ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 95–97

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.62

ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА ВОКРУГ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА В $\mathbb{R}^3$

 Академик РАН В. И. Бердышев[1,*]

Поступило 07.10.2021 г.
После доработки 07.10.2021 г.
Принято к публикации 21.10.2021 г.

Движущийся в $\mathbb{R}^3$ объект t огибает телесное выпуклое множество по кратчайшей траектории $\mathcal{T}$ в условиях наблюдения. Задача наблюдателя f, двигающегося со скоростью объекта, – поиск наиболее близкой к $\mathcal{T}$ траектории, удовлетворяющей условию $\delta \le \|f - t\| \le K \cdot \delta$ для заданного $\delta > 0$, позволяющей следить за объектом на траектории $\mathcal{T}$. В работе предлагается способ построения траектории наблюдателя, обеспечивающий выполнение указанного неравенства с константой K, сколь угодно близкой к единице, и возможность наблюдать за объектом на траектории $\mathcal{T}$, исключая сколь угодно малую ее часть.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S2686954321060035

1. Автономный объект t и недружественный наблюдатель f движутся в пространстве $\mathbb{R}^3$, содержащем телесное замкнутое выпуклое множество G, препятствующее движению и видимости. Объект, следующий из начальной точки t_* в конечную $t^*(t_*, t^* \notin G)$, обходит множество G по кратчайшей траектории $\mathcal{T} = \mathcal{T}_t$. Предполагается, что величины скоростей V_t, V_f объекта и наблюдателя одинаковы, а расстояние между позициями взаимно видимых $t = t_\tau$ и $f = f_\tau$ в каждый момент времени τ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \delta \le \|t_\tau - f_\tau\| \le K \cdot \delta \qquad (1)$$

при заданных δ и $K \ge 1$. Левое неравенство "обеспечивает" взаимную безопасность объекта и наблюдателя, а правое продиктовано желанием улучшить качество наблюдения.

Задача наблюдателя состоит в построении траектории $\mathcal{T}_f$, при движении по которой соблюдается неравенство (1) с возможно меньшим значением константы K, а наблюдатель $f_\tau \in \mathcal{T}_f$ может видеть движущийся объект t_τ на возможно бóльшей части траектории $\mathcal{T}_t$

При отсутствии ограничения на величину $|V_f|$ вектора скорости наблюдателя задача решается просто: так, двигаясь по траектории $\mathcal{T}_f = \{f_\tau\}$, где $f_\tau = t_\tau - \delta \dfrac{V_{t_\tau}}{|V_{t_\tau}|}$, наблюдатель f_τ отслеживает движение объекта t_τ на всей траектории $\mathcal{T}_t$, при этом $\|t_\tau - f_\tau\| = \delta$ и скорость наблюдателя V_{f_τ} зависит от V_{t_τ} и кривизны траектории $\mathcal{T}_t$. Отметим, что наблюдателю нецелесообразно двигаться непосредственно по $\mathcal{T}_t$ вслед за объектом по участкам строгой выпуклости траектории $\mathcal{T}_t$ и в окрестности ее угловых точек, опасаясь потерять объект t из виду. Поскольку траектория $\mathcal{T}_t$ является кратчайшей, а траектория $\mathcal{T}_f$ при условиях $|V_t| = |V_f|$, (1) таковой не является, то существует участок траектории $\mathcal{T}_t$, который преодолевается объектом вне зоны наблюдения за t_τ.

В данной работе предлагается способ построения траектории $\mathcal{T}_f$, обеспечивающей неравенство (1) с константой K сколь угодно близкой к единице, и сколь угодно малую длину участка траектории $\mathcal{T}_t$, недоступного для наблюдения.

2. Так как t_* и t^* не содержатся в множестве G, то начальная и конечная части траектории $\mathcal{T}$ являются прямолинейным отрезками. Пусть это $[t_*, \underline{t}]$ и $[t^*, \overline{t}]$. Будем использовать обозначения:

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*

**E-mail: bvi@imm.uran.ru*

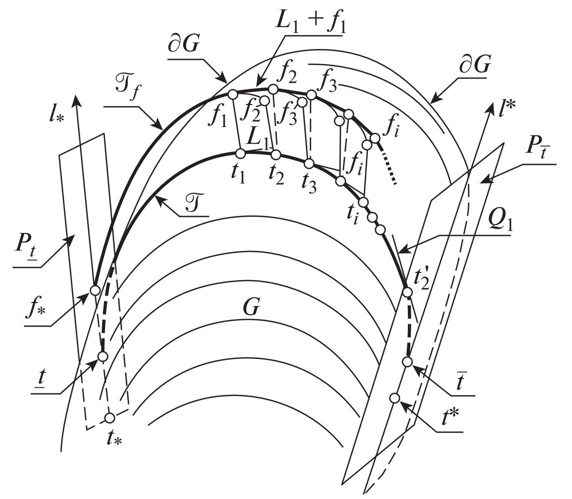

Рис. 1. Жирными линиями изображены траектории $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_f$ объекта и наблюдателя, тонкими – множество G и опорные плоскости $P_{\underline{t}}$, $P_{\overline{t}}$.

$$l_* = \{t_* + \lambda(\underline{t} - t_*)\colon \lambda \ge 0\},$$
$$l^* = \{t^* + \lambda(\overline{t} - t^*)\colon \lambda \ge 0\};$$

$P_{\underline{t}}, P_{\overline{t}}$ – плоскости, опорные к множеству G в точках $\underline{t}$, $\overline{t}$ соответственно. Отметим, что $l_* \subset P_{\underline{t}}$, $l^* \subset P_{\overline{t}}$.

3. Пусть плоскости $P_{\underline{t}}, P_{\overline{t}}$ параллельны или пересекаются, $l = P_{\underline{t}} \cap P_{\overline{t}}$ и при этом

$$\rho(t_*, l) > \rho(\underline{t}, l), \quad \rho(t^*, l) > \rho(\overline{t}, l). \tag{2}$$

Двигаясь по траектории

$$\mathcal{T}_f = \mathcal{T} + b, \quad \text{где} \quad b = \delta \frac{\underline{t} - t_*}{\|\underline{t} - t_*\|}, \tag{3}$$

наблюдатель f_τ имеет возможность видеть объект $t_\tau = (f_\tau - b) \in \mathcal{T}$, не меняя направление наблюдения b.

4. Рассмотрим случай, когда выполняются обратные к (2) неравенства (см. рис. 1). Далее $\widehat{t, t'}$ – дуга траектории $\mathcal{T}$, заключенная между точками t, t', а $\left|\widehat{t, t'}\right|$ – длина этой дуги. Определим последовательность точек $t_i \in \mathcal{T}$ и по ней последовательность точек f_i. Кусочно-линейная дуга с узлами f_i будет далее включена в состав траектории $\mathcal{T}_f$.

Поскольку траектория $\mathcal{T}$ является кратчайшей, то в каждой ее точке t существует (см., например, [1, 2]) пара касательных векторов. Через L_i обозначим касательный вектор V_{t_i} в точке t_i, являющийся вектором скорости объекта t. Дугу $\widehat{t_i, t_{i+1}}$ траектории $\mathcal{T}$ будем обозначать через Δ_i.

Точка $t_1 \in \mathcal{T}$ такова, что касательный в ней к $\mathcal{T}$ вектор ортогонален лучу l_*. Положим $f_1 = t_1 + b_1$, где $b_1 = b$ (см. (3)). В качестве начального участка траектории $\mathcal{T}_f$ возьмем дугу $(\widehat{\underline{t}, t_1}) + b_1$. Чтобы определить $t_2 \in \widehat{t_1, \overline{t}}$, найдем точку $t_2' \in \widehat{t_1, \overline{t}} \subset \mathcal{T}$ такую, что прямая Q_1, содержащая t_2' и параллельная вектору b_1, не пересекается с G°, где G° – внутренность множества G. Точка t_2 должна лежать на дуге $\widehat{t_1, t_2'}$ на малом расстоянии от t_1. Построим дугу $\widehat{f_1, f_2'} = \Delta_1 + b_1$ и на луче $L_1 + f_1$ отметим точку f_2, для которой $\|f_1 - f_2\| = |\Delta_1|$. Непрерывное взаимно-однозначное отображение отрезка $[f_1, f_2]$ на дугу $\widehat{t_1, t_2}$ дает наблюдателю $f_\tau \in [f_1, f_2]$ способ слежения за двигающимся объектом t_τ. На этом завершается первый шаг. Легко проверить, что увеличение расстояния от t_1 до t_2 влечет рост величины $\|f_2 - t_2\|$ и константы K в неравенстве (1). На втором шаге, по аналогии с первым, найдем точку $t_3' \in \mathcal{T}$ такую, что прямая Q_2, содержащая точку t_3' и параллельная вектору $b_2 = f_2 - t_2$, не пересекается с G°. Точку t_3 возьмем на дуге $\widehat{t_2, t_3'}$ на малом расстоянии от точки t_2, и т.д. Увеличивая число шагов, строим последовательности $\{t_i\} \in \mathcal{T}$, $t_i \to \overline{t}$, и $\{f_i\}$, $\rho(f_i, P_{\overline{t}}) \to 0$ $(i \to \infty)$. Траектория наблюдателя f имеет вид

$$\mathcal{T}_f = (\widehat{\underline{t}, t_1} + b_1) \cup_i [f_i, f_{i+1}]. \tag{4}$$

Построенные последовательности $t_i, f_i (i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \|t_{i+1} - f_{i+1}\| - \|t_i - f_i\| = \|t_{i+1} - f_{i+1}\| - \|t_{i+1} - f_{i+1}'\| \le \\ \le \|f_{i+1}' - f_{i+1}\| = o(\|f_{i+1}' - f_i\|) = o(\|t_i - t_{i+1}\|), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \|t_{i+1} - f_{i+1}\| \le \|t_i - f_i\| + \|f_{i+1}' - f_{i+1}\| \le \\ \le \|t_{i-1} - f_{i-1}\| + \|f_i' - f_i\| + \|f_{i+1}' - f_{i+1}\| \le \cdots \le \\ \le \delta + \sum_{2}^{i+1} \|f_k' - f_k\|, \end{gathered} \tag{6}$$

при этом последовательность $\|t_i - f_i\|$ возрастает. Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\{t_i\}_1^\infty \subset \widehat{t_1, \overline{t}}$ *– последовательность точек, построенная по указанному выше правилу,* $\widehat{t_{i+1}, \overline{t}} \subset \widehat{t_i, \overline{t}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Наблюдатель* f, *двигаясь по траектории* $\mathcal{T}_f$ (4), *имеет возможность следить за движением объекта* $t = t(f)$ *по* $\mathcal{T}$, *где* $t(f) = f - b_1$ *при* $f \in (\widehat{\underline{t}, t_1}) + b_1$, *и* $t(f^\lambda) \in \Delta_i$, $|\widehat{t_i, t(f^\lambda)}| = \lambda|\Delta_i|$ *при* $f^\lambda = (1-\lambda) f_i + \lambda f_{i+1}$ $(0 \le \lambda \le 1)$.

Число звеньев в (4) можно ограничить, проецируя точку f_j, при достаточно большом i на плоскость $P_{\overline{t}}$. Обозначим эту проекцию через $\overline{f}$. При движении по отрезку $[t_j, \overline{t}\,]$ наблюдатель не контролирует объект, преодолевающий дугу $\widehat{f_j, \overline{f}}$, но, передвигаясь по плоскости $P_{\overline{t}}$ из позиции $f_\tau = \overline{f}$, он отслеживает движение объекта по отрезку $[\overline{t}, t^*]$.

Используя неравенства (5), (6), легко установить, что имеет место

Теорема 2. *Пусть для любого номера* $n = 1, 2, \ldots$ *по указанному выше правилу построена упорядоченная сетка узлов* $\{t_i^n\}_{i=1}^{k(n)} \subset \widehat{t_1, \overline{t}}$, $t_{k(n)}^n \to \overline{t}$ *при* $k(n) \to \infty$, *для которой*

$$|\widehat{t_i^n, t_{i+1}^n}| \le \frac{|\widehat{t_1, \overline{t}}|}{n},$$

тогда для последовательности траекторий

$$\mathcal{T}_{f^n} = (\widehat{\underline{t}, t_1} + b_1) \bigcup_{i=1}^{k(n)-1} [f_i^n, f_{i+1}^n] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $f_i^n = t_i^n + b_i$, *выполняется соотношение*

$$\max_i \|t_i^n - f_i^n\| \to \delta \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 176 с.
2. *Милка А.Д.* Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях // ДАН. Т. 248. № 1. 1979. С. 34–36.

TRAJECTORY OF AN OBSERVER TRACKING THE MOTION OF AN OBJECT AROUND A CONVEX SET IN $\mathbb{R}^3$

Academician of the RAS V. I. Berdyshev[a]
[a]*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

An object t moving in $\mathbb{R}^3$ goes around a solid convex set along the shortest path $\mathcal{T}$ under observation. The task of an observer f (moving at the same speed as the object) is to find a trajectory closest to $\mathcal{T}$ that satisfies the condition $\delta \le \|f - t\| \le K \cdot \delta$ for a given $\delta > 0$. This condition makes it possible to track the object along the entire trajectory $\mathcal{T}$. The paper proposes a method for constructing the observer's trajectory that ensures fulfillment of the indicated inequality with a constant K arbitrarily close to unit. Also, the method provides the ability to observe the object on the trajectory $\mathcal{T}_t$ exepting its possible arbitrarily small part.

Keywords: navigation, autonomous vehicle, trajectory, observer