ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 31–37

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:531.332

СВОЙСТВА АГРЕГИРОВАННОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

 А. А. Злотник[1,2,*], А. С. Федченко[1,]**

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 21.05.2021 г.
Поступило 27.05.2021 г.
После доработки 28.09.2021 г.
Принято к публикации 29.09.2021 г.

Для агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси получено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии, выведены существование, единственность и L^2-диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и параболичность по Петровскому и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой квазигазодинамической системы.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, гомогенная газовая смесь, уравнение баланса энтропии, параболичность по Петровскому, L^2-диссипативность

DOI: 10.31857/S2686954321060199

Уравнения движения смесей вязкого сжимаемого газа даны, в частности, в [1–3]. Регуляризованные, или квазигазодинамические (КГД), системы уравнений однокомпонентного газа представлены в [4–6]. Их математические свойства, близкие рассматриваемым ниже, выведены в [6–8]. КГД системы уравнений бинарных смесей газов, в том числе гомогенных (с общей скоростью и температурой компонент), рассмотрены в [5, 9, 10].

В этом сообщении изучается агрегированная КГД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций. Для нее приводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии между компонентами. Устанавливаются также существование, единственность и L^2-диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и параболичность по Петровскому (на компактных множествах значений искомых функций) и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой КГД системы.

[1]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*

[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: azlotnik@hse.ru*

***E-mail: asfedchenko@yandex.ru*

Указанная КГД система уравнений состоит из следующих уравнений баланса массы компонент, суммарного импульса и суммарной полной энергии:

$$\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\alpha)+\mathbf{d}_\alpha] = 0,\quad \alpha = 1,2,\ldots,K, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes\mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div}\Pi + [\rho - \tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]\mathbf{f}, \tag{2}$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + \langle\rho_\alpha h_\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\alpha)\rangle\right] = \operatorname{div}(-\mathbf{q}+\Pi\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\cdot\mathbf{f} + Q. \tag{3}$$

В ней основные искомые функции $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_K > 0$ — плотности компонент смеси, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\theta > 0$ — общие скорость и абсолютная температура смеси, зависящие от $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $t \ge 0$, где $K \ge 2$ и $n = 1,2,3$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1,\ldots,\partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а div от тензора берется по его первому индексу.

Компоненты смеси — совершенные политропные газы с уравнениями состояния

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha = R_\alpha\rho_\alpha\theta,\quad \varepsilon_\alpha = c_{V\alpha}\theta,\quad \alpha = 1,\ldots,K,$$

где p_α и ε_α – давление и удельная внутренняя энергия компоненты α, с постоянными $\gamma_\alpha > 1$, $R_\alpha > 0$ и $c_{V\alpha} > 0$. Кроме того, $h_\alpha = \varepsilon_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = c_{p\alpha}\theta$ – удельная энтальпия компоненты α, а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = c_{V\alpha} + R_\alpha$ – ее удельные теплоемкости.

Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются формулами

$$\rho = \langle\rho_\alpha\rangle := \rho_1 + \ldots + \rho_K, \quad p = \langle p_\alpha\rangle = R\rho\theta,$$
$$\varepsilon = \langle c_\alpha\varepsilon_\alpha\rangle = c_V\theta, \quad E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon,$$

с функциями $R := \langle c_\alpha R_\alpha\rangle$, $c_V := \langle c_\alpha c_{V\alpha}\rangle$ (а не постоянными как в однокомпонентном случае) и $c_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ – массовыми концентрациями компонент смеси.

Используются регуляризующие скорости компоненты α и суммарные скорости вида

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_\alpha &= \frac{\tau}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha\mathbf{f}],\\ \hat{\mathbf{w}}_\alpha &= \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_\alpha}\nabla p_\alpha - \mathbf{f}\right],\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w} := \langle c_\alpha\mathbf{w}_\alpha\rangle &= \frac{\tau}{\rho}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{f}],\\ \hat{\mathbf{w}} = \langle c_\alpha\hat{\mathbf{w}}_\alpha\rangle &= \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f}\right],\end{aligned} \tag{5}$$

где $\tau = \tau(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta) > 0$ – параметр регуляризации, а $\boldsymbol{\rho} := (\rho_1, \ldots, \rho_K)$.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, а поток тепла – вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d + \mathbf{q}^\tau$. Здесь тензор вязкости Навье–Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}\right] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I},$$
$$-\mathbf{q}^F = \kappa\nabla\theta,$$

где $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$ и $\kappa > 0$ – суммарные коэффициенты динамической и объемной вязкости и теплопроводности (они могут зависеть от $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)$), $\nabla\mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор порядка n. Регуляризующие тензор вязкости и поток тепла задаются формулами

$$\Pi^\tau = \rho\mathbf{u}\otimes\hat{\mathbf{w}} + \tau[\mathbf{u}\cdot\nabla p + \langle\gamma_\alpha p_\alpha\rangle\operatorname{div}\mathbf{u} - \langle(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha\rangle]\mathbb{I}, \tag{6}$$

$$-\mathbf{q}^\tau = \tau\{[c_V\rho\nabla\theta - \theta\nabla(R\rho)]\cdot\mathbf{u} - \langle Q_\alpha\rangle\}\mathbf{u}. \tag{7}$$

Плотность массовой силы $\mathbf{f}(x,t)$ и мощности тепловых источников $Q_\alpha(x,t) \geq 0$ заданы.

Указанная модель является регуляризованной системой уравнений Навье–Стокса гомогенной смеси вязких теплопроводных сжимаемых газов и переходит в нее при $\tau = 0$. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны 0, охватывается посредством использования искусственных коэффициентов μ, λ, κ, пропорциональных τ, см. [4–6]; ниже их конкретный вид несуществен. Для бинарной смеси ($K = 2$) при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ эти уравнения были выведены в [10] агрегированием по α КГД уравнений негомогенных смесей из [9].

Потоки диффузии и дополнительный поток тепла введем формулами

$$\begin{aligned}-\mathbf{d}_\alpha &:= d_0\left[\sum_{\beta:\beta\neq\alpha}\nabla(G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha\nabla\theta\right] =\\ &= d_0(K\nabla\overline{G}_\alpha + b_\alpha\nabla\theta),\\ &\alpha = 1, \ldots, K,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathbf{q}^d = \langle(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle, \tag{9}$$

где $G_\alpha = \varepsilon_\alpha - s_\alpha\theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\theta$ – потенциал Гиббса и $s_\alpha = s_{\alpha 0} - R_\alpha\ln\rho_\alpha + c_{V\alpha}\ln\theta$ – удельная энтропия компоненты α, с $s_{\alpha 0} = \mathrm{const}$. Величины $d_0 \geq 0$ и b_α здесь не конкретизируются; существенно, что они могут зависеть от искомых функций и предполагается, что $\langle b_\alpha\rangle = 0$. Здесь и ниже $\overline{\varphi}_\alpha := \varphi_\alpha - K^{-1}\langle\varphi_\alpha\rangle$; ясно, что $\langle\overline{\varphi}_\alpha\rangle = 0$. Важное свойство $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$ непосредственно следует из (8) и $\langle b_\alpha\rangle$=0.

Замена $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - K\overline{s}_\alpha$ позволяет переписать потоки (8) и (9) без явного использования s_α:

$$\begin{aligned}-\mathbf{d}_\alpha &= d_0\left[\theta K\overline{R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha} + (K\overline{R}_\alpha + \tilde{b}_\alpha)\nabla\theta\right],\\ \mathbf{q}^d &= \langle(c_{p\alpha} + K^{-1}\tilde{b}_\alpha)\theta\mathbf{d}_\alpha\rangle,\end{aligned} \tag{10}$$

поскольку $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$. Кроме того, так как $\rho_\alpha = \frac{c_\alpha p}{R\theta}$ и $R = \langle R_\alpha c_\alpha\rangle$, то верна также формула

$$\begin{aligned}-\mathbf{d}_\alpha = d_0\Big\{\theta\Big[K\overline{R_\alpha\frac{1}{c_\alpha}\nabla c_\alpha} - K\overline{R}_\alpha\frac{1}{R}\langle R_\alpha\nabla c_\alpha\rangle\Big] +\\ + K\overline{R}_\alpha\frac{1}{R\rho}\nabla p + \tilde{b}_\alpha\nabla\theta\Big\}.\end{aligned} \tag{11}$$

При $K = 2$ формулы (8), (9) принимают вид, эквивалентный указанному в [1, гл. VI]

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0[\nabla(G_1 - G_2) + b_1\nabla\theta],$$
$$\mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1\theta)\mathbf{d}_1,$$

а формулы (11), (10) преобразуются к более стандартному для бинарных смесей виду

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0\left[\frac{R_1R_2\theta}{Rc_1(1-c_1)}\nabla c_1 - \frac{R_1 - R_2}{R\rho}\nabla p + \tilde{b}_1\nabla\theta\right],$$
$$\mathbf{q}^d = (c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1)\theta\mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. в отсутствие термодиффузии) их вид упрощается.

Из уравнений (1)–(3) следует важное уравнение баланса суммарной массы

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0.$$

Ниже важны также эквивалентные (2), (3) (с учетом (1)) уравнения баланса скорости

$$\partial_t\mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p =$$
$$= \frac{1}{\rho}\{\operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})(\rho\hat{\mathbf{w}} + \nabla\langle\tau\gamma_\alpha p_\alpha\rangle) +$$
$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\hat{\mathbf{w}}) + \tau\langle\gamma_\alpha p_\alpha\rangle\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} +$$
$$+\nabla[\tau\mathbf{u}\cdot\nabla p - \tau\langle(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha\rangle]\} + \tag{12}$$
$$+\left[1 - \frac{1}{\rho}\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right]\mathbf{f}$$

и температуры

$$\partial_t\theta + \left(\mathbf{u} - \frac{\langle c_{V\alpha}\rho_\alpha\mathbf{w}_\alpha\rangle}{c_V\rho}\right)\cdot\nabla\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} =$$
$$= \frac{1}{c_V\rho}[\langle c_{V\alpha}\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha\rangle\theta +$$
$$+\operatorname{div}(-\mathbf{q} + \langle p_\alpha\mathbf{w}_\alpha\rangle) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\hat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + \langle Q_\alpha\rangle], \tag{13}$$

где символ : обозначает скалярное произведение тензоров.

Введем суммарную удельную энтропию $S := \langle c_\alpha s_\alpha\rangle$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $d_0 > 0$. Верно следующее регуляризованное уравнение баланса энтропии гомогенной многокомпонентной смеси при наличии потоков диффузии*:

$$\partial_t(\rho S) +$$
$$+\operatorname{div}\left[\langle\rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha)\rangle + \frac{1}{K}\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle + \frac{1}{\theta}(\mathbf{q}^F + \mathbf{q}^\tau)\right] = \tag{14}$$
$$= \mathcal{P}^{NS} + \langle\mathcal{P}^\tau_\alpha\rangle$$

с производством энтропии $\mathcal{P}^{NS} + \langle\mathcal{P}^\tau_\alpha\rangle$, где

$$\mathcal{P}^{NS} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] +$$
$$+\frac{1}{\theta^2}\kappa|\nabla\theta|^2 + \frac{1}{Kd_0\theta}\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\rangle \geq 0,$$

$$\mathcal{P}^\tau_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\tau\theta}|\hat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 + \tau\frac{R_\alpha}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u})]^2 +$$
$$+\tau c_{V\alpha}\rho_\alpha\left[\mathbf{u}\cdot\nabla\ln\theta + (\gamma_\alpha - 1)\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha}{2p_\alpha}\right]^2 +$$
$$+\frac{Q_\alpha}{\theta}\left(1 - \frac{\tau(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha}{4p_\alpha}\right),$$

причем $\mathcal{P}^\tau_\alpha \geq 0$ при условии $\tau(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha \leq 4p_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,K$.

Уравнение баланса энтропии (14) сохраняет силу при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = 1,\ldots,K$ (при $K = 2$ см. также [10]) и/или $\tau = 0$. В этих существенно более простых случаях следует отбросить слагаемые соответственно с $\mathbf{d}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$, $\mathbf{q}^\tau$, $\mathcal{P}^\tau_\alpha$ в его левой и правой частях.

Ниже полагаем, что $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и (за исключением теоремы 3) $\mathbf{f} = 0$, $Q_\alpha = 0$, $\alpha = 1,\ldots,K$. Введем вектор искомых функций $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (12) и (13) с точностью $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$:

$$\partial_t\rho_\alpha + \nabla\rho_\alpha\cdot\mathbf{u} + \rho_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u} =$$
$$= \tau[R_\alpha\theta\Delta\rho_\alpha + [\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla]\rho_\alpha +$$
$$+2\rho_\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R_\alpha\rho_\alpha\Delta\theta] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{15}$$
$$\alpha = 1,\ldots,K,$$

$$\partial_t\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + R\nabla\theta =$$
$$= 2\tau\frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle +$$
$$+\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau\frac{\langle\gamma_\alpha p_\alpha\rangle}{\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \tag{16}$$
$$+\tau[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla]\mathbf{u} + 2\tau R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),$$

$$\partial_t\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \tau\frac{\theta^2}{c_V\rho}\langle R^2_\alpha\Delta\rho_\alpha\rangle +$$
$$+2\tau\frac{R\theta}{c_V}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla]\theta +$$
$$+\frac{\kappa}{c_V\rho}\Delta\theta + \tau\frac{\langle R_\alpha p_\alpha\rangle}{c_V\rho}\Delta\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{17}$$

где $\Delta = \operatorname{div}\nabla$ — оператор Лапласа, $\chi := \frac{1}{3}\mu + \lambda$. Эта система уравнений удобна ниже как для линеаризации исходной КГД системы, так и при анализе ее параболичности.

При $\mathbf{f} = 0$, $Q_1 = \ldots = Q_K = 0$ КГД система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x,t) \equiv \mathbf{z}_0 = (\rho_{10},\ldots,\rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ с $\rho_{10} > 0$, ..., $\rho_{K0} > 0$, $\theta_0 > 0$. Положим $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_*\tilde{\mathbf{z}}$, где

$D_* := \mathrm{diag}\{\rho_{1*},\ldots,\rho_{K*},u_*,\ldots,u_*,\theta_*\}$ – диагональная матрица порядка $K+n+1$ положительных обезразмеривающих параметров, выбираемых ниже, а $\tilde{\mathbf{z}} := (\tilde{\boldsymbol{\rho}},\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\theta})$ – вектор безразмерных возмущений, с $\tilde{\boldsymbol{\rho}} := (\tilde{\rho}_1,\ldots,\tilde{\rho}_K)$ и $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_n)$.

Линеаризуем КГД систему на таком фоновом решении $\mathbf{z}_0$. Введем фоновые нормированное решение $(\hat{\rho}_{10},\ldots,\hat{\rho}_{K0},\hat{\mathbf{u}}_0,\hat{\theta}_0) := D_*^{-1}\mathbf{z}_0$ с $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{u}_{10},\ldots,\hat{u}_{n0})$ и значения ρ, c_α, R и c_V, а также фоновые средние значения $R_\alpha\gamma_\alpha$ и R_α^2:

$$\rho_0 := \langle\rho_{\alpha0}\rangle,\quad c_{\alpha0} := \frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0},\quad R_0 := \langle c_{\alpha0}R_\alpha\rangle,$$
$$c_{V0} := \langle c_{\alpha0}c_{V\alpha}\rangle,\quad (R\gamma)_0 = \langle c_{\alpha0}R_\alpha\gamma_\alpha\rangle,$$
$$(R^2)_0 = \langle c_{\alpha0}R_\alpha^2\rangle.$$

Подставим решение в форме $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_*\tilde{\mathbf{z}}$ в редуцированную систему (15)–(17) и после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектор-функции $\tilde{\mathbf{z}}$ и ее производных 1-го и 2-го порядка легко получим линеаризованную систему уравнений

$$\partial_t\tilde{\rho}_\alpha + u_*(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha0}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}}) =$$
$$= \tau_0u_*^2\left[\frac{R_\alpha\theta_0}{u_*^2}\Delta\tilde{\rho}_\alpha + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\rho}_\alpha + \right.$$
$$\left. + 2\hat{\rho}_{\alpha0}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}\Delta\tilde{\theta}\right],$$
$$\alpha = 1,\ldots,K,$$

$$\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + u_*\left(\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\nabla\tilde{\theta}\right) =$$
$$= u_*^2\left[2\tau_0\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle + \right.$$
$$+ \frac{\mu_0}{\rho_0u_*^2}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \left(\frac{\chi_0}{\rho_0u_*^2} + \tau_0\frac{(R\gamma)_0\theta_0}{u_*^2}\right)\nabla\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} +$$
$$\left. + \tau_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\tilde{\theta}\right],$$

$$\partial_t\tilde{\theta} + u_*\left(\frac{R_0\hat{\theta}_0}{c_{V0}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\theta}\right) =$$
$$= u_*^2\left[\tau_0\frac{\hat{\theta}_0^2\theta_*}{c_{V0}\rho_0u_*^2}\langle R_\alpha^2\rho_{\alpha*}\Delta\tilde{\rho}_\alpha\rangle + \right.$$
$$+ 2\tau_0\frac{R_0\hat{\theta}_0}{c_{V0}}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\theta} +$$
$$\left. + \left(\tau_0\frac{(R^2)_0\theta_0}{c_{V0}u_*^2} + \frac{\kappa_0}{c_{V0}\rho_0u_*^2}\right)\Delta\tilde{\theta}\right].$$

Здесь τ_0, μ_0, χ_0, κ_0 – значения τ, μ, χ, κ на фоновом решении. Возник оператор $(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2 = (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla) = \hat{u}_{0i}\hat{u}_{0j}\partial_i\partial_j$, где по индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n.

В последней системе уравнений возможна одновременная симметризация как конвективных слагаемых (с производными ∂_i), так и диссипативных слагаемых (с производными $\partial_i\partial_j$), реализуемая при выполнении условий

$$\frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}^2} = \frac{R_\alpha\theta_0}{\rho_{\alpha0}\rho_0},\quad \alpha = 1,\ldots,K,\quad \frac{\theta_*^2}{u_*^2} = \frac{\theta_0}{c_{V0}},$$

которые ниже предполагаем выполненными (в них остается один свободный параметр). Это позволяет существенно упростить вид коэффициентов системы:

$$\partial_t\tilde{\rho}_\alpha + u_*(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha0}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}}) =$$
$$= \tau_0u_*^2[a_\alpha\hat{\theta}_0\Delta\tilde{\rho}_\alpha + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\rho}_\alpha +$$
$$+ 2\hat{\rho}_{\alpha0}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\Delta\tilde{\theta}], \tag{18}$$
$$\alpha = 1,\ldots,K,$$

$$\partial_t\tilde{\mathbf{u}} + u_*(\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + a_0\nabla\tilde{\theta}) =$$
$$= u_*^2[2\tau_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle +$$
$$+ \bar{\mu}_0\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\bar{\chi}_0 + \tau_0\hat{\theta}_0(a\gamma)_0)\nabla\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \tag{19}$$
$$+ \tau_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0a_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\tilde{\theta}],$$

$$\partial_t\tilde{\theta} + u_*(a_0\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\theta}) =$$
$$= u_*^2[\tau_0\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\Delta\tilde{\rho}_\alpha\rangle + 2\tau_0a_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \tag{20}$$
$$+ \tau_0(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)^2\tilde{\theta} + (\tau_0(a^2)_0 + \bar{\kappa}_0)\Delta\tilde{\theta}],$$

где для удобства записи введены постоянные

$$a_\alpha := \frac{R_\alpha\theta_*}{u_*^2},\quad a_0 := \langle c_{\alpha0}a_\alpha\rangle = \frac{R_0\theta_*}{u_*^2},$$
$$(a\gamma)_0 = \langle c_{\alpha0}a_\alpha\gamma_\alpha\rangle,\quad (a^2)_0 := \langle c_{\alpha0}a_\alpha^2\rangle,$$
$$\bar{\mu}_0 := \frac{\mu_0}{\rho_0u_*^2},\quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0u_*^2},\quad \bar{\kappa}_0 := \frac{\kappa_0}{c_{V0}\rho_0u_*^2}.$$

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Введем скалярные произведения и нормы $(\cdot,\cdot)_\Omega = (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{\Omega}} = (\cdot,\cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Omega}} = \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ в пространствах Лебега функций и вектор-функций соответственно.

Пусть $\mathbf{H}^1(\Omega)$ – пространство Соболева вектор-функций, а $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – замыкание в нем пространства гладких финитных в Ω вектор-функций.

Рассмотрим симметризованную линеаризованную систему уравнений (18)–(20) в цилиндре $Q := \Omega \times (0,\infty)$ при краевых и начальных условиях $\tilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$ и $\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}(x)$. Уравнениям (18)–(20) при $\partial_t\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t), \nabla\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ отвечает интегральное тождество

$$(\partial_t\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z})_{\mathbf{\Omega}} + u_*\mathcal{B}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{21}$$

В нем $t > 0$, $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho},\mathbf{u},\theta)(x)$ — вектор-функция (ее не следует не путать с решением КГД системы (1)—(3)) и стоят билинейные формы

$$\mathcal{B}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) := \langle(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha0}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}},\rho_\alpha)_\Omega\rangle + (\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}} + a_0\nabla\tilde{\theta},\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} + (a_0\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\theta},\theta)_\Omega$$

и (после выноса вперед слагаемых без множителя τ_0)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) :={}& \overline{\mu}_0(\nabla\tilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} + \overline{\chi}_0(\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}},\mathrm{div}\mathbf{u})_\Omega + \overline{\kappa}_0(\nabla\tilde{\theta},\nabla\theta)_{\mathbf{\Omega}} +\\ &+\tau_0[\langle(a_\alpha\hat{\theta}_0\nabla\tilde{\rho}_\alpha,\nabla\rho_\alpha)_{\mathbf{\Omega}}\rangle + \langle(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\rho}_\alpha,(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\rho_\alpha)_\Omega\rangle +\\ &+2((\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle)_{\mathbf{\Omega}} +\\ &+(\nabla\tilde{\theta},\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle)_{\mathbf{\Omega}} + 2(\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle,(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} +\\ &+(\hat{\theta}_0(a\gamma)_0\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}},\mathrm{div}\mathbf{u})_\Omega +\\ &+((\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} + 2(a_0\nabla\tilde{\theta},(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} +\\ &+(\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\tilde{\rho}_\alpha\rangle,\nabla\theta)_{\mathbf{\Omega}} + 2((\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{u}},a_0\nabla\theta)_{\mathbf{\Omega}} +\\ &+(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{\theta},\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta)_\Omega + ((a^2)_0\nabla\tilde{\theta},\nabla\theta)_{\mathbf{\Omega}}],\end{aligned}$$

где тензоры $\nabla\tilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}$ берутся как векторы длины n^2. Нетрудно видеть, что верны свойства

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z}) = 0 \quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega),\qquad \mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}}) \quad \forall\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1(\Omega). \tag{22}$$

Соответствующая $\mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z})$ квадратичная форма для любой $\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$ такова:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z}) ={}& \overline{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Omega}}^2 + \overline{\chi}_0\|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \overline{\kappa}_0\|\nabla\theta\|_{\mathbf{\Omega}}^2 +\\ &+\tau_0[\hat{\theta}_0\langle a_\alpha\|\nabla\rho_\alpha\|_{\mathbf{\Omega}}^2\rangle + \langle\|\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\rho_\alpha\|_\Omega^2\rangle +\\ &+\hat{\theta}_0(a\gamma)_0\|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \|(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Omega}}^2 +\\ &+\|\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta\|_\Omega^2 + (a^2)_0\|\nabla\theta\|_{\mathbf{\Omega}}^2 + 4(\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle +\\ &+a_0\nabla\theta,(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u})_{\mathbf{\Omega}} + 2(\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle,\nabla\theta)_{\mathbf{\Omega}}].\end{aligned}$$

Для обоснования ее положительной определенности важна следующая

Л е м м а 1. *Справедлива поточечная формула*

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}_0\langle a_\alpha|\nabla\rho_\alpha|^2\rangle + \langle(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\rho_\alpha)^2\rangle + \hat{\theta}_0(a\gamma)_0(\mathrm{div}\mathbf{u})^2 +\\ &+|(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}|^2 + (\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta)^2 + (a^2)_0|\nabla\theta|^2 +\\ &+2[\hat{\mathbf{u}}_0\cdot(\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle + a_0\nabla\theta)]\mathrm{div}\mathbf{u} + 2(\langle\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle +\\ &+a_0\nabla\theta,(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}) + 2(\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle,\nabla\theta)\\ &= \langle(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha0}\mathrm{div}\mathbf{u})^2 + |(\hat{\theta}_0a_\alpha)^{1/2}\nabla\rho_\alpha +\\ &+\sqrt{c_{\alpha0}}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha0}}a_\alpha\nabla\theta|^2\rangle +\\ &+(a_0\mathrm{div}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta)^2 + g_0(\mathrm{div}\mathbf{u})^2,\end{aligned}$$

где $\quad g_0 := \langle\hat{\rho}_{\alpha0}^2\rangle + a_0^2 - \hat{\theta}_0(a\gamma)_0 = \dfrac{\theta_0}{u_*^2}\langle c_{\alpha0}c_{V\alpha}(\gamma_\alpha - \tilde{\gamma}_0)^2\rangle \geq 0,$

$\tilde{\gamma}_0 := \dfrac{R_0}{c_{V0}} - 1,\ \hat{\theta}_0a_\alpha = \dfrac{\hat{\rho}_{\alpha0}^2}{c_{\alpha0}}.$

Форма $\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z})$ приводима к сумме квадратов и положительно определена на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Л е м м а 2. *Пусть* $\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$, *причем* $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. *Справедливы формула и неравенство*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z}) ={}& \overline{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Omega}}^2 + \overline{\chi}_0\|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 +\\ &+\overline{\kappa}_0\|\nabla\theta\|_{\mathbf{\Omega}}^2 + \tau_0[\langle\|\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha0}\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2\rangle +\\ &+\langle\|(\hat{\theta}_0a_\alpha)^{1/2}\nabla\rho_\alpha + \sqrt{c_{\alpha0}}(\hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha0}}a_\alpha\nabla\theta\|_{\mathbf{\Omega}}^2\rangle +\\ &+\|a_0\mathrm{div}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta\|_\Omega^2 + g_0\|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2] \geq\\ \geq{}& \max\{\delta_1\tau_0\langle\|\nabla\rho_\alpha\|_{\mathbf{\Omega}}^2\rangle, \overline{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Omega}}^2 + \overline{\chi}_0\|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \overline{\kappa}_0\|\nabla\theta\|_{\mathbf{\Omega}}^2\},\end{aligned}$$

где $\quad \delta_1 := \dfrac{1}{2}(1 + \max\{2\delta_0 - 1, 0\})^{-1}\hat{\theta}_0\min_{\alpha=\overline{1,K}}a_\alpha,$

$\delta_0 := \tau_0\max\left\{\dfrac{|\hat{\mathbf{u}}_0|^2}{\overline{\mu}_0},\dfrac{(a^2)_0}{\overline{\varkappa}_0}\right\}.$

Введем пространство $\mathbf{V}(Q_T) := \{\tilde{\mathbf{z}}\in L^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega)); \partial_t\tilde{\mathbf{z}}\in L^2((0,T);\mathbf{H}^{-1}(\Omega))\}$, где $Q_T = \Omega\times(0,T)$, область Ω ограничена и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^*$, и напомним, что $\mathbf{V}(Q_T)\subset C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$, см., например, [11]. Для начально-краевой задачи для системы уравнений (18)–(20) в Q с условиями $\tilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$, $\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ введем слабое решение $\tilde{\mathbf{z}}\in\mathbf{V}(Q_T)$ для всех $T > 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T\langle\partial_t\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}(\cdot,t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}dt + u_*\mathcal{B}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = 0 \quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{L}^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega))$$

для всех $T > 0$. Формально это тождество получается из (21) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\cdot,t)$ интегрированием по $(0,T)$. Здесь в билинейных формах $\mathcal{B}_{Q_T}$ и $\mathcal{A}_{Q_T}$ скалярные произведения берутся по Q_T, а не Ω как выше.

Т е о р е м а 2. 1. *Слабое решение $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ с любым $T > 0$ начально-краевой задачи для системы уравнений* (18)–(20) *существует и единственно и для него верно энергетическое равенство*

$$\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,T)\|_\Omega^2 + u_*^2\mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_\Omega^2 \quad \forall T > 0.$$

2. *Существует производная $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}\|_\Omega^2) \in L^1(0,\infty)$, верны свойство $\mathbf{L}^2(\Omega)$-диссипативности $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|_\Omega^2) \le 0$ п.в. на $(0,\infty)$ (и поэтому $\max_{t\ge0}\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|_\Omega = \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_\Omega$) и оценка*

$$2u_*^2\max\{\delta_1\tau_0\langle\|\nabla\tilde{\rho}_\alpha\|^2_{L^2(Q)}\rangle, \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{L^2(Q)} + \bar{\kappa}_0\|\nabla\theta\|^2_{L^2(Q)}\} \le \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_\Omega.$$

Пункт 1 вытекает из свойств (22), леммы 2 и [11], а п. 2 следует из п. 1 и леммы 2.

Для анализа параболичности системы (1)–(3) в уравнениях редуцированной системы (15)–(17) отбросим конвективные слагаемые слева и остаточные члены $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$ справа. В полученной однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i\partial_j$, следует "заморозить" зависящие от решения $\mathbf{z}$ коэффициенты перед $\partial_i\partial_j$ в некоторой (любой) точке $\mathbf{z}_0 = (\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$, уже бравшейся как фоновое решение. Применив к результату интегральное преобразование Фурье $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x\to\zeta}$ по x, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2A(\mathbf{z}_0,\xi)\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = 0, \quad t > 0, \quad (23)$$

с параметром $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вещественной матрицей $A(\mathbf{z}_0,\xi)$ порядка $K+n+1$ с вектором-столбцом $\xi = \frac{\zeta}{|\zeta|}$. Пусть $\lambda[A(\mathbf{z}_0,\xi)]$ — собственные значения введенной матрицы.

Выполним замену $\mathbf{z} = D_*\tilde{\mathbf{z}}$ с введенной выше матрицей $D_* = D_*(\mathbf{z}_0)$. Тогда $\mathcal{F}\mathbf{z} = D_*\mathcal{F}\tilde{\mathbf{z}}$ и после умножения системы (23) слева на D_*^{-1} получим эквивалентную систему

$$\partial_t\mathcal{F}\tilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)\mathcal{F}\tilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) = 0, \quad t > 0,$$

с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi) = D_*^{-1}A(\mathbf{z}_0,\xi)D_*$, подобной матрице $A(\mathbf{z}_0,\xi)$. Нетрудно видеть, что матрица $-\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)$ непосредственно возникает и в результате применения $\mathcal{F}$ к правым частям уравнений (18)–(20). Поэтому $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi) = [\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)]^T$ и $\lambda[\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)] = \lambda[A(\mathbf{z}_0,\xi)] \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}\{a_1,\ldots,a_K\}$, I_k – единичная матрица порядка k, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_0 := (\hat{\rho}_{10},\ldots,\hat{\rho}_{K0})^T$, $s = s(\xi) := \hat{\mathbf{u}}_0\cdot\xi$. Явный (3×3)-блочный вид матрицы $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)$ таков:

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi) = \begin{pmatrix} \tau_0(\hat{\theta}_0\Lambda + s^2I_K) & 2\tau_0 s\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\otimes\xi & \tau_0\Lambda\hat{\boldsymbol{\rho}}_0 \\ 2\tau_0 s\xi\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}_0 & (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2)I_n + [\bar{\chi}_0 + \tau_0\hat{\theta}_0(a\gamma)_0]\xi\xi^T & 2\tau_0 a_0 s\xi \\ \tau_0\hat{\boldsymbol{\rho}}_0^T\Lambda & 2\tau_0 a_0 s\xi^T & \bar{\kappa}_0 + \tau_0[s^2 + (a^2)_0] \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)$ имеет вид

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0q^2 + \tau_0\{\hat{\theta}_0\langle a_\alpha r_\alpha^2\rangle + s^2|\mathbf{r}|^2 + 4s(\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})\xi\cdot\mathbf{v} + 2\langle a_\alpha\hat{\rho}_{\alpha0}r_\alpha\rangle q + s^2|\mathbf{v}|^2 + \hat{\theta}_0(a\gamma)_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2 + 4a_0s(\xi\cdot\mathbf{v})q + [s^2 + (a^2)_0]q^2\}$$

для любого блочного вектора $\mathbf{b} := (\mathbf{r}^T,\mathbf{v},q)^T$ с $\mathbf{r}^T = (r_1,\ldots,r_K) \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Эта квадратичная форма положительно определена. Пусть $\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{\delta_1\tau_0,\bar{\mu}_0,\bar{\kappa}_0\} > 0$.

Л е м м а 3. *Для любого блочного вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{K+n+1}$ верны формула и неравенства*

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0q^2 + \tau_0\{|s\mathbf{r} + (\xi\cdot\mathbf{v})\hat{\boldsymbol{\rho}}_0|^2 + \langle|(\hat{\theta}_0a_\alpha)^{1/2}r_\alpha\xi + \sqrt{c_{\alpha0}}s\mathbf{v} + \sqrt{c_{\alpha0}}a_\alpha q\xi|^2\rangle + [a_0(\xi\cdot\mathbf{v}) + sq]^2 + g_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2\} \ge$$
$$\ge \max\{\delta_1\tau_0|\mathbf{r}|^2, \bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0q^2\} \ge \delta_2|\mathbf{b}|^2.$$

Можно показать, что лемма 2 для $\Omega = \mathbb{R}^n$ и лемма 3 эквивалентны.

Сформулируем теорему о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для

КГД системы уравнений (1)–(3), рассматриваемой в слое $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$, при начальных условиях $\boldsymbol{\rho}|_{t=0} = \boldsymbol{\rho}^{(0)}(x)$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^{(0)}(x)$, $\theta|_{t=0} = \theta^{(0)}(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{D} := (\underline{\rho}_1, \overline{\rho}_1) \times \ldots \times (\underline{\rho}_K, \overline{\rho}_K) \times (-\overline{u}_1, \overline{u}_1) \times \ldots \times (-\overline{u}_n, \overline{u}_n) \times (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ лежит в $(0,\infty)^K \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. При $\tau, \mu, \lambda, \kappa \in C(\overline{\mathcal{D}})$ по лемме 3 имеем $\inf\limits_{|\xi|=1} \lambda[A(\mathbf{z}_0, \xi)] \geq \min\limits_{\mathbf{z}_0 \in \overline{\mathcal{D}}} \delta_2 > 0$, и в итоге эквивалентная квазилинейная КГД система из уравнений (1), (12) и (13) удовлетворяет в $\mathcal{D}$ условию равномерной параболичности по Петровскому [12, 13].

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\tau, \mu, \lambda, \kappa \in C^2(\mathcal{D})$ *и* $0 < \beta < 1$ – *параметр. Пусть начальные данные* $\rho^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$, $\theta^{(0)} \in C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$, *причем их значения* $(\boldsymbol{\rho}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)})(x)$ *принадлежат какому-либо компакту в* $\mathcal{D}$, *а* $f, Q_\alpha \in C^{(1,\beta,0)}(\overline{\Pi}_T)$, $\alpha = 1, \ldots, K$.

Тогда при достаточно малом $T > 0$ *задача Коши для* КГД *системы уравнений* (1)–(3) *в слое* Π_T *имеет единственное классическое решение* $\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta \in C^{(2,\beta,\beta/2)}(\overline{\Pi}_T)$ *с* $\partial_t \boldsymbol{\rho}, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \theta \in C^{(0,\beta,0)}(\overline{\Pi}_T)$, *и его значения* $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x,t)$ *принадлежат* $\mathcal{D}$.

Здесь $C^{(m,\beta,\beta_t)}(\overline{\Pi}_T)$ с $m = 0,1,2$, $0 \leq \beta_t < 1$ – пространства функций, имеющих непрерывные и ограниченные в $\overline{\Pi}_T$ производные порядка $k = 0, \ldots, m$ по x, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка β по x и β_t по t (при $0 < \beta_t < 1$) равномерно в $\overline{\Pi}_T$, а $C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$ – стандартные пространства Гёльдера. Указанная теорема следует из общего результата о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных параболических по Петровскому систем, см. [13 теорема 6.3 и замечание 1 к ней в гл. 3, § 4].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19-11-00169.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. *Giovangigli V.* Multicomponent flow modeling. Boston, Birkhäuser, 1999.
4. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
7. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
8. *Злотник А.А.* // ДАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
9. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // ДАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
10. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В.* // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
12. *Петровский И.Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
13. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.

PROPERTIES OF AN AGGREGATED QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS FOR A HOMOGENEOUS GAS MIXTURE

A. A. Zlotnik[a,b] and A. S. Fedchenko[a]

[a] *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

For an aggregated quasi-gasdynamic system of equations for a homogeneous gas mixture, we give the entropy balance equation with a nonnegative entropy production in the presence of diffusion fluxes. We also derive the existence, uniqueness and L^2-dissipativity of weak solutions to an initial-boundary value problem for a system linearized at a constant solution as well as the Petrovskii parabolicity and local in time classical unique solvability of the Cauchy problem for the quasi-gasdynamic system itself.

Keywords: quasi-gasdynamic system of equations, homogeneous gas mixture, the entropy balance law, the Petrovskii parabolicity, L^2-dissipativity