ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 11–15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА С МАТРИЦЕЙ ДИФФУЗИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ДИНИ

© 2021 г. В. И. Богачев[1,2,3,4,*], С. В. Шапошников [1,2,4,]**

Представлено академиком РАН Д.В. Трещевым 24.06.2021 г.
Поступило 25.06.2021 г.
После доработки 25.06.2021 г.
Принято к публикации 22.07.2021 г.

В этом сообщении мы исследуем стационарное уравнение Колмогорова и доказываем, что в случае, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини, а коэффициент сноса локально интегрируем в степени выше размерности, отношение двух вероятностных решений входит в класс Соболева, а при наличии функции Ляпунова или глобальной интегрируемости коэффициентов относительно решения вероятностное решение единственно.

Ключевые слова: уравнение Колмогорова, стационарное решение, единственность вероятностного решения

DOI: 10.31857/S2686954321060047

В этом сообщении мы исследуем стационарное уравнение Колмогорова

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho) - \partial_{x_i}(b^i\varrho) = 0 \qquad (1)$$

на $\mathbb{R}^d$ и доказываем, что в случае, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини, а коэффициент сноса локально интегрируем в степени выше размерности, отношение двух вероятностных решений входит в класс Соболева, а при наличии функции Ляпунова или глобальной интегрируемости коэффициентов относительно решения вероятностное решение единственно.

Предположим, что коэффициенты удовлетворяют следующим условиям.

$(\mathbf{H_a})$ Матрица $A(x) = (a^{ij}(x))_{i,j\le d}$ симметрична и положительно определена, причем для всякого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ есть такая возрастающая непрерывная функция ω_B на $[0,+\infty)$, что $\omega(0) = 0$ и

$$\|A(x) - A(y)\| \le \omega(|x-y|), \quad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Кроме того, для каждого шара B есть такое число $\nu_B > 0$, что

$$\nu_B \cdot I \le A(x) \le \nu_B^{-1} \cdot I \quad \forall x \in B,$$

где I — единичный оператор.

$(\mathbf{H_b})$ Для всякого шара B есть такое число $p = p(B) > d$, что $|b| \in L^p(B)$.

Матричный след обозначим через tr и положим

$$Lu = \mathrm{tr}(A\nabla^2 u) + \langle b, \nabla u\rangle,$$

где $\nabla u = (\partial_{x_i}u)_{i\le d}$, $\nabla^2 u = (\partial_{x_i}\partial_{x_j}u)_{i,j\le d}$. Функция $\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ является решением уравнения (1), если

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x) L\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Решение ϱ называется вероятностным, если $\varrho \ge 0$ и интеграл от ϱ равен 1. Через $W^{p,1}(B)$ и $W^{p,2}(B)$ обозначим классы Соболева на открытом шаре B, состоящие из функций, лежащих в $L^p(B)$ вместе с обобщенными частными производными первого и второго порядка соответственно, наделенные их стандартными соболевскими нормами. Через $W_0^{p,1}(B)$ обозначим замыкание $C_0^\infty(B)$ в $W^{p,1}(B)$.

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия
[3] Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия
[4] Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
*E-mail: vibogach@mail.ru
**E-mail: starticle@mail.ru

Проблеме единственности вероятностного решения посвящены, в частности, работы [1–3]. В них предполагается, что функции a^{ij} входят в локальный класс Соболева $W^{p,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ с некоторым $p > d$. Это условие существенно используется при обосновании единственности. Благодаря ему удается применить неравенство Харнака для решений дивергентных уравнений и получить положительность непрерывной версии вероятностного решения. Доказательство единственности в цитированных работах основано на рассмотрении функции v, равной отношению двух вероятностных решений σ и ϱ, и анализе дивергентного эллиптического уравнения

$$\operatorname{div}(\varrho A\nabla v - hv) = 0, \quad h^i = b^i\varrho - \partial_{x_j}(a^{ij}\rho),$$

которому удовлетворяет v. Ключевым наблюдением является равенство

$$\int \varrho\left|\sqrt{A}\nabla v\right|^2 f''(v)\psi dx = \int \varrho f(v)L\psi dx,$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $f \in C^2([0,+\infty))$. Здесь существенно используется соболевость элементов матрицы A и соболевость функции v. Если матрица A удовлетворяет лишь условию Дини, то приведенные выше рассуждения невозможны. Кроме того, даже в одномерном случае функция ϱ может не иметь соболевской производной. Например, так будет, если $b = 0$ и $A = 1/\varrho$, причем $\varrho > 0$ гёльдерова и недифференцируема. Возникают проблемы с непрерывностью и положительностью вероятностных решений. Полученные в недавних работах [4–6] результаты о регулярности решений дважды дивергентных эллиптических уравнений позволяют работать с вероятностными решениями уравнения Колмогорова, предполагая лишь выполнение условия Дини для A. В настоящей работе мы обобщаем достаточные условия единственности из [3, гл. 4]. Более того, получен интересный новый результат о принадлежности к классу Соболева $W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ отношения двух положительных решений уравнения Колмогорова. Напомним, что сами эти решения при наших условиях могут не иметь соболевских производных. Тем самым перенормированные решения могут быть более регулярными, чем исходные решения, что уже отмечалось для отношения функций Грина в работе [7]. Существенную роль ниже играет анализ задачи Дирихле для дважды дивергентного эллиптического уравнения, исследованию которой посвящены работы [6, 8]. Нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Пусть B – открытый единичный шар в $\mathbb{R}^d$, $\overline{B}$ – его замыкание и $p = p(B) > d$ – показатель интегрируемости из условия $(\mathbf{H_b})$. Следующее утверждение известно в случае ограниченных коэффициентов и в случае нулевого сноса (см. [9, 10]), для полноты изложения приведем доказательство.

Лемма 1. *Для всякой функции $f \in L^p(B)$ в $W^{p,2}(B)\cap W_0^{p,1}(B)\cap C^1(\overline{B})$ существует решение уравнения $Lu = f$.*

Доказательство. Пусть $L_A u = \mathrm{tr}(A\nabla^2 u)$. Тогда в силу [9, лемма 9.17] для всякого $u \in W^{p,2}(B)\cap W_0^{p,1}(B)$ верна оценка

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \le C_1\|L_A u\|_{L^p(B)},$$

где C_1 не зависит от u. По теореме вложения $|\nabla u| \in L^\infty(B)$. Тогда

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \le C_1\|Lu\|_{L^p(B)} + C_1\|b\|_{L^p(B)}\|\nabla u\|_{L^\infty(B)}.$$

При этом верна оценка (см. [11, глава 5])

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B)} \le C\|u\|^{d/p}_{W^{p,2}(B)}\|\nabla u\|^{1-d/p}_{L^p(B)},$$

из которой с помощью [9, теорема 7.28] выводится неравенство

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B)} \le \varepsilon\|u\|_{W^{p,2}(B)} + C_2(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty(B)}, \quad \varepsilon > 0.$$

По принципу максимума (см. [9, теорема 9.1]) величина $\|u\|_{L^\infty(B)}$ оценивается сверху через $C_3\|Lu\|_{L^p(B)}$. Значит, для всех $u \in W^{p,2}(B)\cap W_0^{p,1}(B)$ имеем

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \le C_4\|Lu\|_{L^p(B)}.$$

В силу [9, теорема 9.15] существует единственная функция u из пространства $W^{p,2}(B)\cap W_0^{p,1}(B)$, удовлетворяющая уравнению $L_A u = f$. Теперь стандартным методом продолжения по параметру выводятся существование и единственность решения уравнения $Lu = f$. Из теоремы вложения получаем $u \in C^1(\overline{B})$.

В следующем утверждении мы доказываем единственность решения задачи Дирихле на B для дважды дивергентного уравнения

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}u) - \partial_{x_i}(b^i u) = 0, \quad u|_{\partial B} = g, \tag{2}$$

где $g \in C(\partial B)$ и под решением понимается функция $u \in C(\overline{B})$, которая на ∂B совпадает с g и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$ удовлетворяет равенству

$$\int_B uL\varphi dx = 0.$$

Отметим, что это определение решения отличается от определения в [8] и не включает в интегральное тождество граничные слагаемые.

Л е м м а 2. *Решение задачи Дирихле* (2) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в случае $g = 0$ задача Дирихле имеет лишь нулевое решение. Пусть $f \in C_0^\infty(B)$. По лемме 1 существует решение $v \in W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B)$ уравнения

$$\mathrm{tr}(A\nabla^2 v) + \langle b, \nabla v\rangle = f.$$

Положим $r_k = 1 - k^{-1}$. Рассмотрим последовательность таких функций $\zeta_k \in C_0^\infty(B)$, что $\zeta_k(x) = 1$ при $|x| < r_k$, $0 \le \zeta_k \le 1$, $|\nabla\zeta_k| \le C_1 k$ и $\|\nabla^2\zeta_k\| \le C_1 k^2$. Имеем

$$0 = \int [u\mathrm{tr}(A\nabla^2(v\zeta_k)) + u\langle b, \nabla(v\zeta_k)\rangle]dx,$$

где правая часть равна

$$\int uf\zeta_k dx + \int u[2\langle A\nabla v, \nabla\zeta_k\rangle + \\ + uv\mathrm{tr}(A\nabla^2\zeta_k) + uv\langle b, \nabla\zeta_k\rangle]dx.$$

Так как $v \in C^1(\overline{B})$ и $v = 0$ на ∂B, то $|v(x)| \le C_2 k^{-1}$ при $r_k < |x| < 1$. Заметим, что объем множества $\{x : r_k < |x| < 1\}$ оценивается через $C_3 k^{-1}$. Кроме того, $|\nabla\zeta_k(x)| = 0$ и $\nabla^2\zeta_k(x) = 0$ при $|x| < r_k$. Следовательно,

$$\left|\int 2u\langle A\nabla v, \nabla\zeta_k\rangle dx\right| \le 2C(A)C_1C_3\|\nabla v\|_{L^\infty(B)} \sup_{r_k<|x|<1}|u(x)|,$$

$$\left|\int uv\mathrm{tr}(A\nabla^2\zeta_k)dx\right| \le C(A)C_3C_2C_1 \sup_{r_k<|x|<1}|u(x)|,$$

$$\left|\int uv\langle b, \nabla\zeta\rangle dx\right| \le C_2C_1\|b\|_{L^1(B)} \sup_{r_k<|x|<1}|u(x)|.$$

Таким образом,

$$\left|\int u[2\langle A\nabla v, \nabla\zeta_k\rangle + uv\mathrm{tr}(A\nabla^2\zeta) + uv\langle b, \nabla\zeta\rangle]dx\right| \le \\ \le C_4 \sup_{r_k<|x|<1}|u(x)|,$$

где константа C_4 не зависит от k. При $k \to \infty$ получаем

$$\int ufdx = 0,$$

из которого следует, что $u = 0$.

В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть процедура приближения решения уравнения (1) последовательностью решений аналогичных уравнений, но с гладкими матрицами A. Пусть ϱ — непрерывное решение уравнения (1) на $\mathbb{R}^d$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\psi \ge 0$, $\psi(x) = 0$ при $|x| > 1$ и $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Положим $\psi_k(x) = k^d\psi(kx)$, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$A_k = (a_k^{ij}), \quad a_k^{ij} = a^{ij} * \psi_k, \quad \varrho_k = \varrho * \psi_k.$$

Обозначим через B' шар $2B$. Для всех $x, y \in B$ имеем

$$\nu_{B'} \cdot I \le A_k(x) \le \nu_{B'}^{-1} \cdot I,$$
$$\|A_k(x) - A_k(y)\| \le \omega_{B'}(\|x - y\|).$$

Кроме того, равномерно на $\overline{B}$ отображения A_k сходятся к A, а функции ϱ_k сходятся к ϱ. Поскольку уравнение

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(A_k u) - \partial_{x_i}(b^i u) = 0$$

можно переписать в виде дивергентного эллиптического уравнения, то согласно [3, следствие 1.7.6] задача Дирихле

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(A_k u) - \partial_{x_i}(b^i u) = 0, \quad u|_{\partial B} = \varrho_k$$

имеет единственное решение $u_k \in W^{p,1}(B)$, которое в силу теоремы вложения принадлежит $C(\overline{B})$.

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства [6, теорема 1.8] можно усмотреть, что

$$\max_{\overline{B}}|u_k(x)| \le M, \quad |u_k(x) - u_k(y)| \le \tilde{\omega}(|x - y|),$$

где M и $\tilde{\omega}$ зависят от d, $\nu_{B'}$, $\omega_{B'}$, $\|b\|_{L^p(B)}$, модуля непрерывности ϱ на B' и $\sup_{B'}|\varrho|$, но не зависят от k. Отметим, что аналогичные оценки для шара Q, замыкание которого лежит в B, получены в работах [4, 5].

Л е м м а 3. *Функции u_k равномерно на $\overline{B}$ сходятся к ϱ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [6, теорема 1.8] (см. замечание 1) функции u_k равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $\overline{B}$. Следовательно, есть подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$, которая сходится равномерно на $\overline{B}$ к функции $u \in C(\overline{B})$. Ясно, что $u = \varrho$ на ∂B. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Имеем

$$\int [\mathrm{tr}(A_{k_j}\nabla^2\varphi) + \langle b, \nabla\varphi\rangle]u_{k_j}dx = 0.$$

Полагая $k_j \to \infty$, получаем аналогичное равенство с A и u вместо A_k и u_k. Итак, функция u является решением задачи Дирихле (2) на B с граничным условием $u|_{\partial B} = \varrho$. Другим решением этой задачи является функция ϱ. По лемме 2 имеем $u = \varrho$. Так как предел для всякой сходящейся подпоследовательности $\{u_{k_j}\}$ равен ϱ, то вся последовательность $\{u_k\}$ сходится к ϱ.

Пусть ϱ и σ — вероятностные решения уравнения (1). Согласно [4, теорема 3.1] функции ϱ и σ непрерывны на $\mathbb{R}^d$. Кроме того, для всякого шара B есть такое число $C(B)>0$, что $\varrho(x)>C(B)$ и $\sigma(x)>C(B)$ при $x\in B$. Это следует из неравенства Харнака. Если выполнено условие $(\mathbf{H}_a)$, а b — локально ограниченное векторное поле, то нужное неравенство Харнака доказано в [4, следствие 3.6]. В готовящейся к публикации работе условие локальной ограниченности b заменено на $(\mathbf{H}_b)$.

Положим $v=\dfrac{\sigma}{\varrho}$. Пусть $f\in C^2([0,+\infty))$ и $f''\geq 0$.

Т е о р е м а 1. *Верно включение* $v\in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *причем для всякой неотрицательной функции* $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *выполнено неравенство*

$$\int\varrho\left|\sqrt{A}\nabla v\right|^2 f''(v)\psi dx\leq\int\varrho f(v)L\psi dx. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B=B(x_0,r)$ — шар, содержащий носитель функции ψ и $B'=B(x_0,r+1)$. Как отмечено выше, существует такое число $C(B)>0$, что $\sigma>C(B)$ и $\varrho>C(B)$ на B. Пусть $\{u_k\}$ и $\{w_k\}$ — построенные перед леммой 3 последовательности решений уравнения

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(A_k u)-\partial_{x_i}(b^i u)=0,$$

которые сходятся равномерно на $\overline{B}$ к ϱ и σ соответственно. Можно считать, что $u_k>C(B)/2$ и $w_k>C(B)/2$. Ясно, что функции $v_k=w_k/u_k$ равномерно сходятся к v. Согласно [3, лемма 4.1.4 и замечание 4.1.5] применительно к u_k и w_k для всякой неотрицательной функции $\psi\in C_0^\infty(B)$ выполнено равенство

$$\int u_k\left|\sqrt{A_k}\nabla v_k\right|^2 f''(v_k)\psi dx=\int u_k f(v_k)L\psi dx. \qquad (4)$$

Пусть $f(t)=t^2$. Тогда

$$2\int u_k\left|\sqrt{A_k}\nabla v_k\right|^2\psi dx\leq\int|u_k||v_k|^2|L\psi|dx.$$

Заметим, что правая часть оценивается некоторой константой $C(\psi)$, которая не зависит от k. Пусть Q — шар, причем $\overline{Q}\subset B$ и $\psi=1$ на Q. Тогда

$$\int_Q|\nabla v_k|^2dx\leq C(\psi)\nu_{B'}^{-1}C(B)^{-1}.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, слабо сходящаяся в $W^{2,1}(Q)$ к некоторой функции v. Таким образом, $v\in W^{2,1}(Q)$. Из-за равномерной сходимости вся последовательность $\{v_k\}$ сходится слабо в $W^{2,1}(Q)$ к v. Пусть теперь ψ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty(B)$. Можно считать, что Q содержит носитель ψ. Функции $f''(v_k)$ равномерно на B сходятся к $f''(v)$. Так как

$$\left|\sqrt{A_k}\nabla v_k\right|^2\geq 2\langle A_k\nabla v_k,\nabla v\rangle-\left|\sqrt{A_k}\nabla v\right|^2,$$

то

$$\int u_k\left|\sqrt{A_k}\nabla v_k\right|^2 f''(v_k)\psi dx\geq$$
$$\geq\int 2u_k\langle A_k\nabla v_k,\nabla v\rangle f''(v_k)\psi dx-$$
$$-\int u_k\left|\sqrt{A_k}\nabla v\right|^2 f''(v_k)\psi dx.$$

Используя слабую сходимость v_k в $W^{2,1}(Q)$ и равномерную сходимость A_k, u_k, v_k, $f''(v_k)$ и $f(v_k)$, с учетом (4) при $k\to\infty$ получаем (3).

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства видно, что теорема верна для произвольных положительных решений на области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, при условии, что в определяющее равенство подставляются функции ψ с носителем в Ω. Таким образом, для всяких положительных решений ϱ и σ уравнения Колмогорова на области Ω их отношение σ/ϱ лежит в $W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, хотя сами функции ϱ и σ могут не иметь соболевских производных.

Теперь, используя неравенство (3) и дословно повторяя рассуждения из [3, теорема 4.1.6], приходим к нашему основному результату.

Т е о р е м а 2. *Пусть ϱ — вероятностное решение уравнения* (1) *и выполнено одно из следующих условий*:

(i) $(1+|x|)^{-2}|a^{ij}(x)|,(1+|x|)^{-1}|b^i(x)|\in L^1(\varrho dx)$,

(ii) *найдется функция* $V\in C^2(\mathbb{R}^d)$ *с* $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=+\infty$ *и* $LV\leq C_1+C_2V$.

Тогда ϱ — единственное вероятностное решение.

Например, это верно, если коэффициенты оцениваются через $C+C|x|$.

З а м е ч а н и е 3. Условие Дини является значительно более общим по сравнению с включением $a^{ij}\in W^{p,1}_{\mathrm{loc}}$, $p>d$, поскольку последнее влечет гёльдеровость решения. Однако нам неизвестно, оптимально ли данное условие единственности. В частности, неизвестен ответ на следующий вопрос. Пусть $\nu\cdot I\leq A(x)\leq\nu^{-1}\cdot I$ для всех x, a^{ij} — непрерывные функции и $b(x)=-x$. Может ли стационарное уравнение Колмогорова с такими коэффициентами иметь несколько вероятностных решений? О неединственности см. [12].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00432, Московским центром фундаментальной и прикладной математики и Фондом Саймонса.

БЛАГОДАРНОСТИ

Второй автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит ее жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачёв В.И., Рёкнер М., Штаннат В.* // Матем. сб. 2002. Т. 197. № 7. С. 3–36.
2. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 176. № 6. P. 759–773.
3. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
4. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V.* // Annali Matem. 2017. V. 196. P. 1609–1635.
5. *Dong H., Kim S.* // Comm. Partial Differ. Equ. 2017. V. 42. P. 417–435.
6. *Dong H., Escauriaza L., Kim S.* // Math. Ann. 2018. V. 370. P. 447–489.
7. *Bauman P.* // Ark. Mat. 1984. V. 22. P. 153–173.
8. *Escauriaza L., Montaner S.* // Rend. Lincei Mat. Appl. 2017. V. 28. P. 49–63.
9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
10. *Chiarenza F., Frasca M., Longo P.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. P. 841–853.
11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
12. *Красовицкий Т.И.* // Докл. РАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 361–364.

UNIQUENESS OF A PROBABILITY SOLUTION TO THE KOLMOGOROV EQUATION WITH A DIFFUSION MATRIX SATISFYING DINI’S CONDITION

V. I. Bogachev[a,b,c,d] **and S. V. Shaposhnikov**[a,b,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[c] *St.-Tikhon’s Orthodox University, Moscow, Russian Federation*
[d] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

In this note we study the stationary Kolmogorov equation and prove that in the case where the diffusion matrix satisfies Dini’s condition and the drift coefficient is locally integrable to a power greater than the dimension the ratio of two probability solutions belongs to the Sobolev class, and in the case of existence of a Lyapunov function or the global integrability of the coefficients with respect to the solution a probability solution is unique.

Keywords: Kolmogorov equation, stationary solution, uniqueness of a probability solution