ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 79–83

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

БЕСФАЗОВАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

 Член-корреспондент РАН **В. Г. Романов**[1,*]

Поступило 05.07.2021 г.
После доработки 16.07.2021 г.
Принято к публикации 05.09.2021 г.

Для системы уравнений электродинамики, соответствующей периодическим по времени колебаниям, изучаются две обратные задачи об определении анизотропной проводимости по бесфазовой информации о решениях некоторых прямых задач. Предполагается, что проводимость описывается диагональной матрицей $\sigma(x) = \mathrm{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$, причем $\sigma(x) = 0$ вне некоторой компактной области Ω. Рассматриваются плоские волны, падающие из бесконечности на неоднородность. Для определения искомых функций на границе области Ω задается информация о модуле некоторых компонент вектора электрической напряженности рассеянного или полного высокочастотных электромагнитных полей. Показано, что эта информация приводит исходные обратные задачи к задачам рентгеновской томографии.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, плоские волны, бесфазовая обратная задача, анизотропия, проводимость, рентгеновская томография

DOI: 10.31857/S2686954321060151

Рассмотрим систему уравнений Максвелла, которая соответствует немагнитной среде и периодическим по времени электромагнитным колебаниям с частотой ω:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma(x)\mathbf{E},\qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0. \tag{1}$$

В уравнениях (1) $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ – векторы электрической и магнитной напряженности поля, $\sigma(x) = \mathrm{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$ – неотрицательно определенная диагональная матрица, $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ – некоторые постоянные. Предположим, что вне области $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < R\}$, $R > 0$, матрица $\sigma(x) = 0$.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость распространения электромагнитных волн. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $|\nu| = 1$, и j – единичный вектор, ортогональный ν, т.е. $j \cdot \nu = 0$.

Равенства

$$\mathbf{E}^0(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) = \mathbf{j}e^{i\omega\psi(x,\nu)},$$
$$\mathbf{H}^0(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) = \frac{\nu \times \mathbf{j}}{\mu_0 c}e^{i\omega\psi(x,\nu)}, \quad \psi(x, \nu) = \frac{x \cdot \nu}{c} - t_0, \tag{2}$$

описывают плоскую электромагнитную волну распространяющуюся в направлении ν, вектор j определяет ее поляризацию. Параметр t_0 выберем так, чтобы функция $\psi(x, \nu)$ была равна нулю в точках плоскости $\Sigma(\nu) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \nu = -R\}$, касающейся границы области Ω в точке $y_0 = -R\nu$. Для этого положим $t_0 = -R/c$.

Определим рассеянное на неоднородности поле формулами

$$\mathbf{E}^{sc}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) = \mathbf{E}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) - \mathbf{E}^0(x, \omega, \nu, \mathbf{j}),$$
$$\mathbf{H}^{sc}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) = \mathbf{H}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) - \mathbf{H}^0(x, \omega, \nu, \mathbf{j}). \tag{3}$$

Функции $\mathbf{E}^{sc}(x, \omega, \nu, \mathbf{j})$ и $\mathbf{H}^{sc}(x, \omega, \nu, \mathbf{j})$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}^{sc} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}^{sc} + \sigma(x)(\mathbf{E}^{sc} + \mathbf{E}^0),$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E}^{sc} = i\omega\mu\mathbf{H}^{sc}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H}^{sc} = 0 \tag{4}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Ниже мы будем рассматривать функции $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$, отвечающие трем различным векторам j^k, $k = 1, 2, 3$, и соответствующим им ортогональным

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
**E-mail: romanov@math.nsc.ru*

векторам ν^k, зависящим от углового параметра φ, а именно,

$$\mathbf{j}^1 = (1,0,0), \quad \nu^1(\varphi) = (0,\cos\varphi,\sin\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi],$$
$$\mathbf{j}^2 = (0,1,0), \quad \nu^2(\varphi) = (\cos\varphi,0,\sin\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi],$$
$$\mathbf{j}^3 = (0,0,1), \quad \nu^3(\varphi) = (\cos\varphi,\sin\varphi,0), \quad \varphi \in [0,\pi].$$

Обозначим через $S = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| = R\}$ границу области Ω и через $S^+(\nu) = \{x \in S \mid x \cdot \nu > 0\}$ – ее теневую часть по отношению к потоку света, имеющего направление ν.

Сформулируем постановку задач об определении анизотропной проводимости $\sigma(x)$, которые мы будем рассматривать ниже.

Задача 1. Найти $\sigma(x)$ по заданным функциям $|E_k(x,t,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k)|$, $k = 1,2,3$, известным для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$, $\varphi \in [0,\pi]$, и $\omega \geq \omega_0$, где $\omega_0 > 0$ – произвольное фиксированное число. Другими словами, требуется найти $\sigma(x)$ по заданным функциям

$$\begin{gathered}\Phi_k(x,\omega,\varphi) = |E_k(x,\omega,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k)|, \quad k = 1,2,3, \\ x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \omega \geq \omega_0 \geq 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Задача 2. Найти $\sigma(x)$ по функциям

$$\begin{gathered}F_k(x,\omega,\varphi) = |E_k^{sc}(x,\omega,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k)|, \quad k = 1,2,3, \\ x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \omega \geq \omega_0 \geq 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Задачи 1 и 2 относятся к бесфазовым обратным задачам. В этих задачах в качестве информации задается только модуль комплекснозначных функций. Впервые постановка бесфазовой задачи для уравнения Шрёдингера была сформулирована в книге Шадана и Сабатье [1] более 40 лет назад. Исключительную важность решения этой проблемы также отметил в своей книге Р. Ньютон [2]. Возможность найти фазу по заданному модулю поля в этой задаче была установлена в работах [3–5]. Первые конструктивные результаты по исследованию безфазовой обратной задачи для уравнения Шрёдингера были получены в работах Р.Г. Новикова [6–8] и М.В. Клибанова, В.Г. Романова (см. обзорную работу [9] и обширную литературу в ней). Для уравнений электродинамики, отвечающих периодическим по времени электромагнитным колебаниям, бесфазовые обратные задачи об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю векторов электрической или магнитной напряженности поля, измеренному при высоких частотах, изучались в работах [10, 11]. В них установлено, что безфазовая задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости приводится к решению обратной кинематической задачи. Некоторые численные методы решения бесфазовых обратных задач для уравнений электродинамики представлены в работах [12, 13].

Задача 1 соответствует измерению модуля полного электромагнитного поля. Задание информации (5) позволяет свести исходную задачу к хорошо известной проблеме рентгеновской томографии. Задача 2 соответствует измерению модуля рассеянного на неоднородности среды поля. Оказывается, что задание (6) позволяет извлечь ту же информацию, что и в задаче 1, и свести задачу 2 к той же самой задаче томографии. Настоящая статья основана на работе автора [14], в которой рассмотрена обратная задача об определении анизотропной проводимости в динамической системе уравнений Максвелла.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon\tilde{\mathbf{E}}_t + \sigma(x)\tilde{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\mu\tilde{\mathbf{H}}_t, \\ \tilde{\mathbf{E}}|_{t<0} = \tilde{\mathbf{E}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j}), \quad \tilde{\mathbf{H}}|_{t<0} = \tilde{\mathbf{H}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j}),\end{gathered} \tag{7}$$

в которой $\tilde{\mathbf{E}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j})$ находятся по формулам

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{E}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \mathbf{j}\delta(t-\psi(x,\nu)), \\ \tilde{\mathbf{H}}^0(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \frac{\nu\times\mathbf{j}}{\mu_0 c}\delta(t-\psi(x,\nu)).\end{gathered} \tag{8}$$

Заметим, что плоскость $\Sigma(\nu) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x\cdot\nu = ct_0\right\}$ соответствует фронту плоской волны $\tilde{\mathbf{E}}^0$, $\tilde{\mathbf{H}}^0$ в момент времени $t = 0$, когда этот фронт касается области Ω. Основой исследования обратной задачи является изучение структуры решения задачи (7), (8). Для этой задачи справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица* $\sigma(x) \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$ *и равна нулю вне* Ω. *Тогда решение задачи* (7), (8) *представимо при* $t \geq 0$ *в виде*

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \alpha(x,\nu,\mathbf{j})\delta(t-\psi(x,\nu)) + \\ +\hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})\theta_0(t-|\psi(x,\nu)|), \\ \tilde{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \beta(x,\nu,\mathbf{j})\delta(t-\psi(x,\nu)) + \\ +\hat{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j})\theta_0(t-|\psi(x,\nu)|),\end{gathered} \tag{9}$$

в котором $\theta_0(t)$ – *функция Хевисайда*: $\theta_0(t) = 1$ *для* $t \geq 0$ *и* $\theta_0(t) = 0$ *для* $t < 0$, *функция* $\alpha(x,\nu,j)$ *является в* $\mathbb{R}^3$ *решением задачи*:

$$\begin{gathered}\frac{2}{c}(\nu\cdot\nabla)\alpha + \mu\sigma(x)\alpha - \mu\nu((\sigma(x)\alpha)\cdot\nu) = 0, \\ \alpha|_{\psi(x,\nu)\leq 0} = \mathbf{j},\end{gathered} \tag{10}$$

а функция $\beta(x,\nu,\mathbf{j})$ *вычисляется через нее по формуле*

$$\beta(x,\nu,\mathbf{j}) = -\frac{1}{\mu c}(\alpha(x,\nu,\mathbf{j})\times\nu). \tag{11}$$

Функции $\alpha(x,\nu,\mathbf{j})$ *и* $\beta(x,\nu,\mathbf{j})$ *принадлежат пространству* $C^{14}(\mathbb{R}^3)$, *а функции* $\hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ *и* $\hat{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ *явля-*

ются непрерывными функциями для всех $\{(x,t) \mid |\psi(x,t)| \le t, t \in [0,T]\}$, *вместе с частными производными по x и по t, при любом* $T > 0$.

Схема доказательства этой теоремы следующая. Представим функции $\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \sum_{k=-1}^{r} \alpha^k(x,\nu,\mathbf{j})\theta_k(t-\psi(x,\nu)) + \mathbf{E}^r(x,t,\nu,\mathbf{j}),$$
$$\tilde{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \sum_{k=-1}^{r} \beta^k(x,\nu,\mathbf{j})\theta_k(t-\psi(x,\nu)) + \mathbf{H}^r(x,t,\nu,\mathbf{j}), \tag{12}$$

в котором $\theta_{-1}(t) = \delta(t)$, $\theta_k(t) = \dfrac{t^k}{k!}\theta_0(t)$, $k = 1,2,...,r$, а целое положительное число r выберем ниже. Подставляя представления (12) в уравнение (7) и приравнивания в полученном равенстве нулю коэффициенты при $\delta'(t-\psi(v,\nu))$, $\delta(t-\psi(v,\nu))$ и $\theta_k(t-\psi(x,\nu))$, $k = 0,1,\ldots,r-1$, и используя начальные данные, получим для функций $\alpha^k(x,\nu,\mathbf{j})$ и $\beta^k(x,\nu,\mathbf{j})$ следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c}(\beta^k \times \nu) + \mathrm{rot}\beta^{k-1} = \varepsilon\alpha^k + \sigma(x)\alpha^{k-1}, \\
\alpha^k|_{\psi(x,\nu)\le 0} = \mathbf{j}\delta_{-1,k}, \\
\frac{1}{c}(\alpha^k \times \nu) + \mathrm{rot}\alpha^{k-1} = -\mu\beta^k, \\
\beta^k|_{\psi(x,\nu)\le 0} = \frac{\nu \times \mathbf{j}}{\mu_0 c}\delta_{-1,k}, \\
k = -1,0,1,\ldots,r,
\end{gathered} \tag{13}$$

в которых $\delta_{-1,k}$ – символ Кронекера: $\delta_{-1,k} = 1$, если $k = -1$, и $\delta_{-1,k} = 0$, если $k \ne -1$. В уравнениях (13) и в дальнейших формулах надо формально положить $\alpha^k = 0$ и $\beta^k = 0$ для целых отрицательных $k < -1$.

Для функций $\mathbf{E}^r(x,t,\nu,\mathbf{j})$ и $\mathbf{H}^r(x,t,\nu,\mathbf{j})$ возникает следующая задача Коши:

$$\begin{gathered}
\varepsilon\mathbf{E}_t^r + \sigma(x)\mathbf{E}^r - \mathrm{rot}\mathbf{H}^r = (\mathrm{rot}\,\beta^r\theta_r(t-\psi(x,\nu)), \\
\mathbf{E}^r|_{t<0} = 0, \\
\mu\mathbf{H}_t^r + \mathrm{rot}\mathbf{E}^r = -(\mathrm{rot}\,\alpha^r\theta_r(t-\psi(x,\nu)), \\
\mathbf{H}^r|_{t<0} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Для проведения вычислений, уравнения (13) удобно преобразовать, найдя из второго уравнения β^k и подставив его в первое. Тогда возникает рекуррентная система соотношений для α^k следующего вида:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}\alpha^k \times \nu + \mathrm{rot}\alpha^{k-1}\right) \times \nu + \mathrm{rot}\left(\frac{1}{c}\alpha^{k-1} \times \nu + \mathrm{rot}\alpha^{k-2}\right) +$$
$$+\mu\varepsilon\alpha^k + \mu\sigma(x)\alpha^{k-1} = 0, \quad k = -1,0,1,\ldots,r.$$

Так как $\dfrac{1}{c^2} = \mu\varepsilon$ и $\alpha^k + (\alpha^k \times \nu) \times \nu = (\alpha^k \cdot \nu)\nu$, это уравнение преобразуется к следующему

$$\begin{gathered}
\mu\varepsilon(\alpha^k \cdot \nu)\nu + \frac{1}{c}[\mathrm{rot}\alpha^{k-1} \times \nu + \mathrm{rot}(\alpha^{k-1} \times \nu)] + \\
+\mu\sigma(x)\alpha^{k-1} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\alpha^{k-2} = 0, \\
k = -1,0,1,\ldots,r.
\end{gathered}$$

Используя равенства

$$\begin{gathered}
\mathrm{rot}(\alpha^k \times \nu) = (\nu \cdot \nabla)\alpha^k - \nu\mathrm{div}\alpha^k, \\
\mathrm{rot}\alpha^k \times \nu = (\nu \cdot \nabla)\alpha^k - \nabla(\alpha^k \cdot \nu),
\end{gathered}$$

запишем это уравнение в виде

$$\begin{gathered}
\mu\varepsilon(\alpha^k \cdot \nu)\nu + \frac{1}{c}[2(\nu \cdot \nabla)\alpha^{k-1} - \nu\mathrm{div}\alpha^{k-1} - \nabla(\alpha^{k-1} \cdot \nu)] + \\
+\mu\sigma(x)\alpha^{k-1} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\alpha^{k-2} = 0, \\
k = -1,0,1,\ldots,r.
\end{gathered} \tag{15}$$

Из уравнения (15) вытекает рекуррентное соотношение для определения проекции вектора α^k на единичный вектор ν:

$$\begin{gathered}
(\alpha^k \cdot \nu) = \\
= -\frac{1}{\mu\varepsilon}\left(\frac{1}{c}[2(\nu \cdot \nabla)\alpha^{k-1} - \nu\mathrm{div}\alpha^{k-1} - \nabla(\alpha^{k-1} \cdot \nu)] + \right. \\
\left. +\mu\sigma(x)\alpha^{k-1} + \mathrm{rot}\mathrm{rot}\alpha^{k-2}\right) \cdot \nu. \\
k = -1,0,1,\ldots,r.
\end{gathered} \tag{16}$$

Вычитая из равенства (15) равенство (16), умноженное на $\mu\varepsilon\nu$, и заменяя в полученном равенстве $k-1$ на k, находим рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c}[2(\nu \cdot \nabla)(\alpha^k)^\perp - \nabla^\perp(\alpha^k \cdot \nu)] + \\
+\mu\sigma(x)\alpha^k - \mu((\sigma(x)\alpha^k) \cdot \nu)\nu + \\
+\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\alpha^{k-1} - (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\alpha^{k-1} \cdot \nu)\nu = 0, \\
k = -1,0,1,\ldots,r-1,
\end{gathered} \tag{17}$$

в котором $(\alpha^k)^\perp = \alpha^k - \nu(\alpha^k \cdot \nu)$, $\nabla^\perp = \nabla - \nu(\nu \cdot \nabla)$ и скалярное произведение $(\alpha^k \cdot \nu)$ вычисляется по формуле (16). Уравнение (17) является обыкновенным векторным линейным дифференциальным уравнением вдоль любого луча $x = x^0 + s\nu$, $s \ge 0$, выходящего из произвольной точки $x^0 \in \sum(\nu)$. Поэтому его решение с данными Коши на $\Sigma(\nu) = \{x \mid \psi(x,\nu) = 0\}$ существует и единственно при любом $x \in D_+(\nu) := \{x \mid \psi(x,\nu) \ge 0\}$. Система уравнений (16), (17) решается последовательно, начиная со значения $k = -1$. Заметим, что у вектора α^r при этом однозначно находится только его проекция на ν, т.е. $\alpha^r \cdot \nu$, а проекция $(\alpha^k)^\perp$ на плоскость, ортогональную вектору ν, может быть задана произвольно. Выберем ее равной нулю. Тогда $\alpha^r = \nu(\alpha^r \cdot \nu)$. После отыскания всех векторов α^k, векторы β^k вычисляются по формуле (13). В частности, полагая $\alpha^{-1} = \alpha$, $\beta^{-1} = \beta$, получаем, что $\alpha \cdot \nu = \beta \cdot \nu = 0$ и для вектора α из (17) следует уравнение (10), а для вектора β из (13) следует равенство (11).

Гладкость векторов α^k и β^k определяется гладкостью матрицы $\sigma(x)$. Так как $\sigma \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$, то $(\alpha^k, \beta^k) \in C^{12-2k}(D_+(\nu))$, $k = -1, 0, 1\ldots, r$. Кроме того, $\alpha^k = 0$ и $\beta^k = 0$, $k \ge 0$, на тех прямых, которые ортогональны $\sum(\nu)$ и не пересекают область Ω.

Рассмотрим теперь задачу (14). Правые части уравнений (14) являются финитными функциями в слое $D_T := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3, t \in [0,T]\}$. Их носитель локализован внутри характеристического клина $K := \{(x,t) \mid t \ge |\psi(x,\nu)|\}$. Поэтому $\mathbf{E}^r = \mathbf{H}^r = 0$ вне этого клина. Правые части уравнений (14) являются функциями класса $H^\ell(D_T)$, $\ell = \min(12 - 2r, r)$. Выберем $r = 4$. Тогда $\ell = 4$ и из энергетических неравенств следует, что решение задачи (14) также принадлежит $H^4(D_T)$. В силу теорем вложения, отсюда вытекает, что решение принадлежит классу $C^1(D_T)$. Полагая для $t \ge |\psi(x,\nu)|$

$$\hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{r} \alpha^k(x,\nu,\mathbf{j}) \frac{(t - \psi(x,\nu))^k}{k!} + \mathbf{E}^r(x,t,\nu,\mathbf{j}),$$

$$\hat{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{r} \beta^k(x,\nu,\mathbf{j}) \frac{(t - \psi(x,\nu))^k}{k!} + \mathbf{H}^r(x,t,\nu,\mathbf{j}),$$

приходим к представлению (9) с заявленными в теореме свойствами функций, входящих в это представление.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для функции* $\mathbf{E}(x,\omega,\nu,\mathbf{j})$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathbf{E}(x,\omega,\nu,\mathbf{j}) = \alpha(x,\nu,\mathbf{j}) e^{i\omega\psi(x,\nu)} + O(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty. \tag{18}$$

Действительно, из финитности $\sigma(x)$ и результатов Б.Р. Вайнберга [15] следует, что функции $\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j})$, а также их частные производные по x и по t экспоненциально убывают при $t \to \infty$. Тогда для функций

$$\mathbf{E}(x,\omega,\nu,\mathbf{j}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) dt,$$

$$\mathbf{H}(x,\omega,\nu,\mathbf{j}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{H}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) dt$$

выполнены соотношения (1). Используя представление (9), находим, что

$$\mathbf{E}(x,\omega,\nu,\mathbf{j}) = \alpha(x,\nu,\mathbf{j}) e^{i\omega\psi(x,\nu)} + \int_{|\psi(x,\nu)|}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,\mathbf{j}) dt =$$

$$= \alpha(x,\nu,\mathbf{j}) e^{i\omega\psi(x,\nu)} - \frac{e^{i\omega|\psi(x,\nu)|}}{i\omega} \hat{\mathbf{E}}(x, |\psi(x,\nu)| + 0, \nu, \mathbf{j}) -$$

$$- \frac{1}{i\omega} \int_{|\psi(x,\nu)|}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{E}}_t(x,t,\nu,\mathbf{j}) dt = \alpha(x,\nu,\mathbf{j}) e^{i\omega\psi(x,\nu)} + O(\omega^{-1}),$$
$$\omega \to \infty.$$

Для поставленных выше обратных задач имеет место следующая

Т е о р е м а 3. *Пусть матрица* $\sigma(x) \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$ *и равна нулю вне* Ω. *Тогда информация* (5) *или* (6) *однозначно определяет все элементы матрицы* $\sigma(x)$ *в области* Ω. *При этом определение компонент матрицы* $\sigma(x)$ *сводится к решению трех идентичных задач рентгеновской томографии.*

Используя данные обратной задачи 1 и формулу (18), находим, что

$$|\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)| = g_k(x,\varphi) =: \lim_{t \to \psi(x,\nu^k(\varphi))+0} \Phi_k(x,t,\varphi),$$
$$x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0,\pi], \quad k = 1,2,3.$$

Именно эти компоненты векторов $\alpha(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, вычисляются из равенств (10) в явном виде, а именно,

$$\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k) = \exp\left(-\frac{\mu c}{2} \int_0^{\infty} \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi)) ds \right),$$
$$k = 1,2,3.$$

Из этих формул следует, что известны интегралы

$$\int_0^{\infty} \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi)) ds = -\frac{2}{\mu c} \ln g_k(x,\varphi), \quad k = 1,2,3, \tag{19}$$

для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$ и $\varphi \in [0,\pi]$.

Таким образом, правая часть равенства (19) известна при каждом $k = 1,2,3$ вдоль любой прямой, пересекающей Ω и имеющей направление $\nu^k(\varphi)$. Варьируя φ, получаем, что в каждом сечении Ω плоскостью $x_k = \text{const}$ известны интегралы по всевозможным прямым, лежащим в этой плоскости. В результате мы приходим к задаче рентгеновской томографии для определения $\sigma_k(x)$, $k = 1,2,3$. Хорошо известно, что эта задача решается однозначно. Отсюда следуют теорема 3 о единственности решения обратной задачи 1 и алгоритм ее решения.

Из формул (2), (3), (18) следует, что для рассеянного на Ω поля верно асимптотическое равенство

$$\mathbf{E}^{\mathrm{sc}}(x,\omega,\nu,\mathbf{j}) = (\alpha(x,\nu,\mathbf{j}) - \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x,\nu)} + O(\omega^{-1}),$$
$$\omega \to \infty.$$

С учетом того, что значения $\alpha_k(x,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k) \in (0,1]$, данные обратной задачи 2 приводят к формуле

$$\alpha_k(x,\nu^k(\varphi),\mathbf{j}^k) = 1 - \lim_{t\to\psi(x,\nu^k(\varphi))+0} F_k(x,t,\varphi),$$

$$x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0,\pi], \quad k = 1,2,3.$$

Эта формула сводит задачу 2 к рассмотренной выше.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chadan K., Sabatier P.C.* Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.
2. *Newton R.G.* Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions. N.Y.: Springer, 1989.
3. *Klibanov M.V., Sacks P.E.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3813–3821.
4. *Klibanov M.V.* // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. P. 392–410.
5. *Klibanov M.V.* // Applied Mathematics Letters. 2014. V. 37. P. 82–85.
6. *Novikov R.G.* // J. Geometrical Analysis. 2015. https://doi.org/10.1007/5.12220-014-9553-7
7. *Novikov R.G.* // Bulletin des Sciences Mathématiques. 2015. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2015.04.005
8. *Novikov R.G.* // Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2015. V. 3. P. 64–70.
9. *Романов В.Г.* // ЖВММФ. 2020. Т. 60. № 6. С. 142–160.
10. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
11. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
12. *Klibanov M.V., Nguyen L.H., Pan K.* // Appl. Numer. Math. 2016. V. 110. P. 190–203.
13. *Карчевский А.Л., Дедок В.А.* // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 12. № 3. С. 50–59.
14. *Романов В.Г.* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления., 2021. Т. 496. № 1. С. 53–55.
15. *Вайнберг Б.Р.* // УМН. 1966. Т. 21. № 3. С. 115–194.

PHASELESS PROBLEM OF DETERMINATION OF THE ANISOTROPIC CONDUCTIVITY IN ELECTRODYNAMIC EQUATIONS

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov[a]

[a]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

For the system of electrodynamic equations corresponding periodic in time oscillations two inverse problems of determination of the anisotropic conductivity from a given phaseless information for solutions of some forward problems are considered. It is supposed that the conductivity is described by a diagonal matrix $\sigma(x) = \mathrm{diag}(\sigma_1(x),\sigma_2(x),\sigma_3(x))$ and $\sigma(x) = 0$ outside of a compact domain Ω. The plain waves falling down on the inhomogeneity from infinity are considered. For determination of unknown functions an information related to the module of some components of the vector of electric intensity of the full or scattering high frequency electromagnetic fields is given on the boundary of domain Ω. It is proved that this information reduces the inverse problems to problems of X-ray tomography.

Keywords: Maxwell equations, anisotropy, plane waves, phaseless inverse problem, anisotropic conductivity, X-ray tomography