

УДК 519.63

## ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ SABARET ДЛЯ РАСЧЕТА РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

© 2021 г. В. В. Остапенко<sup>1,2,\*</sup>, В. А. Колотилов<sup>2,3,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 17.02.2021 г.

Поступило 17.02.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принято к публикации 05.11.2021 г.

Предлагается метод квазиинвариантов при построении схемы SABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения, не допускающую запись в форме инвариантов. Применение этого метода вместе с дополнительной коррекцией потоков обеспечивает монотонизацию разностного решения при расчете разрывных решений с ударными волнами и контактными разрывами. В качестве примера рассмотрена система уравнений неизоэнтропической газовой динамики с уравнением состояния политропного газа. Тестовые расчеты начально-краевой задачи Blast Wave показали, что предлагаемая схема подавляет нефизические осцилляции, приводящие к неустойчивости разностного решения при расчете по схеме SABARET, в которой дополнительная коррекция потоков отсутствует.

*Ключевые слова:* метод квазиинвариантов, схема SABARET, уравнения газовой динамики, задача Blast Wave

**DOI:** 10.31857/S2686954321060126

1. Для численного решения гиперболических систем законов сохранения [1] широко применяется схема SABARET [2], монотонность которой изучалась в [3–6]. Одно из преимуществ этой схемы заключается в том, что она локализует ударные волны точнее [7], чем схемы формально более высокого порядка, например, схема WENO5 [8]. Стандартный алгоритм схемы SABARET [2], аппроксимирующей гиперболическую систему дифференциальных уравнений, предполагает, что эта система допускает запись в форме инвариантов [1]. Для построения схемы SABARET, аппроксимирующей систему уравнений неизоэнтропической газовой динамики [1], не допускающей записи в форме инвариантов, используются квазиинварианты [2], определяемые неоднозначно.

В настоящей работе предлагается общий метод квазиинвариантов при построении схемы SABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения, не допускающую запись в форме инвариантов. Применение этого метода вместе с дополнительной коррекцией потоков обеспечивает монотонизацию разностного решения при расчете разрывных решений с ударными волнами и контактными разрывами. В качестве примера рассмотрена система законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики с политропным уравнением состояния [1]. Тестовые расчеты классической задачи Blast Wave [9] показали, что предлагаемая схема эффективно подавляет нефизические осцилляции, приводящие к неустойчивости разностного решения при расчете по другим вариантам схемы SABARET, в которых дополнительная коррекция потоков отсутствует.

2. Рассмотрим строго гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  — искомая, а  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  — заданная вектор-функция, содержащая  $m$  компонент. Строгая гиперболическость системы ((1)) означает, что все собственные значения  $\lambda_i(\mathbf{u})$  матрицы Якоби  $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'_u(\mathbf{u})$  действительны и различны, в силу чего соответству-

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

\*E-mail: ostigil@mail.ru

\*\*E-mail: kolotilov1992@gmail.com

ющие им левые собственные вектора  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})$  образуют базис в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

Известно [1], что при  $m \geq 3$  дифференциальные формы  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  могут быть неинтегрируемы и система ((1)) в этом случае не допускает полного набора инвариантов. Если некоторая дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  интегрируема, то система (1) имеет инвариант  $w_i(\mathbf{u})$ , сохраняющийся вдоль характеристик  $i$ -го семейства. Если дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  неинтегрируема, то будем предполагать существование вектора  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_s^i)$ , где  $s < m$ , (состоящего из некоторых компонент вектора  $\mathbf{u}$ ) такого, что интегрируемой является дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}])d\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}_c$  – произвольный постоянный вектор, а  $\tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_{m-s}^i)$  – вектор, состоящий из тех компонент вектора  $\mathbf{u}$ , которые не вошли в вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$ . Функцию  $w_i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \mathbf{u})$ , получаемую в результате такого интегрирования, будем называть квазиинвариантом системы (1). Инварианты системы (1) будем рассматривать как частный случай ее квазиинвариантов. В результате формируется вектор квазиинвариантов  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(\mathbf{u})$ , относительно которого будем предполагать, что преобразование  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  является невырожденным.

3. Схему САВАРЕТ, аппроксимирующую систему (1), будем строить на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\}; x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (2)$$

в которой  $h$  – шаг сетки по пространству, а  $\tau_n$  – шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i,j} |\lambda_i(\mathbf{v}_{j+1/2}^n)|}, \quad z \in (0, 1). \quad (3)$$

В этой схеме используются потоковые  $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}(x_j, t_n)$  и консервативные  $\mathbf{v}_{j+1/2}^n = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_n)$  переменные, заданные в целых  $x_j$  и полуцелых  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  узлах разностной сетки.

Пусть  $\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1/2}^n$  – известное численное решение на  $n$ -м временном слое  $t_n$ . Разностное решение  $\mathbf{v}_j^{n+1}, \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}$  получается по схеме САВАРЕТ в четыре этапа. На первом этапе вычисляются величины

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) = \mathbf{v}_{j+1/2}^n - r_n(\mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n)), \quad (4)$$

где  $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$  и  $r_n = \tau_n/(2h)$ . На втором этапе находятся предварительные значения  $\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1}$ , которые используются на третьем этапе

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} - r_n(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}_{j+1}^{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1})). \quad (5)$$

На четвертом этапе определяются окончательные значения  $\mathbf{v}_j^{n+1}$ . Алгоритм схемы на втором и четвертом этапах приводится ниже.

4. На втором этапе вычисляются квазиинварианты системы (1) в целых узлах  $(n+1)$ -го временного слоя. Опишем процедуру этого вычисления для некоторого квазиинварианта  $w_i$  (для краткости индекс  $i$  будем опускать). Сначала для каждой пространственной ячейки  $[x_j, x_{j+1}]$  находятся значения

$$\begin{aligned} (w_r)_j^n &= w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_j^n), \\ (w_l)_{j+1}^n &= w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1}^n), \quad w_{j+1/2}^{n+1/2} = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{j+1/2}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{v}}[\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}]$ ; при этом в каждом целом узле  $j$  определены два значения квазиинварианта  $(w_r)_j^n$  и  $(w_l)_j^n$ , вычисляемые в ячейках, расположенных справа и слева от узла  $j$ . При помощи значений (6) определяются величины

$$\begin{aligned} (\bar{w}_r)_j^{n+1} &= 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_l)_{j+1}^n, \\ (\bar{w}_l)_{j+1}^{n+1} &= 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_r)_j^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Следуя [2], величины (7) при помощи функции

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u \leq m, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (8)$$

корректируются по формулам

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_r)_j^{n+1} &= F((\bar{w}_r)_j^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \\ (\tilde{w}_l)_{j+1}^{n+1} &= F((\bar{w}_l)_{j+1}^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \end{aligned} \quad (9)$$

в которых

$$\begin{aligned} m_{j+1/2}^n &= \min((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n), \\ M_{j+1/2}^n &= \max((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $w_{j+1/2}^n = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^n)$ .

Значение квазиинварианта  $\tilde{w}_j^{n+1}$  определяется в зависимости от знаков скоростей характеристик

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}) \quad (11)$$

в ячейках, примыкающих к узлу  $j$ . Если  $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0$  и  $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$ , то  $\tilde{w}_j^{n+1} = (\tilde{w}_l)_j^{n+1}$ ; если  $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$  и  $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0$ , то  $\tilde{w}_j^{n+1} = (\tilde{w}_r)_j^{n+1}$ . Отдельно следует рассмотреть

случаи, когда скорости характеристик (11) разных знаков. Если  $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$  и  $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$ , то

$$\tilde{w}_j^{n+1} = w(\mathbf{b}_j^{n+1/2}, \mathbf{v}_j^n), \quad \mathbf{b}_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{j-1/2}^{n+1/2} + \mathbf{b}_{j+1/2}^{n+1/2}); \quad (12)$$

если  $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0$  и  $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0$ , то выполняется экстраполяция

$$\tilde{w}_j^{n+1} = w_{j-1/2}^{n+1/2} + w_{j+1/2}^{n+1/2} - w_j^n. \quad (13)$$

В завершении второй этапа по найденным значениям вектора квазиинвариантов  $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$  вычисляется вектор  $\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1})$ , где  $\mathbf{W}^{-1}$  – преобразование, обратное к  $\mathbf{W}$ .

5. По аналогии с [6] на четвертом этапе проводится дополнительная коррекция квазиинвариантов  $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$ . При выполнении неравенств  $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$  и  $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$  эта коррекция проводится по формуле

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{2}(w_{j-1/2}^{n+1} + w_{j+1/2}^{n+1}), \quad (14)$$

а в остальных случаях – по формуле

$$w_j^{n+1} = F(\tilde{w}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad (15)$$

в которой

$$\begin{aligned} m_j^{n+1} &= \min(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}), \\ M_j^{n+1} &= \max(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $w_{j\pm 1/2}^{n+1} = w(\mathbf{b}_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, \mathbf{v}_{j\pm 1/2}^{n+1})$ . После вычисления вектора  $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$  определяются окончательные значения вектора  $\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1})$ .

Дополнительная коррекция потоков, аналогичная (14)–(16), является необходимым условием монотонности схемы CABARET при аппроксимации линейного гиперболического уравнения [3], квазилинейного закона сохранения [4, 5] и линейной гиперболической системы дифференциальных уравнений [6]. В различных вариантах схемы CABARET, рассматриваемых в [2], такая дополнительная коррекция потоков не применяется.

6. В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему уравнений неизоэнтропической газовой динамики [1], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad e = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad (17)$$

с политропным уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , где  $\rho$ ,  $u$ ,  $\varepsilon$  и  $p$  – плотность, скорость, внутренняя энергия и давление в газе, и  $\gamma$  – показатель адиа-

баты. Характеристики этой системы распространяются со скоростями

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

где  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  – скорость звука в газе.

Поскольку система (1), (17) имеет инвариант

$$w_2 = \ln \frac{p}{\rho^\gamma},$$

сохраняющийся вдоль характеристик второго семейства, то на поверхностях  $w_2 = \text{const}$  дифференциальные формы, соответствующие первому и третьему характеристическим уравнениям этой системы, интегрируемы [1]. Однако уравнения таких поверхностей можно получить только в результате решения системы (1), (17), в силу чего инварианты  $w_1$  и  $w_3$ , сохраняющиеся вдоль характеристик первого и третьего семейств этой системы, в общем случае выписать в явном виде не удается. Поэтому в настоящей работе мы применяем для схемы CABARET (4)–(16) изохорические квазиинварианты [2]:

$$w_1 = u - g, \quad w_3 = u + g, \quad g = 2\sqrt{p/(\gamma\rho c)}.$$

7. Рассмотрим для системы (1), (17) при  $x \in [0, X]$  и  $t \geq 0$ , где  $X = 1$ , начально-краевую задачу Blast Wave [9] со следующими начальными

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= 1, \quad u(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) &= \begin{cases} 1000, & 0 \leq x \leq 0.1, \\ 0.01, & 0.1 < x \leq 0.9, \\ 100, & 0.9 < x \leq 1, \end{cases} \quad x \in [0, X], \end{aligned} \quad (18)$$

и граничными

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (19)$$

условиями, в которых  $X = 1$ . Численные расчеты данной задаче по схеме CABARET проводились на разностной сетке (2), в которой  $j = 0, 1, \dots, N$ , где  $N = X/h$  – количество пространственных узлов сетки. Начальные условия (18) с учетом обозначений (17) аппроксимировались по формулам

$$\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{u}(x_j, 0), \quad \mathbf{v}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_j^0 + \mathbf{v}_{j+1}^0),$$

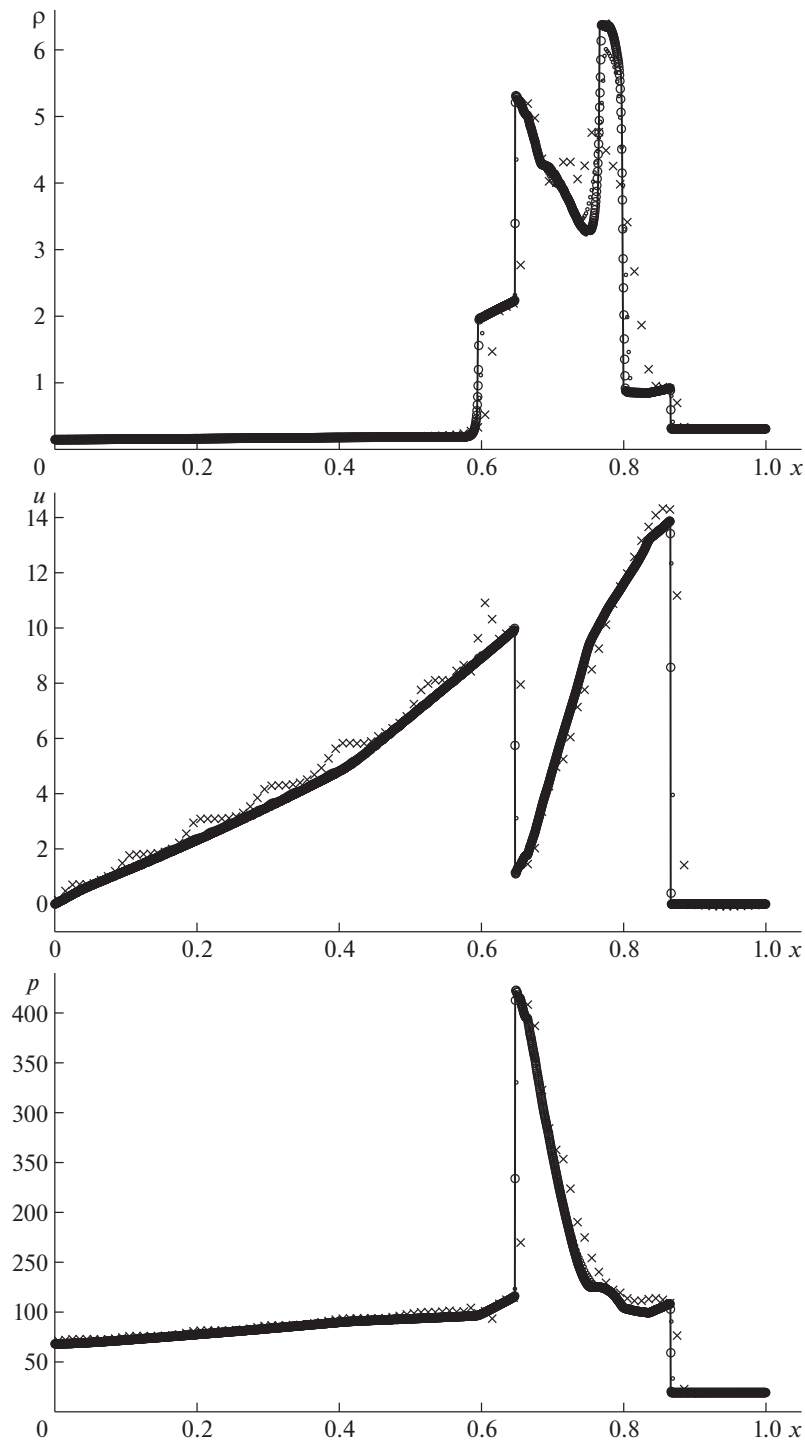
а граничные условия непротекания ((19)) по формулам

$$u_0^n = u_N^n = 0,$$

в которых  $u_j^n$  – сеточная функция скорости газа. Поскольку в точном решении задачи (1), (17)–(19) давление газа может принимать достаточно ма-

Таблица 1

$h$	0.01	0.004	0.002	0.001	0.0005	0.00025
$\Delta$	9.2133	3.9031	1.8730	1.0453	0.4773	0.1560



**Рис. 1.** Сравнение точного (сплошная линия) и численного решения задачи Blast Wave на последовательности из трех сгущающихся сеток с пространственными шагами  $h_1 = 0.01$  ( $\times$ ),  $h_2 = 0.002$  ( $\circ$ ) и  $h_3 = 0.004$  ( $\bullet$ ).

лые значения, то для обеспечения положительности давления в разностном решении на каждом временном слое проводится следующая дополнительная корректировка численного значения давления: если давление в некотором узле разностной сетки меньше  $\epsilon = 0.0001$ , то оно заменяется на значение  $\epsilon$ .

Тестовые расчеты задачи Blast Wave (17)–(19) показали, что в схеме САВАРЕТ [2], при построении которой применяются линейные квазиинварианты, а также в схеме САВАРЕТ (4)–(13) без дополнительной коррекции потоков (14)–(16), в начале численного расчета в окрестности левого контактного разрыва возникают нефизические

осцилляции давления, которые с течением времени неограниченно возрастают, приводя к неустойчивости разностного решения. В схеме CABARET (4)–(16) эти нефизические осцилляции эффективно подавляются, что позволяет с достаточно высокой точностью рассчитывать задачу Blast Wave. Для иллюстрации процесса сходимости разностного решения к точному на рис. 1 и в табл. 1 в момент времени  $t = 0.038$  приведены результаты расчета задачи (1), (17)–(19) по схеме CABARET (4)–(16) на последовательности сгущающихся сеток (2) с коэффициентом  $z = 0.4$  в условии устойчивости (3). Точное решение, показанное на рис. 1 сплошной линией, моделируется численным расчетом по схеме PPM [9] на достаточно мелкой разностной сетке (2), (3). В табл. 1 приведены ошибки разностного решения, вычисляемые по формуле

$$\Delta[\mathbf{v}_h] = h \sum_{j=1}^{N_h} |\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_2) - \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t_2)|,$$

где  $N_h = X/h$  – количество пространственных узлов разностной сетки. Из таблицы следует, что в сеточной норме  $L_1$  разностное решение сходится к точному решению приблизительно с первым порядком, что характерно для сильной сходимости в интегральных нормах разностных решений к точным решениям, содержащим ударные волны.

Предложенная модификация схемы CABARET обобщается на случай многомерных гиперболических систем законов сохранения, а также на случай уравнений газовой динамики с другими уравнениями состояния.

## APPLICATION OF THE CABARET SCHEME FOR THE CALCULATION OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF THE HYPERBOLIC SYSTEM OF CONSERVATION LAWS

V. V. Ostapenko<sup>a,b</sup> and V. A. Kolotilov<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>b</sup> Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>c</sup> Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A method is proposed for constructing a CABARET scheme that approximates a hyperbolic system of conservation laws that cannot be written in the form of invariants. This technique is based on the method of quasi-invariants and additional flux correction, which ensures monotonicization of the difference solution when calculating discontinuous solutions. As an example, a system of conservation laws for nonisentropic gas dynamics with a polytropic state equation is considered. Test calculations of the initial-boundary value problem Blast Wave showed that the proposed scheme suppresses nonphysical oscillations leading to the instability of the difference solution when calculating using other variants of the CABARET scheme, in which there is no additional flux correction.

**Keywords:** quasiinvariants method, CABARET scheme, equations of gas dynamics, Blast Wave problem

### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 21-51-53012.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карabasов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
3. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // ЖВМиМФ 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815.
4. *Зюзина Н.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // ДАН. 2016. Т. 466. № 5. С. 513–517.
5. *Остапенко В.В., Черевко А.А.* Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // ДАН. 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522.
6. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения // ЖВМиМФ 2018. Т. 58. № 9. С. 1488–1504.
7. *Gologush T.S., Cherevko A.A., Ostapenko V.V.* Comparison of the WENO and CABARET schemes at calculation of the scalar conservation law with a nonconvex flux // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2293. № 1. P. 370006.
8. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.
9. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. V. 54. P. 115–173.