ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 84–88

МАТЕМАТИКА

УДК 512.774.4

ФАКТОРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ СЕВЕРИ–БРАУЭРА

© 2021 г. А. С. Трепалин[1,2,*]

Представлено академиком РАН А.Н. Паршиным 01.08.2021 г.
Поступило 05.08.2021 г.
После доработки 26.10.2021 г.
Принято к публикации 27.10.2021 г.

Показано, что фактор нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики 0 по конечной группе автоморфизмов $\Bbbk$-рационален тогда и только тогда, когда $|G|$ делится на 3. Иначе фактор бирационально эквивалентен S.

Ключевые слова: поверхности Севери–Брауэра, проблемы рациональности, группа Брауэра, программа минимальных моделей

DOI: 10.31857/S2686954321060175

Пусть $\Bbbk$ – произвольное поле характеристики ноль, а $\overline{\Bbbk}$ – его алгебраическое замыкание. Многообразие X размерности d называется многообразием Севери–Брауэра, если $\overline{X} = X \otimes \overline{\Bbbk}$ изоморфно $\mathbb{P}^d_{\overline{\Bbbk}}$. Если $d = 1$, то X является коникой, а если $d = 2$, то X называется поверхностью Севери–Брауэра.

Многообразие Севери–Брауэра называется нетривиальным, если оно не изоморфно $\mathbb{P}^d_{\Bbbk}$. Хорошо известно, что многообразие Севери–Брауэра тривиально тогда и только тогда, когда на нем имеется $\Bbbk$-точка. Кроме того, если X нетривиальное d-мерное многообразие Севери–Брауэра и $d + 1$ – простое число, то степень каждой точки на X делится на $d + 1$ (см. [1, Theorem 53]).

Полная классификация конечных подгрупп автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери–Брауэра получена в работах К. Шрамова и В. Вологодского [2–5]. Пусть $\boldsymbol{\mu}_n$ – циклическая группа порядка n. Тогда верна следующая

Т е о р е м а 1 (ср. [Theorem 1.3(ii)]). *Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ характеристики ноль. Тогда любая конечная группа автоморфизмов изоморфна $\boldsymbol{\mu}_n$, $\boldsymbol{\mu}_{3n}$, $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$ или $\boldsymbol{\mu}_3 \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3)$, где n – натуральное число, делящееся только на простые числа, равные* 1 *по модулю* 3 *(включая случай $n = 1$), а $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$ – полупрямое произведение, соответствующее внешнему автоморфизму $\boldsymbol{\mu}_n$ порядка* 3, *нетривиально действующего на любом нетривиальном элементе $\boldsymbol{\mu}_n$.*

Более того, для любой группы G, упомянутой выше, существует поле $\Bbbk$ характеристики ноль и нетривиальная поверхность Севери–Брауэра S над этим полем такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(S)$.

Целью данной статьи является получение бирациональной классификации факторов нетривиальных поверхностей Севери–Браэра по конечным группам автоморфизмов. В частности, мы хотим дать ответ на вопрос, для каких поверхностей Севери–Брауэра S и групп $G \subset \mathrm{Aut}(S)$ фактор S/G является $\Bbbk$-рациональным (т.е. бирационально эквивалентным $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}$). Стоит отметить, что для алгебраически замкнутого поля $\overline{\Bbbk}$ характеристики ноль факторы $\overline{\Bbbk}$-рациональных поверхностей по конечной группе автоморфизмов всегда $\overline{\Bbbk}$-рациональны по критерию рациональности Кастельнуово (см. [6]). Кроме того, для произвольного поля $\Bbbk$ характеристики ноль факторы $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}$ по конечным группам автоморфизмов также всегда $\Bbbk$-рациональны (см. [7, Theorem 1.3]). Некоторые другие результаты о рациональности факторов $\Bbbk$-рациональных поверхностей по конечным группам автоморфизмов можно найти в статье [8]. Основной результат этой статьи – следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ характеристики ноль, а G – конечная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(S)$.

[1] *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Лаборатория алгебраической геометрии, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: trepalin@mccme.ru*

Тогда фактор S/G является $\mathbb{k}$-рациональным тогда и только тогда, когда $|G|$ делится на 3. Иначе фактор S/G бирационально эквивалентен S.

Эта теорема является обобщением следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть C — коника над полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль, на которой нет $\mathbb{k}$-точек, а G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(C)$. Тогда фактор C/G изоморфен $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ тогда и только тогда, когда порядок G четен.*

Доказательство. Степень любой точки на C четна. Предположим, что порядок G нечетный. Тогда любая G-орбита на множестве геометрических точек C состоит из нечетного количества точек. Значит, образ такой орбиты на C/G не определен над $\mathbb{k}$, а на факторе C/G нет $\mathbb{k}$-точек. Следовательно, этот фактор не изоморфен $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$.

Теперь предположим, что порядок G четный. В этом случае найдется элемент $g \in G$ порядка 2. Антиканоническое отображение, заданное линейной системой $|-K_C|$, определяет вложение $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$ такое, что действие g на C продолжается до действия g на $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$. Можно выбрать координаты $(x : y : z)$ в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$ такие, что действие g будет следующим: $(x : y : z) \mapsto (x : y : -z)$. Тогда отображение факторизации $C \to C/\langle g \rangle$ является ограничением проекции $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$, заданной формулой $(x : y : z) \mapsto (x : y)$, на $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$.

Следовательно, некоторые $\langle g \rangle$-орбиты определены над $\mathbb{k}$, а значит, некоторые G-орбиты также определены над $\mathbb{k}$. Таким образом, на факторе C/G есть $\mathbb{k}$-точки, а значит, этот фактор изоморфен $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$, поскольку $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}/G \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ для любой конечной группы $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})$.

Доказательство теоремы 2 устроено более сложно, поэтому мы разобьем его на несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть S — нетривиальная поверхность Севери—Брауэра над полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль, а G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(S)$, изоморфная $\boldsymbol{\mu}_n$. Тогда множество G-неподвижных точек на S состоит из трех изолированных геометрических точек. Если $n > 3$, то эти точки определены над расширением полей $K/\mathbb{k}$ степени 3.*

Доказательство. Рассмотрим действие G на $\overline{S} \cong \mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{k}}}$. Это действие диагонализуется в $\mathrm{PGL}_3(\overline{\mathbb{k}})$. Заметим, что множество неподвижных точек G либо состоит из изолированной неподвижной точки и прямой, либо состоит из трех изолированных точек p_1, p_2 и p_3. В первом случае изолированная неподвижная точка уникальна, а значит, определена над $\mathbb{k}$, но на S нет $\mathbb{k}$-точек. Следовательно, G имеет три изолированные неподвижные точки на S.

Изолированные неподвижные точки группы G транзитивно переставляются группой Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$. Поэтому эти точки определены либо над расширением полей $K/\mathbb{k}$ степени 3 с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \boldsymbol{\mu}_3$, либо над расширением полей $K/\mathbb{k}$ степени 6 с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mathfrak{S}_3$, где $\mathfrak{S}_3$ — неабелева группа порядка 6. В частности, найдется элемент $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ порядка 3 такой, что $\gamma p_1 = p_2$, $\gamma p_2 = p_3$, $\gamma p_3 = p_1$.

Если $n > 3$, то найдется подгруппа $\boldsymbol{\mu}_p \subset G$, где p — простое число, равное 1 по модулю 3. Действие образующей $\boldsymbol{\mu}_p$ на $\overline{S} \cong \mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{k}}}$ можно записать, как $\mathrm{diag}(\xi_p; \xi_p^a; 1)$, где ξ_p — корень из единицы p-ой степени. Образующая действует на касательных пространствах $T_{p_1}\overline{S}$, $T_{p_2}\overline{S}$ и $T_{p_3}\overline{S}$ как $\mathrm{diag}(\xi_p; \xi_p^a)$, $\mathrm{diag}(\xi_p^{a-1}; \xi_p^{-1})$ и $\mathrm{diag}(\xi_p^{-a}; \xi_p^{1-a})$ соответственно.

Поскольку $\gamma p_1 = p_2$, получаем $\gamma(\xi_p) = \xi_p^{a-1}$, а значит,

$$\xi_p^{-1} = \gamma(\xi_p^a) = \gamma(\xi_p)^a = \xi_p^{a(a-1)}.$$

Следовательно, $a^2 - a + 1 = 0$ по модулю p. В частности, $a \neq 1$ и $a \neq -1$ по модулю p.

Предположим, что группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ содержит элемент δ такой, что $\delta p_1 = p_1$, $\delta p_2 = p_3$ и $\delta p_3 = p_2$. Тогда $\delta(\xi_p) = \xi_p^a$ и $\delta(\xi_p^a) = \xi_p$. Значит, $a^2 = 1$ по модулю p. Но $a \neq \pm 1$ по модулю p. Получаем противоречие. Следовательно, если $n > 3$, то три точки p_1, p_2 и p_3 определены над расширением полей $K/\mathbb{k}$ степени 3.

Лемма 2. *Пусть S — нетривиальная поверхность Севери—Брауэра над полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль, а G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(S)$, изоморфная $\boldsymbol{\mu}_n$, где n — натуральное число, делящееся только на простые числа, равные 1 по модулю 3. Тогда фактор S/G бирационально эквивалентен S.*

Доказательство. Степень любой точки на нетривиальной поверхности Севери—Брауэра делится на 3. Значит, на S/G нет $\mathbb{k}$-точек, поскольку количество геометрических точек в G-орбитах не делится на 3.

Для $n = 1$ утверждение леммы тривиально. Поэтому предположим, что $n > 1$.

По лемме 4 множество G-неподвижных точек на S состоит из трех изолированных геометрических точек, определенных над расширением полей $K/\Bbbk$ степени 3. Любая циклическая группа, действующая на $\overline{S} \cong \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$, является подгруппой тора, действующего на $\overline{S}$. Значит, фактор S/G – это $\Bbbk$-форма торической поверхности с тремя особыми точками, являющимися образами G-неподвижных точек на S. Группа Галуа $\boldsymbol{\mu}_3 \cong \mathrm{Gal}(K/\Bbbk)$ действует на веере соответствующей торической поверхности. Разрешим особенности S/G и воспользуемся $\boldsymbol{\mu}_3$-эквивариантной программой минимальных моделей. В результате мы получим $\boldsymbol{\mu}_3$-минимальную поверхность дель Пеццо или расслоение на коники S' такую, что $\overline{S}'$ – торическая поверхность. Для любой торической поверхности дель Пеццо или расслоения на коники X выполняется неравенство $K_X^2 \geq 6$. Несложно заметить, что для таких поверхностей группа $\boldsymbol{\mu}_3$ может эффективно действовать только на веере поверхности дель Пеццо степени 9 или 6. Кроме того, поверхность дель Пеццо степени 6 не может быть $\boldsymbol{\mu}_3$-минимальной, поскольку на ней можно $\boldsymbol{\mu}_3$-эквивариантно стянуть тройку непересекающихся (-1)-кривых. Следовательно, S' – поверхность дель Пеццо степени 9 без $\Bbbk$-точек, т.е. нетривиальная поверхность Севери–Браэура.

Класс поверхности S' в группе Брауэра $\mathrm{Br}(\Bbbk)$ лежит в циклической подгруппе, порожденной классом поверхности S, поскольку между поверхностями Севери–Браэура S и S' есть рациональное отображение $S \dashrightarrow S'$ (см. [9, Упражнение 3.3.8(iii)]). Значит, S' либо изоморфна $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}$, что невозможно, поскольку на S' нет $\Bbbk$-точек, либо изоморфна S, либо изоморфна S^{op}, где S^{op} – поверхность Севери–Брауэра, соответствующая центральной простой алгебре, противоположной центральной простой алгебре, соответствующей S. Поверхность S^{op} бирационально эквивалентна S (см. [10]). Следовательно, S/G бирационально эквивалентен S.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что доказательство леммы 5 несложно обобщить на случай, когда $N \cong \boldsymbol{\mu}_n$ – нормальная подгруппа в конечной группе G, изоморфной $\boldsymbol{\mu}_{3n}$, $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$ или $\boldsymbol{\mu}_3 \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3)$. В этом случае фактор S/N будет G/N-бирационально эквивалентным поверхности Севери–Брауэра S', поскольку действие G/N на веере, соответствующем S/N, либо тривиально, либо совпадает с действием $\boldsymbol{\mu}_3 \cong \mathrm{Gal}(K/\Bbbk)$.

Теперь предположим, что группа $\boldsymbol{\mu}_3$ действует на нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S. Тогда по лемме 4 группа $\boldsymbol{\mu}_3$ имеет три изолированные неподвижные геометрические точки, определенные над расширением полей $K/\Bbbk$ степени 3 с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \boldsymbol{\mu}_3$ или над расширением полей $K/\Bbbk$ степени 6 с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \mathfrak{S}_3$. Мы рассмотрим эти случаи отдельно и покажем, что в каждом из них фактор $S/\boldsymbol{\mu}_3$ является $\Bbbk$-рациональным.

Л е м м а 3. *Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра, а G – конечная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(S)$, *изоморфная* $\boldsymbol{\mu}_3$. *Предположим, что изолированные неподвижные точки группы G определены над расширением полей $K/\Bbbk$ степени 3 с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \boldsymbol{\mu}_3$. Тогда S/G является $\Bbbk$-рациональным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p_1, p_2 и p_3 – изолированные неподвижные геометрические точки группы G на S. Раздуем G-эквивариантно эту тройку точек и получим поверхность дель Пеццо $\widetilde{S}$ степени 6. Заметим, что каждая из шести (-1)-кривых G-инвариантна, поэтому шесть точек пересечения этих кривых неподвижны для G. Легко проверить, что на касательном пространстве к $\overline{\widetilde{S}}$ в каждой из этих точек группа G действует как $\langle \mathrm{diag}(\omega; \omega) \rangle$, где ω – корень третьей степени из единицы.

Группа $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \boldsymbol{\mu}_3$ не сохраняет ни одну G-неподвижную точку на $\widetilde{S}$. Поэтому можно раздуть любую тройку G-неподвижных точек, определенную над $\Bbbk$, и получить поверхность $\widetilde{X}$. Для получившейся поверхности $K_{\widetilde{X}}^2 = 3$, исключительный дивизор раздутия $\widetilde{X} \to \widetilde{S}$ – это тройка поточечно G-неподвижных (-1)-кривых E_1, E_2 и E_3, а собственные прообразы шести (-1)-кривых на $\widetilde{S}$ являются (-2)-кривыми на $\widetilde{X}$. Можно проверить, что $\widetilde{X}$ – слабая поверхность дель Пеццо, а антиканоническое отображение

$$\varphi_{|-K_{\widetilde{X}}|} : \widetilde{X} \to X$$

стягивает шесть (-2)-кривых в три особенности типа A_2. Кроме того, X – особая кубическая поверхность, а образы E_1, E_2 и E_3 – это прямые, проходящие через пары особых точек.

Линейные системы $|-K_{\widetilde{S}}|$, $|-K_{\widetilde{X}}|$ и $|-K_X|$ являются G-инвариантными, поскольку морфизмы $\widetilde{S} \to S$, $\widetilde{X} \to \widetilde{S}$ и $\widetilde{X} \to X$ являются G-эквивариантными. Значит, действие G на X индуцирует действие G на $\mathbb{P}^3_{\Bbbk}$. Кроме того, G поточечно фиксирует плоскость в $\mathbb{P}^3_{\Bbbk}$, поскольку она фиксирует три пересекающиеся прямые. Следовательно, можно выбрать координаты $(x : y : z : t)$ в $\mathbb{P}^3_{\Bbbk}$ такие, что действие G задается отображением $(x : y : z : t) \mapsto (x : y : z : \omega t)$. Тогда отображение факторизации $X \to X/G$ является ограничением проекции $\mathbb{P}^3_{\Bbbk} \to \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$, заданной формулой

$$(x : y : z : t) \mapsto (x : y : z)$$

(ср. с доказательством предложения 3). Значит, $X/G \cong \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$ и S/G является $\Bbbk$-рациональным, поскольку S/G и X/G бирационально эквивалентны.

Для оставшегося случая $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \mathfrak{S}_3$ нам понадобится следующая

Л е м м а 4. *Пусть S' — поверхность дель Пеццо степени 6 над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики ноль. Если на S' найдется точка степени 2 и точка степени 3, то S' является $\Bbbk$-рациональной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — расширение поля $\Bbbk$ степени 2 такое, что на $S' \otimes L$ есть L-точка. Тогда $S' \otimes L$ является L-рациональной, поэтому можно найти пару геометрических точек p_1 и p_2 на S', определенных над L и не лежащих на (-1)-кривых.

Рассмотрим раздутие $X \to S'$ точек p_1 и p_2. Можно проверить, что X — поверхность дель Пеццо (возможно, слабая) степени 4, на которой есть точка степени 3. Антиканоническое отображение, заданное $|-K_X|$, отображает X в $X' \subset \mathbb{P}^4_{\Bbbk}$, где X' — поверхность дель Пеццо (возможно, особая) степени 4. В доказательстве [11, Lemma 2.4] показано, что в этом случае на X' есть гладкая $\Bbbk$-точка. Для удобства читателя мы приведем другое доказательство этого факта.

Пусть q_1, q_2 и q_3 — три геометрические точки на X' такие, что эта тройка определена над $\Bbbk$. Такая тройка существует, поскольку на S' есть точка степени 3. Рассмотрим плоскость Π, определенную над $\Bbbk$ и проходящую через q_1, q_2 и q_3. Получаем $\Pi \cdot X' = 4$ и кратность пересечения одинакова в каждой из точек q_1, q_2 и q_3. Следовательно, если $\Pi \cap X'$ имеет размерность ноль, то найдется другая гладкая $\Bbbk$-точка q на $\Pi \cap X'$.

Если $\Pi \cap X'$ одномерно, то пересечение $C = X' \cap \Pi$ — коника, поскольку X' — пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^4_{\Bbbk}$. Если C гладкая, то на ней бесконечно много $\Bbbk$-точек, поскольку на ней есть точка степени 3. Если C — объединение двух прямых, то точки q_1, q_2 и q_3 должны лежать на одной из них. Тогда эта прямая определена над $\Bbbk$. Если C — двойная прямая, то эта прямая определена над $\Bbbk$. В любом случае на C бесконечно много $\Bbbk$-точек, поэтому на X' есть гладкая $\Bbbk$-точка.

Образ любой $\Bbbk$-точки на X' при отображении $X' \to S'$ — это $\Bbbk$-точка на S'. Значит, S' является $\Bbbk$-рациональной по [12, параграф 4].

Л е м м а 5. *Пусть S — нетривиальная поверхность Севери—Брауэра, а G — конечная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(S)$, *изоморфная* $\boldsymbol{\mu}_3$. *Предположим, что изолированные неподвижные точки группы G определены над расширением полей $K/\Bbbk$ степени 6 с группой Галуа* $\mathrm{Gal}(K/\Bbbk) \cong \mathfrak{S}_3$. *Тогда S/G является $\Bbbk$-рациональным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа G имеет три изолированные неподвижные точки на S, определенные над K. Значит, фактор S/G является $\Bbbk$-формой особой торической поверхности такой, что три особые точки не определены над $\Bbbk$, но определены над K. Группа Галуа $\mathfrak{S}_3 \cong \mathrm{Gal}(K/\Bbbk)$ действует на веере этой торической поверхности. Разрешим особенности S/G и воспользуемся $\mathfrak{S}_3$-эквивариантной программой минимальных моделей. В результате мы получим $\mathfrak{S}_3$-минимальную поверхность дель Пеццо или расслоение на коники S' такую, что $\overline{S'}$ — торическая поверхность. Для любой торической поверхности дель Пеццо или расслоения на коники X выполняется неравенство $K_X^2 \geq 6$. Несложно заметить, что для таких поверхностей группа $\mathfrak{S}_3$ может эффективно действовать только на веере поверхности дель Пеццо степени 9 или 6.

Покажем, что S' является $\Bbbk$-рациональной. Заметим, что в группе $\mathfrak{S}_3 \cong \mathrm{Gal}(K/\Bbbk)$ есть нормальная подгруппа $\boldsymbol{\mu}_3$, поэтому существует расширение $L = K^{\boldsymbol{\mu}_3}$ поля $\Bbbk$ степени 2 такое, что изолированные неподвижные точки группы G не определены над L, но определены над расширением K/L степени 3. Значит, $S' \otimes L \cong (S \otimes L)/G$ является L-рациональной по лемме 3. Следовательно, на S' есть точка степени 2. Если S' — поверхность дель Пеццо степени 9, то S' является $\Bbbk$-рациональной, поскольку прямая, проходящая через точку степени 2 определена над $\Bbbk$.

Если S' — поверхность дель Пеццо степени 6, то на ней есть точка степени 3, поскольку образ любой точки степени 3 на S при отображении факторизации либо $\Bbbk$-точка, либо точка степени 3. Значит, S' является $\Bbbk$-рациональной по лемме 4.

Теперь докажем теорему 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Конечная подгруппа G в $\mathrm{Aut}(S)$ изоморфна $\boldsymbol{\mu}_n$, $\boldsymbol{\mu}_{3n}$, $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$ или $\boldsymbol{\mu}_3 \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3)$ по теореме 1.

Если в G есть подгруппа $N \cong \boldsymbol{\mu}_n$, где n — натуральное число, делящееся только на простые числа, равные 1 по модулю 3, то N нормальна в G и фактор S/N будет G/N-бирационально эквивалентным нетривиальной поверхности Севери—Браэра S', на которой действует группа G/N, по лемме 2 и замечанию 1. В частности, если $G \cong \boldsymbol{\mu}_n$, то S/G бирационально эквивалентен S по лемме 2.

Три других случая сводятся к случаю, когда на нетривиальной поверхности Севери–Брауэра действует группа $\boldsymbol{\mu}_3$ или $\boldsymbol{\mu}_3^2$, поскольку S/N и $S'/(G/N)$ бирационально эквивалентны.

Фактор поверхности Севери–Брауэра по $\boldsymbol{\mu}_3$ будет $\mathbb{k}$-рациональным по леммам 3 и 4, а фактор $S/\boldsymbol{\mu}_3^2$ бирационально эквивалентен фактору торической поверхности $S/\boldsymbol{\mu}_3$ по циклической группе $\boldsymbol{\mu}_3$. Этот фактор $\mathbb{k}$-рационален по [7, Proposition 4.5].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Константина Шрамова и Сергея Горчинского за множество полезных обсуждений и ценных замечаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kollár J.* Severi–Brauer varieties; a geometric treatment, (2016). preprint, arXiv:1606.04368
2. *Shramov C., Vologodsky V.* Boundedness for finite subgroups of linear algebraic groups, (2020). preprint, arXiv:2009.14485
3. *Шрамов К.А.* Бирациональные автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 3. С. 169–184.
4. *Шрамов К.А.* Неабелевы группы, действующие на поверхностях Севери–Брауэра // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 6. С. 952–953.
5. *Shramov C.* Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces // Eur. J. Math. 2021. V. 7 . № 2. P. 591–612.
6. *Castelnuovo G.* Sulla razionalità delle involuzioni piane // Math. Ann. 1894. № 44. P. 125–155.
7. *Trepalin A.S.* Rationality of the quotient of $\mathbb{P}^2$ by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero // Cent. Eur. J. Math. 2014. V. 12. № 2. P. 229–239.
8. *Trepalin A.* Quotients of del Pezzo surfaces // Int. J. Math. 2019. V. 30. № 11. 1950068, 40 pp.
9. *Горчинский С.О., Шрамов К.А.* Неразветвленная группа Брауэра и ее приложения // МЦНМО, М., 2018. 200 с.
10. *Amitsur S.A.* Generic splitting fields of central simple algebras // Ann. Math. 1955. V. 62. № 2. P. 8–43.
11. *Shramov C.* Automorphisms of cubic surfaces without points // Int. J. Math. 2020. V. 21. № 11. 2050083. 15 p.
12. *Исковских В.А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4 (310). С. 3–72.

QUOTIENTS OF SEVERI–BRAUER SURFACES

A. S. Trepalin[a,b]

[a]*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b]*Laboratory of Algebraic Geometry, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS A.N. Parshin

We show that a quotient of a non-trivial Severi–Brauer surface S over arbitrary field $\mathbb{k}$ of characteristic 0 by a finite group $G \subset \mathrm{Aut}(S)$ is $\mathbb{k}$-rational, if and only if $|G|$ is divisible by 3. Otherwise, the quotient is birationally equivalent to S.

Keywords: Severi–Brauer surfaces, Rationality problems, Brauer group, Minimal model program