ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 89–94

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

 М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 13.10.2021 г.
Поступило 14.10.2021 г.
После доработки 14.10.2021 г.
Принято к публикации 22.11.2021 г.

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954321060163

Как известно [1–3], наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4–6].

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. ПРИМЕР СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим динамическую систему на плоскости с одной степенью свободы α следующего вида:

$$\alpha^{\bullet} = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \omega^{\bullet} = F(\alpha), \tag{1}$$

которая эквивалентна следующему уравнению:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - b\tilde{\delta}(\alpha)\alpha^{\bullet} + F(\alpha) = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha.$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

Пара гладких функций $(F(\alpha), \delta(\alpha))$ определяет силовое поле в системе: функция $F(\alpha)$ описывает консервативную составляющую поля, а функция $\delta(\alpha)$ – возможные рассеяние или подкачку энергии в системе. При $b = 0$ консервативная система (1) обладает гладким интегралом энергии, при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма $d\alpha \wedge d\omega$ площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии, или факт сохранения фазовой площади.

Иначе обстоит дело в случае $b \neq 0$. Поскольку у системы (1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы – трансцендентная (в смысле комплексного анализа) функция. Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Действительно, первый интеграл имеет вид

$$\Phi_1(\alpha, \omega) = \delta(\alpha)e^{\Psi(t)} = C_1 = \text{const},$$
$$\Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)},$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы равенств $\delta(\alpha) = 0$, $\omega = 0$ (см. также [8]).

Поскольку появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости. Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями.

Действительно, если μ_1 – один (для простоты действительный) из корней уравнения $\mu^2 - b\mu + \lambda = 0$, то искомая 2-форма имеет вид

$$\mathrm{T}_1(\alpha, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{\mu_1}\Psi(t)\right\} d\alpha \wedge d\omega,$$
$$\Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}.$$

2. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим двумерное риманово многообразие $M^2\{\alpha, \beta\}$ с аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^\bullet, \beta^\bullet; \alpha, \beta\}$ (ср. с [5]). Для этого изучим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = z_2 f_2(\alpha), \quad \beta^\bullet = z_1 f_1(\alpha), \tag{2}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [5, 7], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0,\\ \beta^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

т.е. выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha, \beta) \equiv 0.$$

В случае (2) соотношения на касательном расслоении TM^2 примут вид

$$\begin{gathered} z_1^\bullet = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,\\ z_2^\bullet = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta) z_1^2,\end{gathered} \tag{4}$$

и уравнения (3) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (2), (4) на многообразии $\mathrm{TM}2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$.

Для полного интегрирования системы (2), (4) необходимо знать, вообще говоря, три независимых тензорных инварианта [1]: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм. При этом, конечно, первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

В [7] рассмотрены примеры систем геодезических на двумерной сфере с различными метриками, а в [5] – примеры систем геодезических на двумерных поверхностях вращения и на плоскости Лобачевского.

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия*

$$\begin{gathered}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) + \\ + f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] \equiv 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0,$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{6}$$

то система (2), (4) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}, \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},$$

$$\Phi_0(\alpha) = f_1(\alpha) \exp\left\{ 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(b) db \right\}, \tag{8}$$

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) =$$

$$= \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(b) - C_2^2}} db = C_3 = \text{cosnt}.$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau}$ *и фазовой* $z_1^* = \ln|z_1|$) *фазовый поток системы* (2), (4) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^2, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

Система равенств (5) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (10)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск как интеграла (7), так и (8) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

3. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (2), (4), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси $z_1^{\bullet}$ и $z_2^{\bullet}$, соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\alpha^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha),$$

$$z_2^{\bullet} = F_2(\alpha) f_2(\alpha) -$$

$$- f_2(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 -$$

$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha,\beta) z_1^2, \tag{9}$$

$$z_1^{\bullet} = F_1(\beta) f_1(\alpha) -$$

$$- f_2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,$$

$$\beta^{\bullet} = z_1 f_1(\alpha),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta^{\bullet\bullet} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0,$$

на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^{\bullet}, \beta^{\bullet}; \alpha, \beta\}$.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия* (5), (6), *то система* (9) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида*:

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const},$$
$$V(\alpha,\beta) = V_2(\alpha) + V_1(\beta) = \tag{10}$$
$$= -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a)da - 2\int\limits_{\beta_0}^{\beta} F_1(b)db,$$

а также при $F_1(\beta) \equiv 0$ — *первым интегралом* (8) *и*

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) =$$

$$= \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{\Phi_0^2(b)[C_1 - V(b, \beta_0)] - C_2^2}} db =$$
$$= C_3 = \text{const}.$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau}$ *и фазовой* $z_1^* = \ln|z_1|$) *фазовый поток системы* (9) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^2, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

4. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (9), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (11) (в отличие от системы (9)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_1^{\bullet}$ и $z_2^{\bullet}$, соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
z_2^{\bullet} = F_2(\alpha) f_2(\alpha) -\\
- f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 -\\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha),\\
z_1^{\bullet} = F_1(\beta) f_1(\alpha) -\\
- f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),\\
\beta^{\bullet} = z_1 f_1(\alpha),
\end{gathered} \tag{11}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - \Big\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) +\\
+ b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Big\}\alpha^{\bullet} -\\
- F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) +\\
+ b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] +\\
+ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0,\\
\beta^{\bullet\bullet} - \Big\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Big\}\beta^{\bullet} -\\
- F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0,\\
\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha,
\end{gathered}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^{\bullet}, \beta^{\bullet}; \alpha, \beta\}$.

Будем интегрировать систему четвертого порядка (11) при выполнении свойств (5), (6), а также при $F_1(\beta) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\alpha^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha),$$

$$z_2^{\bullet} = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \tag{12}$$

$$z_1^{\bullet} = \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),$$

$$\beta^{\bullet} = z_1 f_1(\alpha), \tag{13}$$

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \tag{14}$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}
F_2(\alpha) = \lambda_2^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2},\\
F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1 f_2(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad s = 1, 2.
\end{gathered} \tag{15}$$

Условие (14) назовем “геометрическим”, а условия из группы (15) — “энергетическими”.

Условие (14) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (15) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции $\Delta(\alpha)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* (14) *и* (15). *Тогда система* (12), (13) *обладает тремя независимыми, вообще говоря*, *трансцендентными* [12, 13] *первыми интегралами*.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{gathered}
\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) =\\
= \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1) z_2\delta(\alpha) f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{z_1\delta(\alpha) f_2(\alpha)} =\\
= C_1 = \text{const}.
\end{gathered} \tag{16}$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) =\\
= C_3 = \text{const}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Выражение функций (16)–(18) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ дополнительный первый интеграл системы (12) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b+u_2)du_2}{U_2(C_1,u_2)},$$

$$u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{z_1}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b-\lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0,$$

$$U_2(C_1,u_2) = 2U_1(u_2) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\}/2,$$

$$C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (12), (13) *существуют первые интегралы вида* (16)–(18), *то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие три инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами:*

$$\rho_1(z_2,z_1;\alpha)dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_2,z_1;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda_1^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\times$$

$$\times\frac{u_2^2+u_1^2+(b-\lambda_1^1)u_2-\lambda_2^0}{u_1},$$

$$\rho_2(z_2,z_1;\alpha)dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(z_2,z_1;\alpha) = \Delta(\alpha)\exp\left\{(b+\lambda_1^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\int\frac{(b+u_2)du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\},$$

$$\rho_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

$$\rho_3(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \exp\left\{(b+\lambda_1^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\times$$

$$\times G_3\left(\Delta(\alpha),\beta,u_2,u_1\right),$$

но зависимые с первыми интегралами (16)–(18).

Для полной интегрируемости системы (12), (13) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [12, 13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского [14–16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars. Paris, 1912. 340 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 494. № 1. С. 105–111.
6. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. – М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
16. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth two-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form