ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 38–41

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2021 г. Академик РАН И. А. Ибрагимов[1,2,*], Н. В. Смородина[1,2,], М. М. Фаддеев[2,*]**

Поступило 14.08.2021 г.
После доработки 14.08.2021 г.
Принято к публикации 08.09.2021 г.

В работе вводится семейство $r_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ комплексных стохастических процессов, дающих возможность строить вероятностное представление резольвенты оператора $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. При $\lambda = 0$ процесс r_λ является вещественным и совпадает с процессом броуновского локального времени.

Ключевые слова: случайные процессы, локальное время
DOI: 10.31857/S2686954321060072

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $w(t), t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс. Хорошо известно, что с помощью винеровского процесса $w(t)$ строится вероятностное представление классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Именно, для каждой непрерывной ограниченной функции f функция

$$u(t,x) = \mathbf{E}f(x - w(t)) \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

и начальному условию $u(0,x) = \lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = f(x)$.

Если мы хотим строить вероятностное представление не только классического, но и обобщенного (см. [1, гл. III]) решения задачи Коши для уравнения (2), то для начальной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ вместо (1) можно использовать следующее выражение:

$$u(t,x) = (L_2)\lim_{M\to\infty} \mathbf{E}f_M(x - w(t)), \tag{3}$$

где функция f_M определяется через преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f как

$$f_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} e^{-ipx}\widehat{f}(p)dp.$$

В этом случае удобнее говорить не в терминах уравнений, а в терминах функций от операторов. Далее через $W_2^k(\mathbb{R})$ мы будем обозначать пространство Соболева функций (подробнее см. [2, гл. 1]), определенных на $\mathbb{R}$. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R})$ мы выберем норму

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|^{2k})\left|\widehat{\psi}(p)\right|^2 dp,$$

где через $\widehat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ, которое в данной работе определяется как $\widehat{\psi}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx}\psi(x)dx$.

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}, \tag{4}$$

заданный на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно (см., например, [3, гл. 7]), что спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ является абсолютно непрерывным и совпадает с полупрямой $[0,\infty)$. Преобразование Фурье осуществляет унитарную эквивалентность оператора $\mathcal{A}$ и оператора умножения на $p^2/2$. В силу спектральной теоремы оператор

[1] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru*
***E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru*
****E-mail: m.faddeev@spbu.ru*

$e^{-t\mathcal{A}}$ при всех положительных t определен уже на всем $L_2(\mathbb{R})$, а из (3) вытекает, что для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо

$$e^{-t\mathcal{A}}f(x) = (L_2)\lim_{M\to\infty}\mathbf{E}f_M(x - w(t)) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(L_2)\lim_{M\to\infty}\mathbf{E}\int_{-M}^{M} e^{-ipx}e^{ipw(t)}\hat{f}(p)dp.$$

Другими словами, с помощью винеровского процесса строится вероятностное представление оператора $e^{-t\mathcal{A}}$.

В настоящей работе мы построим случайные процессы, дающие аналогичное представление, но не для экспоненты, а для резольвенты оператора $\mathcal{A}$. Именно, мы построим семейство $r_\lambda(t,x)$, $t > 0$ комплекснозначных случайных процессов, параметризованных спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что при каждых $t > 0$ и $\alpha \in [0,1/2)$ с вероятностью единица выполнено

$$r_\lambda(t,\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}),$$

и при каждых $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ и $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}f * r_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}f. \tag{5}$$

В случае, когда $\lambda \in [0,\infty)$ (т.е., когда $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$) равенство (5) выполнено для всех

$$f \in \mathcal{D}((\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}).$$

Построенный класс процессов мы будем называть резольвентными процессами. При $\lambda = 0$ резольвентный процесс $r_\lambda(t,x)$ совпадает с процессом броуновского локального времени (про броуновское локальное время см., например, [4]). Таким образом, указанный подход дает еще один взгляд на броуновское локальное время, как на одного представителя целого семейства процессов. Для построения резольвентных процессов мы использовали метод, предложенный в [5, 6].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ПРОЦЕССА

Пусть, как и выше, $w(t), t \geq 0$ — стандартный винеровский процесс. Для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ мы определим случайную функцию $r_\lambda(t,x)$ переменных $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, причем так, что при каждых $t > 0$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ с вероятностью единица было выполнено

$$r_\lambda(t,\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}).$$

Для этого определим сначала процесс $\hat{r}_\lambda(t,p)$, который будет являться преобразованием Фурье (по переменной x) искомого процесса $r_\lambda(t,x)$.

Итак, пусть

$$\lambda = a + bi.$$

При $a = \mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$ для всех $p \in \mathbb{R}$ положим

$$\hat{r}_\lambda(t,p) = \int_0^t e^{\lambda\tau}e^{ipw(\tau)}d\tau. \tag{6}$$

Далее, пусть $a = \mathrm{Re}\lambda > 0$. Тогда при $|p| > \sqrt{2a}$ или при $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \mathrm{Im}\lambda = 0$, как и выше, определим $\hat{r}_\lambda(t,p)$ формулой (6).

При $|p| < \sqrt{2a}$ положим

$$\hat{r}_\lambda(t,p) = -\int_0^t e^{-\lambda\tau}e^{pw(\tau)}d\tau. \tag{7}$$

При $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \mathrm{Im}\lambda > 0$ положим

$$\hat{r}_\lambda(t,p) = i\int_0^t e^{i\lambda\tau}e^{ipe^{i\pi/4}w(\tau)}d\tau. \tag{8}$$

Наконец, при $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \mathrm{Im}\lambda < 0$ положим

$$\hat{r}_\lambda(t,p) = -i\int_0^t e^{-i\lambda\tau}e^{ipe^{-i\pi/4}w(\tau)}d\tau. \tag{9}$$

Введем обозначение. Через $h_\lambda(t,p)$ обозначим функцию, заданную следующим образом ($a = \mathrm{Re}\lambda$, $b = \mathrm{Im}\lambda$):

$$h_\lambda(t,p) = \begin{cases} e^{\lambda t}e^{ipw(t)}, \quad \text{при } a \leq 0, \\ \text{или при } \quad a > 0 \text{ и } |p| > \sqrt{2a}, \\ \text{или при } a > 0,\ |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b = 0, \\ e^{-\lambda t}e^{pw(t)}, \quad \text{при } \quad a > 0 \text{ и } |p| < \sqrt{2a}, \\ ie^{i\lambda t}e^{ipe^{i\pi/4}w(t)}, \quad \text{при } \quad a > 0, \\ |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b > 0, \\ -ie^{-i\lambda t}e^{ipe^{-i\pi/4}w(t)}, \quad \text{при } \quad a > 0, \\ |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b < 0. \end{cases} \tag{10}$$

В этих обозначениях

$$\hat{r}_\lambda(t,p) = \int_0^t h_\lambda(\tau,p)d\tau.$$

Покажем теперь, что для любых фиксированных λ, t с вероятностью единица выполнено $r_\lambda(t,\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R})$, где $r_\lambda(t,\cdot)$ — обратное преобразование Фурье функции $\hat{r}_\lambda(t,\cdot)$.

Для этого введем пространство $\mathcal{W}_2^\alpha$ измеримых случайных функций $g(x)$ с нормой

$$\|g\|_\alpha^2 = \mathbf{E}\int_{\mathbb{R}}(1 + p^{2\alpha})|\hat{g}(p)|^2dp, \tag{11}$$

где $\hat{g}$ есть преобразование Фурье функции g по переменной x.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. 1. *Для любого* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *при фиксированных* $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *существует предел*

$$r_\lambda(t,\cdot) = (\mathcal{W}_2^\alpha) \lim_{M\to\infty} r_\lambda(t,\cdot,M),$$

где функция $r_\lambda(t,\cdot,M)$ *задается своим преобразованием Фурье*

$$\widehat{r_\lambda}(t,p,M) = \mathbf{1}_{[-M,M]}(p) \cdot \int_0^t h_\lambda(\tau,p)d\tau.$$

2. *Если* $\mathrm{Re}\lambda < 0$, *то для любого* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *существует предел*

$$r_\lambda^\infty(\cdot) = (\mathcal{W}_2^\alpha) \lim_{t\to\infty} r_\lambda(t,\cdot). \tag{12}$$

Из теоремы 1 немедленно следует, что с вероятностью единица

$$r_\lambda(t,\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}),$$

а при $\mathrm{Re}\lambda < 0$

$$r_\lambda^\infty(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}).$$

Заметим, что процессы $r_\lambda(t,\cdot)$ у нас пока заданы только своим преобразованием Фурье $\widehat{r_\lambda}(t,\cdot)$. Найдем теперь явное выражение для функций $r_\lambda(t,\cdot)$ как функционалов от траекторий винеровского процесса.

Пусть сначала $a = \mathrm{Re}\lambda \le 0$. Тогда

$$\widehat{r_\lambda}(t,p) = \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau,$$

и, значит,

$$r_\lambda(t,x) = \frac{1}{2\pi}(L_2) \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{-ipx} \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(L_2) \lim_{M\to\infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-M,M]}(p) e^{-ip(x-w(\tau))} d\tau dp =$$

$$= (L_2) \lim_{M\to\infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} D_M(x - w(\tau)) d\tau,$$

где D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{\sin Mx}{\pi x}.$$

Таким образом, при $a = \mathrm{Re}\lambda \le 0$ мы имеем

$$r_\lambda(t,x) = (L_2) \lim_{M\to\infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} D_M(x - w(\tau)) d\tau. \tag{13}$$

Пользуясь тем, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{M\to\infty} D_M = \delta,$$

где δ – дельта-функция Дирака, здесь и ниже будем для сокращения записи использовать удобную формулу

$$r_\lambda(t,x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} \delta(x - w(\tau)) d\tau, \tag{14}$$

понимая ее так, что правая часть (13) есть определение правой части (14).

В случае $a < 0$ в этом же смысле мы имеем

$$r_\lambda^\infty(x) = \int_0^\infty e^{\lambda\tau} \delta(x - w(\tau)) d\tau.$$

Пусть теперь $a = \mathrm{Re}\lambda > 0$. Тогда

$$\widehat{r_\lambda}(t,p) = \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau \cdot \mathbf{1}_{(\sqrt{2a},\infty)}(|p|) -$$

$$- \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{pw(\tau)} d\tau \cdot \mathbf{1}_{(0,\sqrt{2a})}(|p|),$$

и, соответственно,

$$r_\lambda(t,x) = \frac{1}{2\pi}(L_2) \lim_{M\to\infty} \int_{[-M,M]\setminus[-\sqrt{2a},\sqrt{2a}]} e^{-ipx} \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau dp -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} e^{-ipx} \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{pw(\tau)} d\tau dp =$$

$$= (L_2) \lim_{M\to\infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} (D_M(x - w(\tau)) - D_{\sqrt{2a}}(x - w(\tau))) d\tau =$$

$$= - \int_0^t e^{-\lambda\tau} D_{\sqrt{2a}}(x + iw(\tau)) =$$

$$= \int_0^t e^{\lambda\tau} \left(\delta(x - w(\tau)) - \frac{\sin(\sqrt{2a}(x - w(\tau)))}{\pi x}\right) d\tau -$$

$$- \int_0^t e^{-\lambda\tau} \frac{\sin(\sqrt{2a}(x + iw(\tau)))}{\pi x} d\tau.$$

Заметим еще, что в случае $\lambda = 0$ процесс $r_\lambda(t,x)$ совпадает с броуновским локальным временем (см. [4, гл. 1, § 4]).

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим случайный ограниченный оператор

$$\mathcal{R}_\lambda^t \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

полагая для $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{R}^t_\lambda f(x) = (r_\lambda * f)(t,x). \tag{15}$$

В случае $a = \mathrm{Re}\lambda < 0$ определим еще случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda$, полагая

$$\mathcal{R}_\lambda f(x) = (r^\infty_\lambda * f)(x). \tag{16}$$

Преобразования Фурье операторов $\mathcal{R}^t_\lambda, \mathcal{R}_\lambda$ действуют следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{R}^t_\lambda} \widehat{f}(p) = \widehat{r_\lambda}(t,p) \cdot \widehat{f}(p), \tag{17}$$

$$\widehat{\mathcal{R}_\lambda} \widehat{f}(p) = \widehat{r^\infty_\lambda}(p) \cdot \widehat{f}(p). \tag{18}$$

Далее, для $f \in L_2(\mathbb{R})$ определим функцию $u(t,x)$, полагая

$$u(t,x) = \mathbf{E}\mathcal{R}^t_\lambda f(x) = \mathbf{E}(r_\lambda * f)(t,x).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda \le 0$. *Тогда функция* $u(t,x)$ *является обобщенным решением уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u + f(x),$$

удовлетворяющим условию $u(0,x) = 0$.

Пусть, как и выше, $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, заданный на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W^2_2(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : p^2\widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

и действующий на этой области определения по правилу

$$\mathcal{A}f = -\frac{1}{2}f''.$$

Как уже было отмечено, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}) = [0,\infty)$, причем для $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ область определения оператора $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ имеет вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \frac{\widehat{f}(p)}{\frac{p^2}{2} - \lambda} \in L_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Теорема 3. 1. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda < 0$. *Тогда для любого* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *справедливо*

$$\mathbf{E}f * r^\infty_\lambda(x) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} f(x).$$

2. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda \ge 0$ *и* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$. *Тогда для любого* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *справедливо*

$$(L_2)\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}f * r_\lambda(t,x) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} f(x). \tag{19}$$

3. *Пусть* $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. *Тогда для любого* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ *справедливо* (19).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа М.М. Фаддеева выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00657).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
2. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013. 378 с.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Лань, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, 2010.
4. *Бородин А.Н., Ибрагимов И.А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. МИАН СССР. 1994. Т. 195. С. 3–286.
5. *Berman S.* Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties // Ann. Math. Stat. 1970. V. 41. № 4. P. 1260–1272.
6. *Berman S.* Local times and sample function properties of stationary Gaussian process // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 137. P. 277–299.

ON A FAMILY OF COMPLEX-VALUED STOCHASTIC PROCESSES

Academician of the RAS I. A. Ibragimov[a,b], N. V. Smorodina[a,b], and M. M. Faddeev[b]

[a] *St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation*

[b] *St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

We introduce a family $r_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ of complex-valued stochastic processes giving a possibility to construct a probabilistic representation for a resolvent of operator $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. For $\lambda = 0$ the process r_λ is real-valued and coincides with the Brownian local time process.

Keywords: random processes, local time