ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 501, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 519.213.7

ОБ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. И. А. Алексеев[1,*]

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 30.08.2021 г.
Поступило 31.08.2021 г.
После доработки 18.09.2021 г.
Принято к публикации 22.09.2021 г.

В работе строятся комплекснозначные случайные величины, удовлетворяющие обычному условию устойчивости, но для комплексного индекса устойчивости α, удовлетворящего условиям $|\alpha - 1| < 1$, $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| \neq \frac{1}{2}$. Находится вид характеристических функций построенных случайных величин и формулируются предельные теоремы для сумм независимых одинакого распределенных случайных величин.

Ключевые слова: устойчивые распределения, безгранично делимые распределения, предельные теоремы

DOI: 10.31857/S2686954321060023

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена построению аналогов α-устойчивых случайных величин, отвечающих комплексным значениям α, удовлетворяющих условиям $|\alpha - 1| < 1$, $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| \neq \frac{1}{2}$.

Построенные α-устойчивые случайные величины будут комплекснозначными, стандартным образом мы будем отождествлять их с двумерными случайными векторами. Данные α-устойчивые величины будут обладать обычным свойством алгебраической устойчивости по отношению к комплексному параметру α.

Напомним, что для вещественных α случайная величина ξ называется α-устойчивой, если для всех b_1, $b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что $b_1\xi_1 + b_2\xi_2 \stackrel{d}{=} b\xi + a$ (здесь и далее символом $\stackrel{d}{=}$ будем обозначать совпадение по распределению), где ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ. Если $a = 0$, то распределения называются строго устойчивым. Параметры b_1, b_2, b при этом связаны соотношением

$$b_1^\alpha + b_2^\alpha = b^\alpha.$$

Классические одномерные устойчивые распределения хорошо изучены (см. например, [3, 4, 11]).

Известно, что характеристическая функция одномерного устойчивого распределения имеет следующий вид

$$\mathbb{E}e^{ip\xi} = \exp\{ipa - C|p|^\alpha(1 - i\beta\operatorname{sgn}(p)\omega(p,\alpha))\}, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$,

$$\operatorname{sgn}(p) = \begin{cases} \frac{p}{|p|}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0 \end{cases}, \quad \omega(p,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi}\log|p|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha \neq 1$ в случае строгой устойчивости $a = 0$.

Классические α-устойчивые распределения определены только для значений $\alpha \in (0,2]$. Обобщение на другие значения α требует привлечения новых идей. В частности, А.М. Вершиком с соавторами и М.А. Лифшицем (см. [1, 6]) были построены α-устойчивые распределения для $\alpha = 0$. В работах [8, 13] были построены невероятностные аналоги α-устойчивых распределений для случаев $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Затем в работе М.В. Платоновой [7] этот метод был обобщен на случай $\alpha > 2$. При помощи построенных α-устойчивых распределений были получены вероятностные представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувиля.

[1] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: vanyalexeev@list.ru*

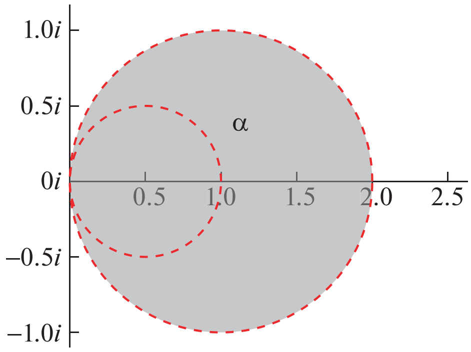

Рис. 1.

Вероятностные аналоги α-устойчивых распределений существуют только в многомерном пространстве. Так, например, в [12] устойчивыми векторами называются все случайные векторы, которые являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с матричной нормировкой и векторным центрированием. В [10] такие распределения называются операторно-устойчивыми. В [9] рассматриваются случайные поля, где каждое конечномерное распределение является операторно-устойчивым.

В настоящей работе будут построены комплекснозначные α-устойчивые случайные величины, отвечающие комплексным значениям α, удовлетворяющим условиям

$$|\alpha - 1| < 1, \quad \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| \neq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Построенные комплексные величины, интерпретируемые как двумерные векторы, с одной стороны, будут операторно-устойчивыми, но с другой стороны, не будут являться двумерными α-устойчивыми векторами ни для каких вещественных α.

Мы ограничимся построением строго устойчивых случайных величин, не строго устойчивые случайные величины получаются сдвигом на комплексную константу. Для простоты строго устойчивые случайные величины ниже будем называть просто устойчивыми.

На комплексной плоскости рассматриваемые нами значения α лежат в круге, изображенном на рис. 1.

Определим множества B_1, B_2 как

$$B_1 = \left\{\alpha \colon \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}, \quad B_2 = \{\alpha \colon |\alpha - 1| < 1\}.$$

Рассматриваемое нами множество значений комплексной величины α есть $B_2 \backslash \partial B_1$.

Пусть $\alpha \in B_2 \backslash \partial B_1$. Введем следующие параметры:

$$a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im}\alpha^{-1}; \quad \varrho = \frac{1}{a}; \quad \gamma = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Параметр ϱ будем называть параметром устойчивости, параметр γ – параметром комплексности. Для вещественных α имеем

$$\varrho = \alpha, \quad \gamma = 0. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что

$$\alpha \in B_1 \text{ тогда и только тогда, когда } \varrho \in (0,1);$$

$$\alpha \in B_2 \backslash \overline{B}_1 \text{ тогда и только тогда, когда } \varrho \in (1,2).$$

С учетом (4) случай $\alpha \in B_1$ обобщает вещественный случай $\alpha \in (0,1)$, а случай $\alpha \in B_2 \backslash \overline{B}_1$ обобщает вещественный случай $\alpha \in (1,2)$. В данной работе мы не рассматриваем обобщение распределения Коши ($\alpha \in \partial B_1$), это предмет последующих работ.

Поясним здесь основную идею построения устойчивых случайных величин, соответствующих комплексным α. Для простоты ограничимся здесь аналогами односторонних устойчивых величин для случая $\alpha \in (0,1)$.

Хорошо известно, что устойчивые величины могут быть заданы стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере (см., например, [11]). Напомним, что если Y – пуассоновское случайное поле с некоторой мерой интенсивности $\mu(dy)$ (см., например, [5]), то ему отвечает пуассоновская случайная мера, задаваемая формулой $\nu(A) = \operatorname{card}(X \cap A)$. При этом,

$$\mathbb{E}\nu(A) = \mu(A).$$

Для задания односторонних устойчивых случайных величин обычно используется пуассоновское случайное поле Y и отвечающая ему пуассоновская случайная мера $\nu_1(dy)$ на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности $\mu_1(dy) = \dfrac{dy}{y^{1+\alpha}}$. Известно, что α-устойчивая случайная величина с параметрами $C = \cos\left(\pi\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma(-\alpha)$, $a = 0$, и $\beta = 1$ задается следующим стохастическим интегралом (см., например, [11]):

$$\xi_1 = \int_0^\infty y\nu_1(dy) = \sum_{y\in Y} y. \tag{5}$$

Рассмотрим отображение $y = x^{-1/\alpha}$. По теореме об отображении (см. [5], с. 33), множество $X = \{y^{-\alpha} \colon y \in Y\}$ является пуассоновским полем с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \dfrac{1}{\alpha}dx$, где ν – отвечающая полю X пуассоновская случайная мера. Делая замену переменной, получаем

$$\int_0^\infty y\nu_1(dy) \overset{d}{=} \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx).$$

Так как устойчивые случайные величины при умножении на вещественную константу остаются устойчивыми, то одностороннюю α-устойчивую случайную величину можно задавать следующим стохастическим интегралом:

$$\xi = \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx) = \sum_{x\in X} x^{-1/\alpha}, \tag{6}$$

где X — пуассоновское поле на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$. Здесь ν — отвечающая полю X пуассоновская случайная мера.

Рассмотрим теперь комплексное число α, удовлетворяющее (2). В этом случае α-устойчивую случайную величину будем определять как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для определения устойчивой случайной величины формула (5) не подходит (мера интенсивности не может быть комплексной), поэтому вместо нее мы будем использовать формулу (6). При этом, с точностью до мультипликативной константы случайная величина, определенная (6), по распределению совпадает со следующим стохастическим интегралом:

$$\xi_1 = \int_0^\infty x e^{i\gamma \ln x}\nu(dx) = \sum_{x\in X_1} x e^{i\gamma\ln x}, \tag{7}$$

где X_1 — пуассоновское поле на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности

$$\mu(dx) = \frac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

В случае $\alpha \in B_1$ представление (7) задает комплексную случайную величину, которую будем одновременно интерпретировать и как двумерный случайный вектор. Для оставшихся α, как и в вещественном случае, α-устойчивая случайная величина будет задаваться как предел в L_2 центрированных случайных величин. Такая случайная величина является комплексным аналогом односторонней случайной величины. С использованием этих соображений ниже будут определены аналоги неодносторонних устойчивых случайных величин, как и в вещественном случае, зависящих от параметров $c_- \ge 0$, $c_+ \ge 0$, $c_- + c_+ > 0$. Распределение α-устойчивых случайных величин будет двумерным безгранично делимым, с мерой Леви, сосредоточенной на объединении двух логарифмических спиралей

$$\Gamma_+ = \{x^{1+i\gamma}\colon x > 0\} = \{x e^{i\gamma\ln x}\colon x > 0\}$$
$$\text{и} \quad \Gamma_- = -\Gamma_+.$$

Отметим, что Γ_+ — логарифмическая спираль, определяемая в полярных координатах следующим уравнением:

$$\gamma \ln r = \varphi.$$

Кривые Γ_+, Γ_- обладают свойством замкнутости относительно умножения на элементы Γ_+. Кроме того, важную роль играет следующее соотношение:

$$dS = \sqrt{1+\gamma^2}\,dx,$$

где dS — дифференциал дуги кривой. То есть, с точностью до мультипликативной константы, x является натуральным параметром.

В вещественном случае эти кривые вырождаются в положительную и отрицательную полуоси соответственно.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ α-УСТОЙЧИВОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим α, удовлетворяющие условию (2). Для $\alpha \in B_1$ дадим следующее определение.

Определение 1. Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости $\alpha \in B_1$ и параметрами $c_- \ge 0$, $c_+ \ge 0$, $c_- + c_+ > 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл

$$\xi = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma\ln|x|}\nu(dx), \tag{8}$$

по пуассоновской случайной мере ν с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(dx) = \mu(dx) = \begin{cases} \dfrac{c_- dx}{|x|^{1+\varrho}}, & x < 0; \\ \dfrac{c_+ dx}{x^{1+\varrho}}, & x > 0, \end{cases} \tag{9}$$

(параметры γ, ϱ определены в (3)).

Так как для $\alpha \in B_1$ выполнено $\varrho \in (0,1)$, то интеграл (8) сходится абсолютно с вероятностью единица.

Для $\alpha \in B_2\setminus\overline{B}_1$ (т.е. $\varrho \in (1,2)$), как и в вещественном случае, вместо пуассоновской случайной меры ν используется соответствующая центрированная мера

$$\tilde\nu = \nu - \mathbb{E}\nu.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим комплексную случайную величину

$$\xi_\varepsilon = \int_{\varepsilon<|x|<1} x e^{i\gamma\ln|x|}\tilde\nu(dx). \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть* $\varrho \in (1,2)$. *Тогда у семейства случайных величин* ξ_ε *при* $\varepsilon \to 0$ *существует предел в* $L_2(\Omega)$.

С учетом леммы 1, для случая $\alpha \in B_2\setminus\overline{B}_1$ (т.е. $\varrho \in (1,2)$) дадим следующее определение.

Определение 2. *Устойчивой случайной величиной* с комплексным индексом устойчивости $\alpha \in B_2 \backslash \overline{B}_1$ и параметрами $c_- \geq 0$, $c_+ \geq 0$, $c_- + c_- > 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как предел в $L_2(\Omega)$ следующих случайных величин:

$$\xi = (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \xi_\varepsilon + \int_{|x|>1} x e^{i\gamma \ln|x|} \tilde{\nu}(dx), \qquad (11)$$

где ξ_ε определена в (10).

Введенные комплексные случайные величины будем одновременно рассматривать как двумерные. Найдем характеристическую функцию соответствующего двумерного вектора.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in B_2 \backslash \partial B_1$. *Тогда справедлива формула*

$$\mathrm{Ln} H(p_1, p_2) = \mathrm{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} = r^{\varrho} \Phi(\varphi + \gamma \ln r), \quad (12)$$

где $(p_1, p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, Ln — *логарифм, определенный по непрерывности с условием* $\mathrm{Ln} H(0,0) = 0$, *и*

1. *Если* $\varrho \in (0,1)$, *то*

$$\Phi(\theta) = \int_{\mathbb{R} \backslash \{0\}} (e^{i\cos(\theta - \gamma \ln|y|)y} - 1) \mu(dy), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

2. *Если* $\varrho \in (1,2)$, *то*

$$\Phi(\theta) = \int_{\mathbb{R} \backslash \{0\}} (e^{i\cos(\theta - \gamma \ln|y|)y} - 1 - i\cos(\theta - \gamma \ln|y|)y) \mu(dy), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $p_1 + ip_2 = d^{1/\overline{\alpha}} e^{i\theta}$. *Тогда*

$$\mathrm{Ln} H(p_1, p_2) = d \cdot \Phi(\theta).$$

Лемма 2 показывает, что в некотором смысле логарифм характеристической функции является возведением в степень $\overline{\alpha}$, что соответствует вещественному случаю.

Следующее утверждение показывает, что построенный случайный вектор является безгранично делимым и дает выражение для его меры Леви.

Теорема 2. *Пусть комплексный параметр* $\alpha \in B_2 \backslash \partial B_1$. *Пусть* $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ — *соответствующая* α*-устойчивая случайная величина. Тогда случайный вектор* $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ *является безгранично делимым с мерой Леви, равной*

$$\nu(dy_1, dy_2) = a|\alpha| \begin{cases} \dfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}}, & y \in \Gamma_-; \\ \dfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}}, & y \in \Gamma_+, \end{cases}$$

где S_y — *длина дуги на кривых* Γ_+, Γ_-.

3. СВОЙСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Покажем, что для полученных α-устойчивых случайных величин выполнено обычное условие алгебраической устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* ξ — *комплексная* α*-устойчивая случайная величина*, ξ_1, ξ_2 — *независимые копии* ξ. *Тогда*

$$d_1 e^{i\gamma \ln d_1} \xi_1 + d_2 e^{i\gamma \ln d_2} \xi_2 \overset{d}{=} d e^{i\gamma \ln d} \xi \qquad (15)$$

тогда и только тогда, когда $d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho} = d^{\varrho}$,

где d_1, d_2, $d > 0$.

Из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть* ξ — *комплексная* α*-устойчивая случайная величина*, ξ_1, ξ_2 — *независимые копии* ξ *и пусть комплексные числа* A, B *лежат на логарифмической спирали* Γ_+. *Тогда существует* $C \in \Gamma_+$ *такое, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \overset{d}{=} C\xi,$$

причем

$$A^{\alpha} + B^{\alpha} = C^{\alpha}.$$

Посмотрим, как будет выглядеть условие устойчивости в матричных терминах.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$. Для $d > 0$ через $M_\gamma(d)$ обозначим матрицу

$$M_\gamma(d) = d \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln d) & -\sin(\gamma \ln d) \\ \sin(\gamma \ln d) & \cos(\gamma \ln d) \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_\gamma(d) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad y_1 + iy_2 = d^{1+i\gamma}(x_1 + ix_2). \qquad (17)$$

Из (17) немедленно следует, что для любых d_1, $d_2 > 0$

$$M_\gamma(d_1) M_\gamma(d_2) = M_\gamma(d_1 d_2). \qquad (18)$$

Через $\mathcal{M}_\gamma$ обозначим множество матриц 2×2

$$\mathcal{M}_\gamma = \{M_\gamma(d) \colon d > 0\}.$$

Из (18) вытекает, что отображение $d \mapsto M_\gamma(d)$ есть гомоморфизм групп. Значит $\mathcal{M}_\gamma$ – группа по умножению, изоморфная группе положительных чисел по умножению.

Отметим, что для любого $d > 0$ матрица $M_\gamma(d)$ постоянным множителем отличается от унитарной матрицы и, значит, для нее корректно определено возведение в степень (см., например, [2]). Для унитарных матриц возведение в вещественную степень означает возведение собственных чисел в данную степень. Пользуясь этим соображением, получим, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ соответствует умножению на комплексное число:

$$(d^{1+i\gamma})^\alpha = d^{\varrho(a+ib)\alpha} = d^\varrho,$$

что означает, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ есть диагональная матрица вида

$$M_\gamma^\alpha(d) = \begin{pmatrix} d^\varrho & 0 \\ 0 & d^\varrho \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Следующее утверждение также вытекает из теоремы 3.

Следствие 2. *Пусть ξ – α-устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ – независимые копии ξ и пусть матрицы M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_\gamma$. Тогда существует $M \in \mathcal{M}_\gamma$ такая, что*

$$M_1\xi^{(1)} + M_2\xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M\xi,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha.$$

Как и для вещественных случайных величин, можно выразить условие устойчивости в следующей форме.

Теорема 4. *Для любых $\alpha \in B_2 \backslash \partial B_1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi, \tag{20}$$

где ξ_k – независимые копии α-устойчивой случайной величины ξ.

Отметим, что теорема 4 не может быть верна для $\alpha \notin \overline{B}_2$. В этом случае гауссовская компонента обязана равняться нулевой матрице, а мера Леви должна иметь асимптотику в нуле вида

$$\nu(dx_1, dx_2) \sim \frac{C}{|x|^{1+\varrho}} dx_1 dx_2,$$

где $\varrho > 2$.

Так как $\varrho > 2$, то

$$\int_{0<|x|<\delta} |x|^2 \nu(dx_1, dx_2) = \infty \quad \text{для всех} \quad \delta > 0,$$

что означает, что ν не может быть мерой Леви.

4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных вещественных случайных величин. Через $\mathcal{P}$ обозначим распределение случайной величины X_1, а через $F(x)$ – соответствующую функцию распределения. Предположим, что для некоторого $\varrho \in (0,1) \cup (1,2)$ распределение случайной величины X_1 удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) $F(x) = \dfrac{c_- + o(1)}{\varrho|x|^\varrho} h(x),\ x < 0;$

(ii) $1 - F(x) = \dfrac{c_+ + o(1)}{\rho x^\varrho} h(x),\ x > 0;$

где $h(x)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т.е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \quad \text{для всех} \quad c > 0.$$

Выберем параметр $\gamma \in \mathbb{R}$. Для каждого натурального n определим случайную величину ζ_n, полагая

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} e^{-i\gamma \ln B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\gamma \ln|X_k|}, \tag{21}$$

где $B_n > 0$, $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Справедлива следующая предельная

Теорема 5. *Пусть распределение (X_k) удовлетворяет условиям* (i)–(ii). *Тогда существует такая последовательность B_n, что случайная величина ζ_n, определенная равенством* (21), *слабо сходится к ξ, где ξ – α-устойчивая случайная величина с параметрами ϱ, γ, c_-, c_+.*

Теорема 5 показывает, что двумерное распределение $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ является операторно-устойчивым. При этом, экспонента вероятностной меры (см., например, [10]) равна

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Н.В. Смородиной за внимание и поддержку в работе и рецензенту за полезные замечания и помощь в доработке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И.* Коммутативная модель представления группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. С. 70–72.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
3. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
4. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
5. *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: Издательство МЦНМО, 2007.
6. *Лифшиц М.А.* Инвариантные меры, порождаемые случайными полями с независимыми значениями // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19. С. 92–93.
7. *Платонова М.В.* Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 442. С.101–117.
8. *Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 368. С. 201–228.
9. *Kremer D., Scheffler H.-P.* Multi operator-stable random measures and fields // Stochastic Models. 2019. V. 35 (4). P. 429–468.
10. *Meerschaert M.M., Scheffler H.-P.* Limit distributions for sums of independent random vectors: heavy tails in theory and practice. N.Y.: Wiley, 2001.
11. *Sato K.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
12. *Sharpe M.* Operator-Stable probability distributions on vector groups // Transactions of the American Mathematical Society. 1969. V. 136. P. 51–65.
13. *Smorodina N.V., Faddeev M.M.* The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications // Acta applicandae mathematicae. 2010. V. 110. P. 1289–1308.

ON STABLE RANDOM VARIABLES WITH THE COMPLEX STABILITY INDEX

I. A. Alexeev[a]

[a] *St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov

In this paper, we construct complex-valued random variables that satisfy the usual stability condition, but for a complex stability index α that satisfies the conditions $|\alpha - 1| < 1$, $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| \neq \frac{1}{2}$. The form of characteristic functions of constructed random variables is found and limit theorems for sums of independent identically distributed random variables are formulated.

Keywords: stable distributions, infinity divisible distributions, limit theorems