{49}$$

Так как θ^j_ε – обобщенное решение задачи (25), то с помощью формулы Грина заключаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\nabla\theta^j_\varepsilon\nabla(u_\varepsilon\psi)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)\theta^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds - \\ - \int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu\theta^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{\partial G^j_\varepsilon} a(x)w^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds.\end{gathered} \tag{50}$$

Суммирую по всем $j \in \Upsilon_\varepsilon$, выводим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla\Theta_\varepsilon\nabla(u_\varepsilon\psi)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)\Theta_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds - \\ - \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu\theta^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon W_\varepsilon\psi ds.\end{gathered} \tag{51}$$

Учитывая (31), вычтем из (51) тождество (49). Получим

$$\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)W_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu\theta^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds + \widetilde{\alpha_\varepsilon}, \tag{52}$$

где $\widetilde{\alpha_\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из (48) и (52) следует, что

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla W_\varepsilon\psi dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)W_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu\theta^j_\varepsilon u_\varepsilon\psi ds = \\ = -C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega} H_1(x)u_0(x)\psi(x)dx.\end{gathered} \tag{53}$$

Тогда предел при $\varepsilon \to 0$ правой части равенства (45) равен

$$\int\limits_{\Omega}\nabla(u_0 - u_T)\nabla\psi dx + C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega} H_1(x)u_0\psi dx. \tag{54}$$

Из (47) и (54) мы заключаем, что функция $p_0 \in H^1_0(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (44).

5. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА СТОИМОСТИ

Перейдем к нахождению предела функционала стоимости

$$\begin{gathered}J_\varepsilon(v_\varepsilon) = J_\varepsilon(\eta N^{-1}p_\varepsilon) \equiv \\ \equiv \frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon - \nabla u_T|^2 dx + \frac{\eta^2}{2N}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon^2 dx\end{gathered} \tag{55}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Т е о р е м а 2. *Имеет место равенство*

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla(u_0 - u_T)|^2 dx + \\ + \frac{\eta C_0^{n-2}}{2}\int\limits_{\Omega} H_1(x)u_0^2 dx + \frac{N}{2}\int\limits_{\Omega} v_0^2 dx \equiv J_0(v_0),\end{gathered} \tag{56}$$

где $v_0 = -\eta N^{-1}p_0$ – оптимальное управление в задаче

$$\begin{gathered}-\Delta u_0(v_0) + C_0^{n-2}H_0(x)u_0(v_0) = f + v_0, \\ x \in \Omega, \quad u_0(v_0) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{gathered} \tag{57}$$

и

$$J_0(v_0) = \inf_{v\in L^2(\Omega)} J_0(v). \tag{58}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в интегральном тождестве для p_ε в качестве пробной функции u_ε. Получим

$$\begin{gathered}\eta\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u_\varepsilon - u_T)\nabla u_\varepsilon dx = \\ = \eta\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\nabla u_\varepsilon dx + \eta\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} a(x)p_\varepsilon u_\varepsilon ds.\end{gathered} \tag{59}$$

Аналогично, используя p_ε в качестве пробной функции в интегральном тождестве для u_ε, имеем

$$\eta\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla p_\varepsilon dx+\eta\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon p_\varepsilon ds = = \eta\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(f-\eta N^{-1}p_\varepsilon)p_\varepsilon dx. \quad (60)$$

Из (59), (60) выводим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u_\varepsilon-u_T)\nabla u_\varepsilon dx=\frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}(f-\eta N^{-1}p_0)p_0dx = = \frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}\nabla u_0\nabla p_0dx+\frac{\eta}{2}C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega}H_0(x)u_0p_0dx = = \frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}\nabla(u_0-u_T)\nabla u_0dx+\frac{\eta}{2}C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega}H_1(x)u_0^2dx. \quad (61)$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}\nabla(u_\varepsilon-u_T)\nabla u_T dx=\frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega}\nabla(u_0-u_T)\nabla u_T dx,$$

и используя (61), получим утверждение теоремы 2.

6. СХОДИМОСТЬ ЭНЕРГИИ В ОТСУТСТВИИ УПРАВЛЕНИЯ

В последнем разделе мы воспользуемся результатами, полученными выше, для доказательства сходимости энергии в отсутствии управления. Как мы увидим ниже, предельная энергия содержит некоторый “странный” член, ассоциированный с усредненной задачей. Чтобы это показать, мы будем рассматривать вспомогательную задачу (5), в которой положим $v = 0$ и $u_T = 0$. Полученные ниже результаты улучшают результаты о сходимости энергии, приведенные в [2].

Т е о р е м а 3. *Пусть u_ε — обобщенное решение* (1) *с $v\equiv 0$ и параметры задачи принимают критические значения, и пусть $u_0\in H_0^1(\Omega)$ — слабый предел последовательности продолжений $P_\varepsilon u_\varepsilon$. Тогда имеет место сходимость*

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2dx\to\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2dx+C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega}H_1(x)u_0^2dx. \quad (62)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно (см. [2, 3, 11]), что $u_0\in H_0^1(\Omega)$ — обобщенное решение следующей задачи:

$$-\Delta u_0+C_0^{n-2}H_0(x)u_0=f,\quad x\in\Omega,\qquad u_0(x)=0,\quad x\in\partial\Omega. \quad (63)$$

Пусть p_ε — обобщенное решение задачи

$$\Delta p_\varepsilon=\Delta u_\varepsilon,\quad x\in\Omega_\varepsilon,\qquad \partial_\nu(p_\varepsilon-u_\varepsilon)+\varepsilon^{-\gamma}a(x)p_\varepsilon=0,\quad x\in S_\varepsilon,\qquad p_\varepsilon=0,\quad x\in\partial\Omega. \quad (64)$$

Как мы показали выше, $P_\varepsilon p_\varepsilon\rightharpoonup p_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, и p_0 — обобщенное решение задачи

$$-\Delta p_0+C_0^{n-2}H_0(x)p_0=-\Delta u_0+C_0^{n-2}H_1(x)u_0,\quad x\in\Omega,\qquad p_0=0,\quad x\in\partial\Omega, \quad (65)$$

где H_0 и H_1 — функции, определенные в (24) и (34) соответственно.

Из интегрального тождества для задачи (1) с $v\equiv 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla p_\varepsilon dx+\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon p_\varepsilon ds=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}fp_\varepsilon dx.$$

Аналогично, из интегрального тождества для задачи p_ε, заключаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\nabla u_\varepsilon dx+\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}a(x)p_\varepsilon u_\varepsilon ds=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2dx.$$

Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}fp_\varepsilon dx\to\int\limits_{\Omega}fp_0dx = = \int\limits_{\Omega}\nabla u_0\nabla p_0dx+C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega}H_0(x)u_0p_0dx = = \int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2dx+C_0^{n-2}\int\limits_{\Omega}H_1(x)u_0^2dx,$$

что завершает доказательство.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование Ж.И. Диаза частично поддержано проектами MTM2014-57113-P и MTM2017-85449-P (DGISPI, Spain).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cioranescu D., Murat F.* Un terme e’trange venu d’ailleurs // Nonlinear Partial Diff. Eq. and their Applications. V. II. College de France Seminar. Paris. France. V. 60. Research Notes in Mathematics. London: Pitman, 1982. P. 98–138.
2. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T.A.* Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites. Anomalous improved homogenization. Berlin: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. 2021. V. 39. 184 p.
3. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* Change of homogenized absorption term in diffusion processes with reaction on the boundary of periodically distributed asymmetric particles of critical size // Electronic Journal of Differential Equations. 2017. V. 178. P. 1–25.
4. *Díaz J.I., Podolskiy A.V., Shaposhnikova T.A.* On the convergence of controls and cost functionals in some optimal control hererohenеous problems when the homogenization process gives rise to some strange term //

J. Math. Anal. Appl. 2021. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125559

5. *Glowinski R., Lions J.-L., He J.* Exact and Approximate Controllability for Distributed parameter Systems. A Numerical Approach. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 458 p.
6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
7. *Подольский А.В., Шапошникова Т.А.* Оптимальное управление и "странный член", возникающий при усреднении уравнения Пуассона в перфорированной области с краевыми условиями типа Робина в критическом случае // ДАН. Т. 495. С. 59–64.
8. *Rajesh M.* Convergence of some energies for the Dirichlet problem in perforated domains // Rendiconti di Matematica. Ser. VII. 2001. V. 21. P. 259–274.
9. *Saint Jean Paulin J., Zoubairi H.* Optimal control and "strange term" for a Stokes problem in perforated domains // Portugaliae Mathematica. 2002. V. 59. Fasc. 2. P. 161–178.
10. *Kesavan S., Saint Jean Paulin J.* Homogenization of an Optimal Control Problem // SIAM J. Contr. Optim.1997. V. 35. P. 1557–1573.
11. *Зубова М.Н., Шапошникова Т.А.* Усреднение краевой задачи в области, перфорированной множествами произвольной формы, с неоднородным нелинейным краевым условием общего вида на границе полостей в случае критического значения параметров // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 191–219.
12. *Martin H.* Strömqvist. Optimal Control of the obstacle Problem in a Perforated Domain // Appl. Math. Optim. 2012. V. 66. P. 239–255.
13. *Kesavan S. and Saint Jean Paulin J.* Optimal Control on Perforated Domains // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 229 (2). P. 563–586.
14. *Attouch H. and Picard C.* Variational inequalities with varying obstacles: the general form of the limit problem // J. Funct. Anal. 1983. V. 50 (3). P. 329–386.
15. *Raymond J.-P.* Optimal control of Partial Differential Equations. Bookficus, Institut de Mathematique de Toulouse, Universite Paul Sabatier, 2015.
16. *C. D'Apice and U. De Maio*. On homogenization of a mixed boundary optimal control problem // Differential Integral Equations. 2008. V. 21 (3-4). P. 201–234.
17. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с.
18. *Troltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics. 2010. 418 p.

ON THE HOMOGENIZATION OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN A DOMAIN PERFORATED BY HOLES OF CRITICAL SIZE AND ARBITRARY SHAPE

J. I. Díaz[a], A. V. Podolskiy[b], and T. A. Shaposhnikova[b]

[a] *Instituto de Matematica Interdisciplinar, Universidad Complutense Madrid, Spain*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The paper studies the asymptotic behavior of the optimal control for the Poisson type boundary value problem in a domain perforated by holes of an arbitrary shape with Robin-type boundary conditions on the internal boundaries. The cost functional is assumed to be dependent on the gradient of the state and on the usual norm of the control. We consider the so-called "critical" relation between the problem parameters and the period of the structure $\varepsilon \to 0$. Two "strange" terms arise in the limit. The paper extends, by first time in the literature, previous papers devoted to the homogenization of the control problem which always assumed the symmetry of the periodic holes.

Keywords: homogenization, optimal control, perforated domain, strange term, arbit-rary shape, critical case