ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 502, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 531.01

К ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Н. В. Денисова[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.10.2021 г.
Поступило 18.10.2021 г.
После доработки 16.11.2021 г.
Принято к публикации 18.11.2021 г.

Рассматривается динамика систем в потенциальном поле, кинетическая энергия которых может быть представлена в конформном виде. В случае двух степеней свободы конформные координаты всегда существуют. Предполагается, что на систему могут действовать еще гироскопические силы. При фиксированном значении полной энергии с помощью замены времени уравнения движения приведены к простому “универсальному” виду. Указан случай интегрируемости уравнений движения при фиксированном значении полной энергии.

Ключевые слова: конформные координаты, условные интегралы, инвариантные торы

DOI: 10.31857/S2686954322010027

1. КОНФОРМНЫЕ КООРДИНАТЫ

Пусть M^n – конфигурационное многообразие механической системы с n степенями свободы. Предположим, что обобщенные (локальные) координаты на M^n можно выбрать так, что кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = F(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{x}_k^2}{2}.$$

Такие координаты называются конформными (для римановой метрики T), а функция $F > 0$ – конформным множителем. Хорошо известно, что при $n = 2$ конформные координаты всегда существуют (хотя бы локально). Для их конструктивного введения надо уметь решать уравнение Лапласа–Бельтрами для римановой метрики T.

Пусть на систему действуют потенциальные силы с потенциальной энергией $V: M \to \mathbb{R}$ и обобщенные гироскопические силы $-G(x)\dot{x}$, где G – кососимметрическая $(n \times n)$-матрица для всех $x \in M$. Обычно матрицу гироскопических сил G полагают равной

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T, \tag{1}$$

где $a(x)$ – ковекторное поле на конфигурационном многообразии M. Это лагранжева производная линейной формы $(a(x), \dot{x})$. В этом случае уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - G\dot{x}, \tag{2}$$

как известно, будут гамильтоновыми. Если G не имеет вида (1), то свойство гамильтоновости уравнений (2) теряется.

Наличие обобщенных гироскопических сил не влияет на сохранность полной энергии

$$T + V = h \quad (= \mathrm{const}).$$

Зафиксируем значение энергии h и будем рассматривать движения системы внутри области возможности движения

$$\{x \in M: h - V(x) > 0\}.$$

Перейдем к каноническим переменным x, y, полагая

$$y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = F\dot{x}.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_k = \frac{y_k}{F}, \quad 1 \le k \le n. \tag{3}$$

Это – половина уравнений движения. Вторую половину составляют собственно динамические уравнения

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - G(x)\dot{x}, \tag{4}$$

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
**E-mail: ndenis@mech.math.msu.su*

где

$$H = \frac{\sum y_k^2}{2F} + V(x)$$

есть функция Гамильтона. Так как

$$-\frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\sum y_k^2}{2F^2}\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial V}{\partial x_k} =$$
$$= \frac{1}{F}\left[(h-V)\frac{\partial F}{\partial x_k} + F\frac{\partial (h-V)}{\partial x_k}\right] = \frac{1}{F}\frac{\partial W}{\partial x_k},$$

где $W = F(h-V) \geq 0$, то уравнения (3)–(4) принимают вид

$$\dot{x} = \frac{y}{F}, \quad \dot{y} = \frac{1}{F}\frac{\partial W}{\partial x} - G\dot{x}.$$

После замены времени

$$dt = Fd\tau$$

динамика системы описывается уравнениями

$$x' = y, \quad y' = \frac{\partial W}{\partial x} - Gy. \tag{5}$$

Здесь штрих обозначает производную по новому времени τ, а также учтены соотношения (3). Система (5) допускает первый интеграл

$$\frac{(y,y)}{2} - W = 0. \tag{6}$$

Нулевое значение его постоянной обусловлено соглашением о зафиксированном выше значении полной энергии системы.

Замены времени при фиксированной постоянной энергии играют ключевую роль при выводе принципа стационарности укороченного действия. Поучительное обсуждение этого круга вопросов можно найти в классических книгах [1, 2] (см. также [3]).

2. ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

При $n = 2$ уравнения движения (5) с интегралом (6) можно еще упростить. Положим

$$y_1 = \sqrt{2W}\sin\varphi, \quad y_2 = \sqrt{2W}\cos\varphi.$$

Тогда соотношение (6) будет выполнено автоматически. Переменные x_1, x_2 и $\varphi \bmod 2\pi$ будут координатами на трехмерной энергетической поверхности (6). Выведем уравнения для изменения этих переменных. Первые два уравнения системы (5) примут следующий вид:

$$x_1' = \sqrt{2W}\sin\varphi, \quad x_2' = \sqrt{2W}\cos\varphi. \tag{7}$$

Далее,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{y_2}\right).$$

Следовательно,

$$\varphi' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_1^2 + y_2^2}.$$

Положим

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где γ – некоторая заданная функция от x_1, x_2. С учетом уравнений (5) и обозначения (8) получаем

$$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2W}}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\cos\varphi - \frac{\partial W}{\partial x_2}\sin\varphi\right) + \gamma. \tag{9}$$

Систему дифференциальных уравнений (7) и (9) можно представить в более компактном виде, если положить $\mu = \sqrt{2W}$:

$$\begin{gathered} x_1' = \mu\sin\varphi, \quad x_2' = \mu\cos\varphi, \\ \varphi' = \frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cos\varphi - \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\sin\varphi + \gamma. \end{gathered} \tag{10}$$

Эта система зависит от двух известных функций μ и γ от конформных координат x_1, x_2.

При заменах времени сохраняются фазовые траектории. Поэтому периодические траектории и первые интегралы в системе (2) с энергией h совпадают с таковыми в преобразованной системе (10).

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть снова $n = 2$ и $\gamma = 0$ (гироскопические силы отсутствуют).

Теорема 1. *Если функция* $\ln\mu$ *гармоническая, то система уравнений* (10) *интегрируется в квадратурах.*

Другими словами, все решения исходной системы (2) с энергией h можно найти с помощью квадратур.

Доказательство. Так как $\gamma = 0$, то система дифференциальных уравнений (10) является ограничением гамильтоновой системы на трехмерное многообразие интеграла энергии. Поэтому для точного интегрирования достаточно знать ее первый интеграл (это вытекает из теоремы Эйлера–Якоби о последнем множителе [1]). Будем искать его в виде

$$\Phi = \varphi - f(x_1, x_2). \tag{11}$$

Функция f должна удовлетворять следующей системе в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_1} = \mu\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x_2} = -\mu\frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{12}$$

Следовательно, $\ln\mu$ и f будут сопряженными гармоническими функциями. Условие $\Delta\ln\mu = 0$ есть условие разрешимости системы относительно f. Как хорошо известно, функция f находится по известной функции $\ln\mu$ с помощью простых квадратур. Что и требовалось.

Пусть c — постоянная интеграла (11). Тогда интегрирование системы (10) (при $\gamma = 0$) сводится к решению следующей автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости:

$$x_1' = \mu\sin(f + c), \quad x_2' = \mu\cos(f + c).$$

Дивергенция правой части этой системы равна нулю, что просто выводится из соотношений (12). Значит, она решается с помощью метода интегрирующего множителя Эйлера.

Сделаем несколько замечаний.

1. Каков смысл условия гармоничности функции $\ln\mu$? Чтобы это выяснить, положим $V = 0$. Тогда уравнения (10) (в которых уже положено $\gamma = 0$) будут описывать геодезические линии римановой метрики T. В этом случае $\ln\mu = \frac{1}{2}\ln F + \mathrm{const}$. Следовательно, $\ln F$ также будет гармонической функцией. Так как F — это конформный множитель метрики T, то ее кривизна равна нулю.

2. Как известно, компактные поверхности совместных уровней первых интегралов вполне интегрируемых гамильтоновых систем будут торами с условно-периодическими движениями. Пусть конфигурационное пространство M будет двумерным тором с угловыми координатами x_1 и x_2. Тогда инвариантные поверхности $\{\Phi = c = \mathrm{const}\}$ также будут двумерными торами, однозначно проектирующимися на M. Согласно (12), $\ln\mu$ и f — гармонические функции на торе. Ввиду их ограниченности, они постоянны: $\mu = \mu_0$ и $f = f_0$. Следовательно,

$$x_1' = \omega_1, \quad x_2' = \omega_2, \tag{13}$$

причем частоты $\omega_1 = \mu_0\sin(f_0 + c)$, $\omega_2 = \mu_0\cos(f_0 + c)$ постоянны. Значит, x_1 и x_2 — линейные функции нового времени τ. Отношение частот

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \operatorname{tg}(f_0 + c) \tag{14}$$

есть число вращения Пуанкаре — непостоянная функции на семействе инвариантных торов.

В старом времени уравнения (13) принимают следующий вид:

$$\dot{x}_1 = \frac{\omega_1}{F}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\omega_2}{F}. \tag{15}$$

Хотя правые части уже непостоянны, но (согласно геометрической теореме Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем) их также можно линеаризовать: заменой угловых переменных $x \mapsto z \bmod 2\pi$ система (15) приводится к условно-периодическому виду

$$\dot{z}_1 = \omega_1', \quad \dot{z}_2 = \omega_2', \tag{16}$$

причем $\omega_k' = \omega_k/\langle F\rangle$, где

$$\langle F\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F dx_1 dx_2.$$

Отношение частот ω_1'/ω_2', конечно, совпадает с числом вращения Пуанкаре (14).

Функция F в (15) (плотность интегрального инварианта этой системы) не произвольная: она входит в уравнения движения и тем самым влияет на свойство условной периодичности решений системы (2) с энергией h. Для произвольной функции $F\colon M \mapsto \mathbb{R}$ система (15), как известно, не приводится к виду (16) [4, 5].

3. Так как φ — угловая координата, то интеграл будет многозначной функцией на трехмерном энергетическом многообразии. Однако $\sin\Phi$ (или $\cos\Phi$) будет уже однозначным первым интегралом. Ясно, что $\sin\Phi$ есть линейная комбинация $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. С другой стороны, $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ пропорциональны скоростям $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Следовательно, при условии гармоничности $\ln\mu$ уравнения движения допускают условный (существующий при зафиксированном значении h) интеграл, линейный по скоростям. Условия существования таких интегралов в системах с двумя степенями свободы обсуждаются в [2].

4. Последнее замечание касается условных полиномиальных интегралов высших степеней. Зафиксируем полную энергию системы h и конформный множитель F. Пусть $\Phi(x, y)$ — полиномиальный по импульсам интеграл системы уравнений

$$x' = y, \quad y' = \frac{\partial W}{\partial x}. \tag{17}$$

Тогда Φ будет условным полиномиальным интегралом с энергией h гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad H = \frac{(y, y)}{2F} + V, \tag{18}$$

где $V = h - \frac{W}{F}$.

Это замечание почти очевидно: согласно п. 1, заменой времени уравнения Гамильтона (18) на уровне энергии $\{H = h\}$ приводятся к уравнениям Ньютона (17), причем $W = F(h - V)$. Остается вспомнить, что при заменах времени первые интегралы сохраняются.

Обзор результатов, связанных с поиском полиномиальных интегралов уравнений (17), вместе с соответствующими ссылками содержится в [6, 7].

4. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ОБЪЕМА

Т е о р е м а 2. *Система уравнений* (10) *допускает инвариантную* 3-*форму*

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\varphi. \tag{19}$$

Другими словами, фазовый поток этой системы сохраняет фазовый объем. Доказательство основано на простой проверке классического условия Лиувилля:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} = 0,$$

где x_1', x_2' и φ' определяются формулами (10).

Если в системе дифференциальных уравнений (10) вернуться к старому времени t, то получим инвариантную 3-форму

$$F dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\varphi. \tag{20}$$

Интересно отметить, что инвариантная форма (19) (а также (20)) не зависит от присутствия обобщенной гироскопической силы. Если матрица гироскопических сил имеет вид (1), то наличие инвариантной формы на регулярной изоэнергетической поверхности вытекает из классической теоремы Лиувилля о сохранении стандартной формы объема фазовым потоком гамильтоновой системы. Для нас существенное значение имеет не сколько факт существования инвариантной формы, но и ее явный вид в выбранных нами координатах.

Теорема 2 позволяет применять результаты эргодической теории для исследования поведения решений системы (10) (теорема Пуанкаре о возвращении, теорема Биркгофа–Хинчина, ...). Например, если Q замкнуто, то при $t \to \infty$

$$\varphi(t) = \lambda t + o(t),$$

где λ – интегрируемая функция от начальных данных, причем среднее значение λ по мере (20) равно

$$\left(\int_M \gamma F dx_1 \wedge dx_2\right) \Big/ \left(\int_M F dx_1 \wedge dx_2\right).$$

5. ПОЛЯ РИБА И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Напомним, что векторное поле v на трехмерном многообразии Q с формой объема Ω называется полем Риба, если найдется 1-форма ψ такая, что

1) $i_v\Omega = d\psi$,

2) $i_v\psi = \psi(v) > 0$.

Поля Риба играют важную роль в симплектической топологии для доказательства существования периодических траекторий [8].

В нашем случае Q – это трехмерное энергетическое многообразие $\{T + V = h\} = \{(y, y)/2 + W = 0\}$, форма объема задается формулой (19), а векторное поле v имеет компоненты x_1', x_2' и φ', определяемые формулами (10). Всюду дальше будем предполагать, что 2-форма гироскопических сил

$$\Gamma = \gamma(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

точна: она равна $d\vartheta$, где 1-форма ϑ задана на всем конфигурационном пространстве M. Сама 1-форма ϑ определена с точностью до дифференциала функции на M.

Л е м м а 1. $i_v\Omega = d\psi$, *где*

$$\psi = \mu \sin\varphi dx_1 + \mu\cos\varphi dx_2 + \vartheta. \tag{21}$$

Это утверждение проверяется прямым вычислением. Согласно определению внутреннего произведения векторного поля и дифференциальной формы, а также формулам (10),

$$i_v\Omega = \mu\sin\varphi dx_2 \wedge d\varphi + \mu\cos\varphi d\varphi \wedge dx_1 + \\ + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cos\varphi - \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\sin\varphi + \gamma\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Нетрудно проверить, что это равно дифференциалу 1-формы (21).

Отметим, что сумма первых двух слагаемых в (21) совпадает с фундаментальной 1-формой гамильтоновой механики $y_1dx_1 + y_2dx_2$, ограниченной на энергетическое многообразие Q.

Л е м м а 2. *Если всюду на* Q

$$\inf_\vartheta |\vartheta(v)| < \mu^2, \tag{22}$$

то $\psi(v) > 0$.

Действительно, согласно (21) и (10),

$$\psi(v) = \mu^2 + \vartheta(v).$$

В неравенстве (22) ϑ – 1-формы на M такие, что $d\vartheta = \Gamma$.

Так как ϑ – 1-форма на M, то в конформных координатах

$$\vartheta = a(x_1, x_2)dx_1 + b(x_1, x_2)dx_2.$$

Следовательно,

$$\vartheta(v) = \mu(a\sin\varphi + b\cos\varphi),$$

и поэтому

$$|\vartheta(v)| \le \mu\sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Таким образом, неравенство (22) можно представить в следующем виде:

$$\inf(a^2 + b^2) < \mu^2 \qquad (23)$$

во всех точках M. Здесь нижняя грань берется по всем 1-формам ϑ таким, что $d\vartheta = \Gamma$.

Следствие. *Если выполнено* (22), *то векторное поле* (10) *будет полем Риба на* Q.

В симплектической топологии известна следующая гипотеза Вейнстейна: векторное поле Риба на любом трехмерном замкнутом многообразии всегда имеет хотя бы одну периодическую траекторию (см. обсуждение в [8]). Правда, пока это доказано для случая трехмерный сферы [9]. Применим этот результат Хофера к задаче о периодических траекториях фиксированной энергии h в задачах динамики, когда M — двумерная сфера. Тогда при $h > \max V$ энергетическое многообразие Q — расслоенное пространство с базой S^2 и слоем окружность — будет диффеоморфно $SO(3)$ (трехмерная сфера с отождествленными антиподальными точками). Так как имеется неразветвленное двулистное накрытие $S^3 \to SO(3)$, то наше векторное поле v (определенное дифференциальными уравнениями (10)) можно поднять на S^3. И если v есть векторное поле Риба на $SO(3)$, то таковым будет и "поднятое" векторное поле. Следовательно, если выполнено неравенство (22), (т.е. гироскопические силы не так велики), то динамическая система будет иметь хотя бы одну периодическую траекторию при фиксированном значении полной энергии h.

Стоит подчеркнуть два момента. Так как S^2 односвязна, то любая замкнутая 2-форма Γ на S^2 ($d\Gamma = 0$) будет точной. С другой стороны, неравенство (23) в точности эквивалентно условию положительной определенности квадратичной формы $4L_0L_2 - L_1^2$ (L_2 — кинетическая энергия, $L_0 = h - V$, а L_1 — 1-форма гироскопических сил), что, в частности, влечет ограниченность снизу функционала укороченного действия

$$\int(2\sqrt{L_0L_2} + L_1)dt.$$

Это обстоятельство позволяет доказать существование периодической траектории вариационными методами, что и было фактически сделано Биркгофом в [10] (относительно современного состояния вопроса см. [11]). В [3] симплектическая топология применяется для доказательства существования периодических траекторий в случае, когда M^2 — двумерный тор.

Отметим в заключение, что если, наоборот, гироскопические силы достаточно большие, то траектории системы в конфигурационном пространстве закручиваются в одну сторону: угловая переменная φ монотонно меняется со временем. Более точно, для этого достаточно выполнения неравенства

$$\gamma^2 > \left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2.$$

Это неравенство позволяет построить отображение Пуанкаре секущей плоскости $\{\varphi = 0\} \subset Q$ на себя.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит академика РАН В.В. Козлова за обсуждения затронутых в статье вопросов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.–М.: ОНТИ, 1936. 271 с.
2. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.–Ижевск: Ред. журнала "Регулярная и хаотическая динамика". 1999. 407 с.
3. *Козлов В.В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН. 1985. Т. 40. Вып. 2. С. 33–60.
4. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным ннвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
5. *Козлов В.В.* Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 201–218.
6. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Современные методы теории интегрируемых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 295 с.
7. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та. 1995. 430 с.
8. *Хофер Х.* Голоморфные кривые и динамика в трехмерном пространстве. В кн.: Лекции по симплектической геометрии и топологии. М.: Изд-во МЦНМО, 2008. С. 39–104.
9. *Hofer H.* Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three // Invent. Math. 1993. V. 114. P. 515–563.
10. *Birkhoff G.D.* Dynamical systems with two degrees of freedom // Trans. Amer. Math. Soc. 1917. V. 18. P. 199–300.
11. *Тайманов И.А.* Замкнутые экстремали на двумерных многообразиях // УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 143–185.

ON THE DYNAMICS OF SYSTEMS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

N. V. Denisova[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The dynamics of systems in a potential field is considered where kinetic energy can be presented in a conformal form. In the case of two degrees of freedom the conformal coordinates are always exists. It is assumed that more gyroscopic forces. At a fixed value of the total energy with by changing the time, the equations of motion are reduced to the simple the "universal" kind. The case of integrability of the equations motion at a fixed total energy

Keywords: conformal coordinates, conditional integrals, invariant tori