

УДК 517.956.6

ПОСТРОЕНИЕ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ФЕРМИ–ПАСТА–УЛАМА

© 2021 г. С. А. Кащенко^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.07.2021 г.

Поступило 15.09.2021 г.

После доработки 15.09.2021 г.

Принято к публикации 08.10.2021 г.

Рассматривается вопрос об асимптотике решений пространственно-распределенной цепочки в задаче Ферми–Паста–Улама. Построены зависящие от параметров континуальные семейства нерегулярных решений. Показано, что они описываются специальными системами шрёдингеровского типа. Изучен вопрос о влиянии на асимптотику решений изменений количества элементов в рассматриваемой цепочке.

Ключевые слова: задача Ферми–Паста–Улама, квазинормальные формы, асимптотика, пространственно-распределенные цепочки

DOI: 10.31857/S2686954321060102

ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = F_{j,j+1} - F_{j-1,j}, \quad (1)$$

где

$$F_{j-1,j} = k(\Delta l) + \alpha(\Delta l)^2 + \beta(\Delta l)^3, \\ \Delta l = u_j - u_{j-1} \quad (k > 0),$$

носит имя Ферми–Паста–Улама. Она была предложена в [1]. Здесь $M > 0$, индекс j меняется от 1 до N и выполнены условия “периодичности”: $u_0 \equiv u_N, u_{N+1} \equiv u_1$. Значения $u_j(t)$ можно ассоциировать со значениями функции двух переменных $u(t, x_j)$ в равномерно распределенных на некоторой окружности точках с угловой координатой x_j . Основное предположение настоящей работы состоит в том, что значение N достаточно велико, т.е. величина $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ является достаточно малой:

$$\varepsilon = 2\pi N^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Это условие позволяет естественным образом перейти от использования дискретной перемен-

ной x_j к непрерывной переменной $x \in [0, 2\pi]$. Кроме этого нас будет интересовать влияние изменения величины N на асимптотику решений. Пусть количество элементов в (1) равно $N + c$, где c – произвольно фиксированное целое значение. Положим $\mu = 2\pi(N + c)^{-1}$ и произведем нормировку времени $t \rightarrow M^{1/2} \varepsilon^{-1} t$. Тогда система (1) принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y(t, x + \mu) - 2y(t, x) + y(t, x - \mu) + \\ + \alpha[y^2(t, x + \mu) - 2y(t, x)y(t, x + \mu) + \\ + 2y(t, x)y(t, x - \mu) - y^2(t, x - \mu)] + \\ + \beta[(y(t, x + \mu) - y(t, x))^3 - (y(t, x) - y(t, x - \mu))^3] \quad (3)$$

и выполнено условие периодичности

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (4)$$

Уравнение (3) исследовалось многими авторами (см., например, [1–8]), причем основное внимание уделялось изучению так называемых регулярных решений. Напомним, что регулярные решения выделялись условием “хорошей” зависимости от параметра ε . Это такие решения, для которых справедливо асимптотическое представление

$$u(t, x + \varepsilon) = u(t, x) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \dots$$

Для исследования регулярных решений с определенной степенью точности по параметру ε от

¹ Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

уравнения (3) осуществлялся переход к специальному нелинейному уравнению с частными производными. Основные результаты касались, в основном, вопросов о нахождении точных решений и о выявлении свойств интегрируемости полученных уравнений с частными производными.

Отметим еще, что в работе [8] получены интересные результаты о взаимодействии волн в таких уравнениях.

Для параметра μ имеем асимптотическую формулу

$$\mu = \varepsilon(1 + \varepsilon c(2\pi)^{-1})^{-1} = \varepsilon \left(1 - \frac{c\varepsilon}{2\pi} + \frac{c^2\varepsilon^2}{4\pi^2} + \dots \right).$$

Через $E_{\pm}(t, x, \varepsilon)$ обозначим функции

$$E_{\pm}(t, x, \varepsilon) = (\delta + \varepsilon\Theta)x \pm \left(2\sin\frac{\delta}{2} + \varepsilon \left(\Theta - \frac{\delta c}{\pi} \cos\frac{\delta}{2} \right) \right) t.$$

В настоящей работе изучаются нерегулярные решения краевой задачи (3), (4). Структура таких решений будет состоять из суперпозиции функций, гладко (регулярно) зависящих от параметра ε , и функций, гладко зависящих от параметра ε^{-1} . Остановимся на этом подробнее.

Прежде всего отметим, что любая тождественно постоянная функция $u_0(t, x) \equiv \text{const}$ является состоянием равновесия краевой задачи (3), (4). Будем исследовать локальное поведение решений в окрестности каждого такого состояния равновесия. Тем самым исследуются решения с достаточно малыми (и не зависящими от ε) отклонениями их 2π -периодических и непрерывных по x начальных условий. При исследовании локального поведения решений важную роль играет линейаризованное на состояниях равновесия краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(t, x + \mu) - 2u(t, x) + u(t, x - \mu), \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

В свою очередь структура решений (5) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\varepsilon^2 \lambda^2 = -4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon c}{2\pi} + \frac{\varepsilon^2 c^2}{4\pi^2} + \dots \right) k \right), \quad (6)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим асимптотику корней (6) для достаточно больших — порядка ε^{-1} значений величин k .

Сначала фиксируем произвольно величину $\delta > 0$ и будем предполагать, что

$$\delta \neq 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Ниже через $\Theta = \Theta(\delta, \varepsilon) \in [0, 1]$ будем обозначать величину, которая дополняет до целого выражения $\delta\varepsilon^{-1}$.

Пусть K_{ε} — совокупность таких целых чисел, которые заданы формальным соотношением

$$K_{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon^{-1} + \Theta + 2\pi n\varepsilon^{-1} + m; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Обратим внимание, что в силу равенства $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ величина $2\pi n\varepsilon^{-1}$ является целым числом.

Будет рассмотрен вопрос о таких решениях краевой задачи (3), (4), в основе формирования которых присутствуют моды с номерами из K_{ε} . Для нахождения главных частей таких решений будут получены специальные системы уравнений в частных производных, представляющие собой системы из двух связанных нелинейных уравнений Шрёдингера.

Каждому элементу множества K_{ε} соответствует значение корня $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (6), а каждому корню $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ отвечает решение линейной краевой задачи (5)

$$u_{m,n}^{\pm}(t, x, \varepsilon) = \exp[i\varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon(\Theta + m) + 2\pi n)x + \lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)t],$$

а значит эта же краевая задача имеет совокупность решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm} u_{m,n}^{\pm}(t, x, \varepsilon). \quad (8)$$

Выражение (8) можно существенно упростить. Для этого введем обозначения. Положим

$$x_{\pm} = x \pm t \cos \frac{\delta}{2}, \quad (9)$$

$$y = 2\pi\varepsilon^{-1}x, \quad y_{\pm} = y \mp ct \cos \frac{\delta}{2}.$$

Тогда (8) преобразуется к виду

$$u(t, x, \varepsilon) = u^{+}(t, x, \varepsilon) + u^{-}(t, x, \varepsilon)$$

и

$$u^{\pm}(t, x, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon^{-1}E_{\pm}(t, x, \varepsilon)) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm} \times$$

$$\times \exp \left(i \left(mx_{\pm} + ny_{\pm} \pm \frac{i\varepsilon}{2} \left(\left(\frac{\delta c^2}{2\pi^2} - \frac{(\Theta + m)c}{\pi} + \frac{nc^2}{\pi} \right) \cos \frac{\delta}{2} + \left(\frac{\delta c}{\pi} - (\Theta + m) + cn \right)^2 \sin \frac{\delta}{2} \right) + O(\varepsilon) \right) t \right) =$$

$$= \xi_{+}(\tau, x_{+}, y_{+}) \exp(i\varepsilon^{-1}E_{+}(t, x, \varepsilon)) +$$

$$+ \xi_{-}(\tau, x_{-}, y_{-}) \exp(i\varepsilon^{-1}E_{-}(t, x, \varepsilon)),$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$\begin{aligned}\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm}(\tau) \exp(imx_{\pm} + iny_{\pm}), \\ \xi_{m,n\pm}(\tau) &= \\ &= \xi_{m,n\pm} \exp \left(\pm \frac{i}{2} \left(\left(\frac{\delta c^2}{2\pi^2} - \frac{(\Theta + m)c}{\pi} + \frac{nc^2}{\pi} \right) \cos \frac{\delta}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\delta c}{\pi} - (\Theta + m) + cn \right)^2 \sin \frac{\delta}{2} + O(\varepsilon) \right) \tau \right).\end{aligned}$$

В следующем разделе сформулируем основной результат. Из него будет следовать, что нелинейная краевая задача (3), (4) имеет совокупность таких нерегулярных решений, главные члены асимптотики которых определяет выражение

$$\begin{aligned}u(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+(t, x, \varepsilon)) + \overline{cc} + \\ &\quad + \xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_-(t, x, \varepsilon)) + \overline{cc} + O(\varepsilon^2)).\end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных амплитуд $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$ приведем специальную систему связанных нелинейных уравнений Шрёдингера. Через $\overline{cc}$ здесь и ниже обозначаются выражения, комплексно сопряженные к предыдущему слагаемому.

В разделе 2 отдельно рассмотрен случай, когда для некоторого целого k_0 выполнено равенство

$$\delta = 2\pi k_0. \quad (10)$$

Сразу отметим, что этот случай существенно отличается от случая (7).

В методическом плане обоснование приводимых ниже результатов опирается на работы [9–11].

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сначала введем несколько обозначений. Через D, J и J_0 обозначим операторы, определенные на непрерывно дифференцируемых функциях $v(x, y)$ двух переменных x и y и действующих по правилам

$$\begin{aligned}Dv(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} - c \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Jv(x, y) &= \int_0^x v(s, cx + y - cs) ds, \\ J_0v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(s, cx + y - cs) ds.\end{aligned}$$

Ниже потребуются следующие соотношения, которые вытекают из этих определений:

$$\begin{aligned}Dv(cx + y) &= 0, \\ D(J - J_0)v(x, y) &= DJv(x, y) = v(x, y).\end{aligned} \quad (11)$$

Через $W_2(\tau, t, x_{\pm}, y_{\pm}, \varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon\Theta)x)$ обозначим функцию

$$\begin{aligned}&w_{21}(\xi_+(\tau, x_+, y_+))^2 \exp(2i\varepsilon^{-1}E_+) + \overline{cc} + \\ &+ w_{21}(\xi_-(\tau, x_-, y_-))^2 \exp(2\varepsilon^{-1}E_-) + \overline{cc} + \\ &+ w_{23}\xi_+(\tau, x_+, y_+)\xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+ + E_-) + \overline{cc} + \\ &+ w_{24}\xi_+(\tau, x_+, y_+)\xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+ - E_-) + \overline{cc} + \\ &\quad + \xi_+(\tau, x_+, y_+)f_+(\tau, t, x, y) \exp(i\varepsilon E_+) + \\ &\quad + \overline{cc} + \xi_-(\tau, x_-, y_-)f_-(\tau, t, x, y) \exp(i\varepsilon E_-) + \overline{cc},\end{aligned}$$

где

$$w_{21} = i\alpha \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}, \quad w_{23} = 2i \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad w_{24} = i \sin \delta, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}f_+(\tau, t, x, y) &= i\sigma_1(4 \sin \delta)^{-1}(J - J_0)|\xi_-(\tau, x, y)|^2, \\ f_-(\tau, t, x, y) &= -i\sigma_1(4 \sin \delta)^{-1}(J - J_0)|\xi_+(\tau, x, y)|^2.\end{aligned} \quad (13)$$

Сформулируем основной результат. Рассмотрим две краевые задачи

$$\begin{aligned}\pm 2i \frac{\partial \eta_{\pm}}{\partial \tau} &= \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) D^2 \eta_{\pm} - 2i\Theta \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) D \eta_{\pm} + \\ &\quad + 16\sigma_0 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \eta_{\pm} |\eta_{\pm}|^2,\end{aligned} \quad (14)$$

$$\eta(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \eta(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x, y),$$

в которых

$$\sigma_0 = \alpha^2 \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) + 6\beta \sin \left(\frac{\delta}{2} \right),$$

$$\sigma_1 = -\sin \left(\frac{\delta}{2} \right) 2 \left[\left(1 + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \alpha^2 + 6\beta \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right].$$

Ниже через $\varepsilon_k(\Theta_0)$ ($k = k_0, k_0 + 1, \dots$) обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_k(\Theta_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и на которой величина Θ не меняется: $\Theta(\varepsilon_k(\Theta_0)) = \Theta_0$.

Положим

$$\begin{aligned}\xi_{\pm}(\tau, x, y) &= \eta_{\pm}(\tau, x, y) \times \\ &\times \exp \left[\mp i\sigma_1 8 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \int_0^{\tau} J_0 |\eta_{\mp}(s, x, y)|^2 ds \pm \frac{i}{2} \Theta^2 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \tau \right].\end{aligned}$$

Теорема 1. *Фиксируем произвольно положительное значение $\delta \neq \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $\Theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $(\xi_+(\tau, x, y), \xi_-(\tau, x, y))$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 2\pi]$ вместе с производной по τ и первой и второй производным по x и y — решение краевых задач (14) при $\Theta = \Theta_0$. Тогда функция*

$$\begin{aligned}u(t, x, \varepsilon_k) &= \varepsilon_k(\Theta_0)(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+) + \\ &\quad + \overline{cc} + \xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_-) + \overline{cc}) + \\ &\quad + \varepsilon_k^2(\Theta_0)W_2(\tau, t, x_{\pm}, y_{\pm}, \varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon\Theta)x)\end{aligned} \quad (15)$$

при $\tau = \varepsilon_k(\Theta_0)t$, $x_{\pm} = x \pm t \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$, $y_{\pm} = y \mp t \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$,
 $y = 2\pi\varepsilon_k^{-1}(\Theta_0)x$ удовлетворяет краевой задаче (3),
 (4) с точностью до $O(\varepsilon_k^3(\Theta_0))$.

В плане обсуждения этого результата отметим, что в обоих уравнениях (13) и (14) фигурируют одни и те же значения аргументов τ, x, y , а в формуле (15) аргументы функций $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$ различные. Свести (13) и (14) к одинаковым аргументам удалось из-за того, что нелинейные выражения $(J|\xi_{\pm}|^2 - J_0|\xi_{\pm}|^2)$ зависят от аргумента $cx + y$. Это, в свою очередь, следует из равенств (9) и (11): $cx + y = cx_+ + y_+ = cx_- + y_-$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\delta = 2\pi n_0$

Множество целых чисел K_{ε} в этом случае имеет вид

$$K_{\varepsilon} = \{m + 2\pi n\varepsilon^{-1}; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Для корней $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (6) выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon) = \pm i \left[\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon c}{2\pi} \right) (m - nc) - \frac{1}{6} \varepsilon^3 (m - nc)^3 \right] + \dots$$

Опираясь на структуру решений линеаризованной краевой задачи (5) с модами из K_{ε} , решения нелинейной краевой задачи (3), (4) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi_+(\tau, x_+, y_+) + \xi_-(\tau, x_-, y_-)) + \\ + \varepsilon^2(W_{2+}(\tau, x_+, y_+) + W_2(\tau, x_-, y_-) + \\ + W_{20}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})) + \dots, \quad (16)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_{\pm} = x \pm t$, $y_{\pm} = y \pm ct$.

Подставим (16) в (3) и будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 получаем верное равенство. На следующем шаге приходим к уравнению относительно W_{20} , $W_{2\pm}$. Из него находим, что

$$W_{20} = -\frac{1}{2}\alpha D(\xi_+\xi_-),$$

а из условия разрешимости уравнений относительно $W_{2\pm}$ приходим к соотношениям для $\xi_{\pm}(\tau, x, y)$:

$$\pm 2 \frac{\partial}{\partial \tau} D\xi_{\pm} = D^4\xi_{\pm} - 2\alpha D\xi_{\pm} D^2\xi_{\pm}, \quad (17)$$

$$\xi_{\pm}(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi_{\pm}(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \xi_{\pm}(\tau, x, y). \quad (18)$$

Отсюда следует итоговое утверждение.

Теорема 2. Пусть краевая задача (17), (18) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 2\pi]$ непрерывно дифференцируемое по τ и четырежды

непрерывно дифференцируемое по x и y решение $\xi_{\pm}(\tau, x, y)$. Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi_+(\tau, x_+, y_+) + \xi_-(\tau, x_-, y_-)) - \\ - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \alpha D(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \xi_-(\tau, x_-, y_-))$$

удовлетворяет краевой задаче (3), (4) с точностью до $O(\varepsilon^3)$.

Отметим, что уравнения (17) можно упростить. Для этого положим

$$\eta_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}) = D\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}).$$

В результате получим краевую задачу

$$\pm 2 \frac{\partial \eta_{\pm}}{\partial \tau} = D^3\eta_{\pm} - 2\alpha\eta_{\pm} D\eta_{\pm}, \eta(\tau, x + 2\pi, y) = \\ = \eta(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x, y).$$

Эту краевую задачу естественно назвать уравнением Кортевега–де-Фриза в двумерной пространственной области.

Функции $\xi_{\pm}$ можно выразить через $\eta_{\pm}$:

$$\xi_{\pm}(\tau, x, y) = (J - J_0)\eta_{\pm}(\tau, x, y).$$

ВЫВОДЫ

Предложенный подход позволяет при построении асимптотики решений учитывать и более высокие по порядку ε слагаемые. Кроме этого могут быть рассмотрены задачи с несколькими параметрами $\delta_1, \dots, \delta_j$; и, в том числе, при наличии среди них резонансных соотношений.

Обратим внимание, что в краевой задаче (14) присутствует “внутренний” параметр Θ , который бесконечно много раз изменяется от 0 до 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это говорит о том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ может происходить неограниченный процесс прямых и обратных перестроек фазовых портретов. Некоторые иллюстрации этого явления приведены в работе [12].

Показано, что для описания главных приближений решений в различных областях фазового пространства краевой задачи (3) возникают различные уравнения в частных производных.

При $\delta \neq 2\pi l$ и $\delta = 2\pi l_0$ построены специальные нелинейные краевые задачи для нахождения медленно меняющихся амплитуд $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$. Для каждого из этих двух случаев эти краевые задачи различны. В первом из них получены системы двух уравнений Шрёдингера, во втором – система двух уравнений Кортевега–де-Фриза. Асимптотические представления изученных выше нерегулярных решений содержат суперпозиции функций, зависящих от “медленного” времени $\tau = \varepsilon t$ (или $\tau = \varepsilon^2 t$), от “среднего” времени t и от “быстрого” време-

ни $\varepsilon^{-1}t$. Кроме того, они содержат 2π -периодические компоненты по пространственным переменным x , $y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$ и быстро осциллирующие по переменной $\varepsilon^{-1}x$.

Из приведенных выше формул следует, что при условии $\delta \neq 2\pi l$ влияние функций ξ_+ и ξ_- друг на друга приводит только к изменению их фазовых составляющих. Если же $\delta = 2\pi l_0$, то это влияние проявляется существенно слабее [8] при учете слагаемых более высокого порядка малости в соответствующих краевых задачах. В этом можно проследить некоторые аналогии с выводами из [13, 14].

При $\delta \neq 2\pi l$ коэффициенты σ_0 и σ_1 в (14) зависят и от параметра α и от параметра β , а при $\delta = 2\pi l_0$ в (17), (18) фигурирует только параметр α . Разными оказались и “порядки” “медленного” времени τ . В первом случае $\tau = \varepsilon t$, а во втором — $\tau = \varepsilon^2 t$, т.е. при $\delta = 2\pi l_0$ процессы протекают существенно медленнее. Отметим еще, что в обоих случаях амплитуда главных слагаемых решений имеет порядок ε .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Russel Scott J.* Report of waves // Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (York, Sept. 1844). 1845. P. 311–390.
2. *Fermi E., Pasta J.R., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems. I // Los Alamos Report LA-1940, Los Alamos Scientific Laboratory. 1955.
3. *Dauxois T., Peyrard M., Ruffo S.* The Fermi-Pasta-Ulam “numerical experiment”: history and pedagogical perspectives. arXiv: nlin/0501053v2, 22 Mar 2005.
4. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-deVries Equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge university press, 1991.
6. *Kudryashov N.A.* Refinement of the Korteweg–de Vries equation from the FermiPasta-Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 279. P. 2610–2614.
7. *Kudryashov N.A.* From the Fermi–Pasta–Ulam Model to Higher-Order Nonlinear Evolution Equations // Reports on mathematical Physics. 2016. V. 77. 1. P. 57–67.
8. *Kashchenko S.A.* The interaction of waves in the Fermi–Pasta–Ulam model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. V. 91. P. 105436. ISSN 1007-5704.
9. *Kashchenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. of Bifurcations and chaos. 1996. V. 6. 7. P. 1093–1109.
10. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Quasi-Normal Forms of Two-Component Singularly Perturbed Systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. № 3. p. 865.
11. *Kashchenko S.A.* Asymptotic Behavior of Rapidly Oscillating Solutions of the Modified Camassa–Holm Equation // Theoretical and Mathematical Physics. 2020. V. 203. № 1. pp. 469–482.
12. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. V. 22. № 4. pp. 407–412.
13. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia. PA.: SIAM, 1981.
14. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240–243.

THE CONSTRUCTION OF THE FAMILY OF EQUATIONS TO DESCRIBE IRREGULAR SOLUTIONS IN THE FERMI–PASTA–ULAMA PROBLEM

S. A. Kashchenko

Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The question about the asymptotics of the solutions of the spatial distributed chain in the Fermi Pasta Ulam problem is considered. Continual families of irregular solutions depending on the parameters have been constructed. It has been shown that they are described by special systems of Schrödinger type.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam problem, quasinormal forms, asymptotics, special distributed chains