ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 57–61

МАТЕМАТИКА

УДК 517.71

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАНИЕМ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

 Академик РАН В. В. Козлов[1,]*, О. Г. Смолянов[2,]**

Поступило 08.11.2021 г.
После доработки 08.11.2021 г.
Принято к публикации 18.11.2021 г.

Обсуждаются различные представления состояний квантовых систем и доказывается их эквивалентность. В частности, восходящий к Л.Д. Ландау подход, в котором оператор плотности рассматривается как редукция чистого состояния квантовой системы, описываемой тензорным произведением подходящих гильбертовых пространств. При этом исследуется изменение состояний подсистем квантовой системы в результате экспериментов.

Ключевые слова: чистое состояние, оператор плотности, тензорное произведение, редукция состояний, вектор Белла

DOI: 10.31857/S2686954321060114

Рассматривается применение вероятностных методов к описанию квантовой динамики. При этом результаты квантовых измерений могут влиять на параметры вероятностного пространства. Обсуждается связь между следующими описаниями квантовых состояний: 1) с помощью ненулевых векторов гильбертова пространства (содержащие их одномерные подпространства отождествляются с состояниями, называемыми чистыми); 2) с помощью вероятностных распределений на этом гильбертовом пространстве; 3) с помощью ядерных операторов (операторов плотности) в том же гильбертовом пространстве и, наконец, 4) с помощью векторов расширенного гильбертова пространства, представляющего собой тензорное произведение исходного и вспомогательного гильбертова пространства, размерность которого не меньше размерности исходного пространства; оператор плотности получается как редукция оператора проектирования на подходящее одномерное подпространство этого тензорного произведения (такие одномерные подпространства можно задавать с помощью векторов Белла). Необходимые определения приводятся ниже. Отметим, что последнее определение оператора плотности принадлежит Л.Д. Ландау, который считал его одним из десяти самых значительных своих достижений. Кроме того, обсуждается проводимое на произвольном расстоянии от исследуемой квантовой системы изменения ее состояний, задаваемых векторами Белла расширенных квантовых систем; такие изменения связаны с так называемым парадоксом Эйнштейна—Подольского—Розина.

Между прочим, статья Л.Д. Ландау появилась значительно раньше парадокса Эйнштейна—Подольского—Розина и векторов Белла (см. [1]).

1. МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОПЕРАТОРЫ ПЛОТНОСТИ

В аксиоматике квантовой механики, восходящей к Максу Борну, каждой квантовой системе сопоставляется комплексное сепарабельное гильбертово пространство (которое далее обозначается символом H); при этом каждое состояние квантовой системы, не являющееся вероятностной смесью отличных от него состояний (именно такие состояния называются чистыми), задается ненулевым вектором $h \in H$. Если каждый ненулевой вектор пространства H задает состояние квантовой системы, то говорят, что в ней нет правил суперотбора. Считается, что множество физических величин, которые можно экспериментально измерить (они называются наблюдаемыми), находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathscr{L}^s(H)$ самосопряженных операторов в H, которые по этой причине в физической

[1]*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kozlov@pran.ru*
***E-mail: smolyanov@yandex.ru*

литературе также называются наблюдаемыми. Предполагается, что если $A \in \mathcal{L}^s(H)$ и $h \in H$, $h \neq 0$, то среднее значение $\overline{A}$ результатов измерений наблюдаемой A, проводимых над одинаковыми копиями квантовой системы, состояние каждой из которых задается вектором h, определяется равенством $\overline{A} = \frac{1}{\|h\|^2}(Ah, h)$. Отсюда следует, что если ν – вероятностная мера на $H \backslash \{0\}$, то среднее значение $\overline{A}_\nu$ результатов измерений наблюдаемой A, проводимых над элементами ансамбля, состоящего из квантовых систем с гильбертовым пространством H, распределение состояний которых описывается мерой ν, определяется равенством $\overline{A}_\nu = \int\limits_{H\backslash\{0\}} \frac{(Ah, h)}{\|h\|^2}\nu(dh)$.

Отметим, что векторы h_1 и h_2 задают одно и то же состояние квантовой системы тогда и только тогда, когда они пропорциональны. Поэтому всегда можно предполагать, что $\|h\| = 1$; конечно, даже это предположение не позволяет определить вектор h однозначно, так как его можно умножить на комплексное число, модуль которого равен 1.

П р е д л о ж е н и е 1. *В гильбертовом пространстве H существует такой (единственный) неотрицательный ядерный оператор T_ν с единичным следом, для которого равенство*

$$\overline{A}_\nu = \int\limits_{H\backslash\{0\}} \frac{(Ah, h)}{\|h\|^2}\nu(dh) = \mathrm{tr}(AT_\nu)$$

справедливо, какова бы ни была наблюдаемая $A \in \mathcal{L}^s(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \mathcal{L}^s(H)$; тогда значения функции $\{h \mapsto |(h, Ah)| \, \| h \|^{-2}\}$ не превышают $\|A\|$ одновременно для всех $h \neq 0$, так что интеграл из формулировки предложения корректно определен. При этом можно проверить, что все предположения теоремы Глиссона (см. [2, 8]) выполнены. Поэтому в пространстве H существует неотрицательный ядерный оператор T_ν для которого равенство $\int_{H\backslash\{0\}} \frac{(Ah, h)}{\| h \|^2}\nu(dh) = tr(AT_\nu)$ справедливо. Предложение 1 доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *Каков бы ни был неотрицательно определенный ядерный оператор T в гильбертовом пространстве H, обладающий единичным следом, на пространстве H существует вероятностная (борелевская) мера ν_T такая, что для каждой наблюдаемой $A \in \mathcal{L}^s(H)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_H (h, Ah)\|h\|^{-2}\nu_T(dh) = \mathrm{tr}AT.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ – (счетно аддитивная) гаусовская мера на H с нулевым математическим ожиданием и корелляционным оператором T. Тогда мера ν_T, определяемая равенством $\nu_T = (h, h)\mu$ – это та мера, существование которой утверждается в предложении 2. Предложение 2 доказано.

З а м е ч а н и е 1. В то время как оператор T из предложения 1 определяется по мере ν_T единственным образом, мера ν_T не определяется однозначно по оператору T.

Предложения 1 и 2 делают естественным следующее определение квантового состояния.

О п р е д е л е н и е 1. С о с т о я н и е м к в а н т о в о й с и с т е м ы с (комплексным сепарабельным гильбертовым) пространством H называется неотрицательный ядерный оператор в H, обладающий единичным следом.

П р е д л о ж е н и е 3. *Для каждой ограниченной наблюдаемой A (т.е. для каждого ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H) среднее значение результатов измерений этой наблюдаемой, проводимых над находящимися в состоянии T идентичными копиями квантовой системы, определяется равенством*

$$\overline{A} = \mathrm{tr}AT \ (= \mathrm{tr}TA).$$

Это предложение вытекает из двух предыдущих.

З а м е ч а н и е 2. В [3, с. 29] сказано, что определение оператора плотности (в этой книге он назван статистическим оператором) было впервые введено в квантовую механику фон Нейманом; однако фон Нейман ввел только определение 1; другое определение оператора плотности, введенное Л.Д. Ландау, (см. [4]) ему не было известно. Отметим еще раз, что в определении Ландау фактически впервые встречаются функции, играющие роль векторов Белла; они используются также при описании парадокса Эйнштейна–Подольского–Розина (см. [1] и имеющиеся там ссылки).

2. ОПЕРАТОРЫ ПЛОТНОСТИ КАК РЕДУКЦИИ СОСТОЯНИЙ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Как известно (см. [6]), если квантовая система состоит из двух подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, то гильбертово пространство объединенной системы можно отождествить с гильбертовым тензорным произведением пространств H_1 и H_2 (определение гильбертова тензорного произведения можно найти в книге [6]) или с его подпространствами (типичные примеры: замыкание подпространства симметричных тензоров и замыкание подпространства антисимметричных тензоров).

Определение 2 (см. [6, с. 607, аксиома 5]. H_2-редукцией оператора плотности T, действующего в пространстве $H_1 \otimes H_2$, называется такой оператор плотности T_1 в пространстве H_1, что какова бы не была ограниченная наблюдаемая A в пространстве H_1, справедливо равенство $\mathrm{tr}_{H_1}(AT_1) = \mathrm{tr}_H(A \otimes I_2, T)$, где символ tr_{H_1} обозначает след оператора в пространстве H_1, а символ tr_H обозначает след оператора в пространстве H. Далее вместо термина H_2-редукция используется термин редукция.

Замечание 3. Квантовые системы с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, рассматриваемые как подсистемы их объединений, называются открытыми. Отметим еще, что термин редукция имеет два значения. Во-первых, то, о котором говорится в определении 2, и, во-вторых, редукцией квантового состояния называется его изменение после проведенного измерения.

Предложение 4. *Пусть T — оператор плотности в гильбертовом пространстве H, равном $H_1 \otimes H_2$ (т.е. T — это неотрицательный ядерный оператор в H со следом, равным* 1). *Тогда в H_1 существует такой оператор плотности T_1, что для каждой ограниченной наблюдаемой A в H_1 справедливо равенство* $\mathrm{tr}_{H_1}(AT_1) = \mathrm{tr}_H(A \otimes I_2, T)$.

Доказательство. Если $Ax = (x,a)b$, где $a, b \in H_1$, то равенство из предложения 4 проверяется непосредственно. Из выполнения этого равенства для таких A вытекает его выполнение для произвольных ограниченных наблюдаемых. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Каждый неотрицательный ядерный оператор со следом* 1 *в пространстве H_1 является редукцией чистого состояния пространства $H_1 \otimes H_2$, где H_2 — гильбертово пространство, размерность которого не меньше размерности гильбертова пространства H_1.*

Доказательство. Пусть T — неотрицательный ядерный оператор со следом 1 в пространстве H_1, $\{e_j\}$ — ортонормированный базис пространства H_1, состоящий из собственных векторов оператора T, λ_j — соответствующие собственные значения. Пусть H_2 — гильбертово пространство, обладающее ортонормированным базисом $\{h_k\}$, имеющим ту же мощность, что и базис $\{e_j\}$, и пусть вектор φ пространства $H_1 \otimes H_2$ определяется равенством $\varphi = \sum_k \lambda_k e_k \otimes h_k$ (сумма справа называется вектором Белла). Тогда можно непосредственно проверить, что оператор T является редукцией чистого состояния, заданного вектором φ. Предложение 5 доказано.

Из приведенных предложений вытекает следующая

Теорема 1. *Следующие определения состояний квантовой системы равносильны*:

(1) *Состоянием квантовой системы называется ядерный неотрицательно определенный оператор со следом* 1 *в H* (*называемый оператором плотности*);

(2) *Состоянием квантовой системы называется вероятностная мера на пространстве H*;

(3) *Состоянием квантовой системы с гильбертовым пространством H_1 называется редукция состояния T квантовой системы с гильбертовым пространством $H_1 \otimes H_2$, где размерность пространства H_2 не меньше размерности пространства H_1* (*при этом состояние T можно считать чистым*).

3. АКСИОМЫ КОЛМОГОРОВА И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В этом разделе обсуждается изменение состояний квантовых систем под влиянием экспериментов; при этом система, состояние которой меняется, может быть на любом расстоянии от системы, с которой производится эксперимент. Предполагается, что квантовая система с гильбертовым пространством H состоит из двух подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, так что $H = H_1 \otimes H_2$; расстояние в физическом пространстве между первой и второй квантовыми системами может быть сколь угодно большим, и тем не менее эксперимент, произведенный над одной из систем, мгновенно меняет состояние другой. Отметим, что изменение состояния каждой системы зависит от результата эксперимента над другой системой, который заранее экспериментатору не известен, именно поэтому противоречия со специальной теорией относительности не возникает.

В аксиомах Колмогорова речь идет о вероятностных мерах на измеримых пространствах. Элементы этих пространств называются элементарными событиями; в квантовой теории вместо термина элементарные события используется термин скрытые параметры. Измеримые пространства, вероятностные меры на них и элементарные события (скрытые параметры) в аксиомах Колмогорова считаются не зависящими от результатов проводимых экспериментов.

Сейчас будет описана ситауция, о которой только что шла речь: когда после эксперимента над одной из систем одновременно меняется состояние обеих систем. Таким образом, можно сказать, что результат эксперимента над одной из систем мгновенно воздействует на вторую систему; однако этот результат, как только что было сказано, заранее не известен экспериментатору, так что экспериментатор заранее не знает, какая именно информация будет передана второй системе; это становится известно экспериментатору только после проведения эксперимента.

Описанная ситуация возникает в следующем эксперименте, предложенном Д. Бомом.

Пусть $H_1 = \mathbb{C}^2$, $H_2 = \mathbb{C}^2$, так что $H_1 \otimes H_2 = \mathbb{C}^4$. Пусть $\{e_1, e_2\}$ и $\{d_1, d_2\}$ – ортонормированные базисы в H_1 и в H_2, $h = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2)$ (h называется вектором Белла). Состояние квантовой системы, задаваемое вектором $h \in H$, порождает смешанные состояния подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, задаваемые операторами плотности S_1 и S_2, определяемыми равенствами

$$S_1 x = \frac{(x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2}{2},$$
$$S_2 z = \frac{(z, d_1)d_1 + (z, d_2)d_2}{2}, \quad x \in H_1, \quad z \in H_2.$$

Пусть $A^1_{\alpha\beta}$ – оператор в H_1 проектирования на подпространство, порожденное вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $A^2_{\alpha\beta}$ – оператор в H_2 проектирования на подпространство, порожденное вектором $\alpha d_1 + \beta d_2$. Так как состояние квантовой системы с гильбертовым пространством H задается вектором h, то измерение наблюдаемой $A^1_{\alpha\beta}$ в подсистеме с гильбертовым пространством H_1 – это то же самое, что измерение наблюдаемой $A^1_{\alpha\beta} \otimes I_2$, где I_2 – тождественный оператор в H_2; аналогично измерение наблюдаемой $A^2_{\alpha\beta}$ – то же самое, что измерение наблюдаемой $I_1 \otimes A^2_{\alpha\beta}$, где I_1 – тождественный оператор в H_1.

Предположим, что при измерении наблюдаемой получилось число 1; тогда согласно постулату Людерса фон Неймана, состояние системы с гильбертовым пространством H сразу после измерения задается вектором, являющимся проекцией $\mathrm{pr}_E h$ вектора h на двумерное собственное подпространство E оператора, относящееся к собственному значению 1. Оно представляет собой тензорное произведение одномерного подпространства, порожденного вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, и пространства H_2. Это означает, что

$$\mathrm{pr}_E h = \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2, (\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) \times$$
$$\times((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) +$$
$$+(e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2, (\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2) \times$$
$$\times((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2)] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) + \beta((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2)] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes (\alpha d_1 + \beta d_2).$$

Из этой формулы следует, что если результатом измерения наблюдаемой $A^1_{\alpha\beta}$ стало число 1 $\left(\text{вероятность этого равна } \frac{1}{2}\right)$, то состояние системы с пространством H сразу после измерения задается вектором $(\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes (\alpha d_1 + \beta d_2)$. Это означает, что после измерения наблюдаемой $A^1_{\alpha\beta}$ смешанное состояние первой системы становится чистым и описывается вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, и одновременно смешанное состояние второй системы также становится чистым и описывается вектором, координаты которого в базисе $\{d_1, d_2\}$ совпадают с координатами в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектора, задающего состояние первой системы.

Поэтому можно считать, что измерение наблюдаемой $A^1_{\alpha\beta}$, одновременно является измерением наблюдаемой $A^2_{\alpha\beta}$. При этом, как уже отмечалось, расстояние в физическом пространстве между первой и второй системами может быть произвольным, и несмотря на это результат эксперимента над одной из систем мгновенно определяет состояние, в которое переходит вторая система сразу после этого эксперимента. Сравнительно недавно французский физик А. Аспе (A. Aspect) осуществил эксперимент, подтвердивший справедливость только что сказанного.

Существует тесная связь (см. [6]) между так называемым неравенством Бэлла, получаемым в рамках аксиоматики Колмогорова, и экспериментами над квантовыми системами, состоящими из двух подсистем.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Илью Александровича Надъярных, студента шестого курса механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, за большую и квалифицированную помощь при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А., Эренфест П., Эренфест Т., фон Нейман Дж.* Работы по статистической механике. С доп. и под ред. В.В. Козлова и О.Г. Смолянова. ИКИ. Библиотека журнала рациональная и хаотическая динамика. М. – Ижевск, 2011.
2. *Gleason A.M.* Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // J. Math. Mech, 1957. № 6. P. 885–893.
3. *Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.).* Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика и нерелятивистская теория. Гос. Изд. физ.-мат. лит-ры, М., 1963.
5. *Смолянов О.Г., Трумен А.* Вероятностные модели квантовых систем и неравенства типа Белла // ДАН. 2002. Т. 387. 1. С. 31–36.
6. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. Институт компьютерных исследований. Библиотека журнала рациональная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2020.
7. *Bell J.S.* Speakable and Uspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge University Press, 1987.
8. *Parthasarathy K.R.* An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1992.

MATHEMATICAL STRUCTURES RELATED TO THE DESCRIPTION OF QUANTUM STATES

Academician of the RAS V. V. Kozlov[a] and O. G. Smolyanov[b]

[a]*V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

One discussed some representations of the states of quantum systems and their equivalence is proved. In particular, the approach going back to L.D. Landau, in which the density operator is constructed using the reduction of the pure state of a quantum system described by a tensor product of suitable Hilbert spaces is given. Under the just formulated assumptions, the change of the states of subsystems of a quantum system as a result of experiments is investigated.

Keywords: pure state, density operator, tensor product, reduction of states, Bell vector