ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 97–101

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУБРИМАНОВА СФЕРА ЭНГЕЛЯ

© 2021 г. Ю. Л. Сачков[1,*], А. Ю. Попов[1,2,*]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 18.07.2021 г.
Поступило 19.07.2021 г.
После доработки 26.07.2021 г.
Принято к публикации 02.09.2021 г.

Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Энгеля с двумерным инвариантным множеством дискретных симметрий: регулярность, аналитические свойства, принадлежность exp-log-категории, стратификация Уитни, кратность точек, характеризация в смысле анормальных траекторий, сопряженных точек и точек Максвелла, явные выражения субриманова расстояния до особых точек.

Ключевые слова: группа Энгеля, субриманова геометрия, субриманова сфера

DOI: 10.31857/S2686954321050210

Описание метрики Карно—Каратеодори и субримановых сфер является одним из центральных вопросов субримановой геометрии [1, 2]. Известно лишь несколько субримановых геометрий, в которых явно описаны сферы: группа Гейзенберга [3], плоский случай Мартине [4], осесимметричные субримановы структуры на группах SO(3) и SL(2) [6, 5], субримановы структуры на группах SE(2) [7] и SH(2) [8]. Все эти структуры заданы на 3-мерных многообразиях и все, кроме случая Мартине, являются контактными левоинвариантными структурами с вектором роста (2, 3), потому двухступенными. Первое описание трехступенной субримановой структуры — на группе Энгеля — получено в работе [9]. На основе этих результатов, в данной работе мы получаем подробное описание субримановой сферы на группе Энгеля (ее сечения двумерным инвариантным многообразием группы симметрий).

1. ГРУППА ЭНГЕЛЯ

Алгебра Энгеля — это нильпотентная 4-мерная алгебра Ли, в которой существует базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_4)$, в котором таблица умножения имеет вид

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & X_2 \arrow[d] \\ & X_3 \arrow[dl] \\ X_4 & \end{tikzcd}$$

$$[X_1, X_2] = X_3,$$
$$[X_1, X_3] = X_4,$$
$$[X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Группа Энгеля G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Ее линейное представление есть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Мы будем использовать модель $G \cong \mathbb{R}^4_{x,y,z,v}$, в которой левоинвариантный репер имеет вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v},$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial v},$$
$$X_4 = [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v},$$

[1] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская обл., Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: yusachkov@gmail.com*

как в работе [9]. Наряду с переменной v, будем использовать переменную $w = v - \frac{y^3}{6}$.

2. ПОСТАНОВКА И ОСОБЕННОСТИ СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРУППЕ ЭНГЕЛЯ

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на группе Энгеля G с ортонормированным репером X_1, X_2:

$$\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Выходящие из единицы группы субримановы кратчайшие для этой структуры суть решения задачи оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$q(0) = \mathrm{Id}, \quad q(t_1) = q_1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,dt \to \min. \tag{3}$$

Эта задача имеет ряд важных особенностей:

– это простейшая субриманова задача глубины 3 (вектор роста (2, 3, 4)),

– это простейшая левоинвариантная субриманова задача с нетривиальными анормальными геодезическими (кратчайшими),

– эта задача проецируется в субриманову задачу в плоском случае Мартине (вектор роста (2, 2, 3)),

– эта задача вкладывается в любую левоинвариантную субриманову задачу с вектором роста больше (2, 3, 4), например, в задачу на группе Картана (вектор роста (2, 3, 5)), задачи с вектором роста $(2,3,5,6)$, $(2,3,5,8)$, $(2,3,4,5)$, ...

3. РАНЕЕ ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [9], а также в более ранних статьях, цитированных в этой работе, получены следующие результаты для задачи (1)–(3):

– система вполне управляема;

– оптимальное управление существует;

– описаны анормальные траектории:

– это однопараметрические подгруппы $e^{\pm tX_2}$,

– они проецируются на плоскость (x, y) в прямые,

– поэтому они оптимальны,

– они нестрого анормальны;

– нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle\lambda, X_1\rangle^2 + \langle\lambda, X_2\rangle^2)/2$:

$$\dot{\theta} = c, \tag{4}$$

$$\dot{c} = -\alpha \sin\theta, \tag{5}$$

$$\dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin\theta X_1 + \cos\theta X_2;$$

– в фазовом цилиндре уравнения маятника (4), (5) введены координаты (φ, k), в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{|\alpha|}, \quad \dot{k} = 0;$$

– получена параметризация экспоненциального отображения эллиптическими функциями Якоби:

$$\mathrm{Exp}\colon C \times \mathbb{R}_+ \to G, \quad \mathrm{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q(t),$$
$$C = \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2);$$

– описана дискретная группа симметрий экспоненциального отображения

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i | i = 1, \ldots, 8\},$$

она порождена отражениями ε^1, ε^2 маятника в осях θ, c и отражением ε^4: $(\theta, \alpha) \mapsto (\theta + \pi, -\alpha)$;

– найдены соответствующие времена Максвелла вдоль геодезических;

– доказано, что время разреза есть первое время Максвелла, соответствующее отражениям, получено его явное выражение

$$t_{\mathrm{cut}} : C \to (0, +\infty];$$

– построен оптимальный синтез;

– описано множество разреза.

4. СУБРИМАНОВЫ РАССТОЯНИЕ И СФЕРЫ

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (метрика Карно–Каратеодори) определяется следующим образом:

$$d(q_0, q_1) = \inf\left\{\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,dt \mid \text{управление } (u_1, u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1\right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Энгеля $L_q\colon q' \mapsto qq'$,

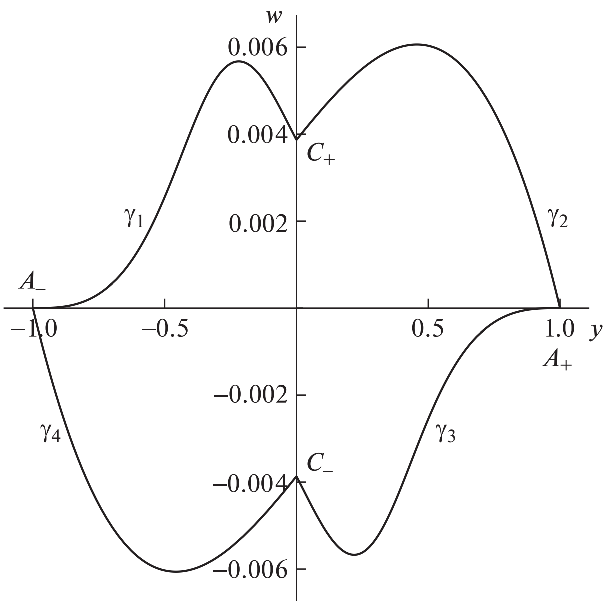

Рис. 1. Сечение сферы $\widetilde{S}$.

$$d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),$$
$$L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).$$

В силу того, что группа Энгеля есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с дилатациями:

$$\delta_\beta : (x, y, z, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 w), \quad \beta > 0,$$
$$d(\mathrm{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\mathrm{Id}, q),$$
$$\delta_\beta(S_R(\mathrm{Id})) = S_{\beta R}(\mathrm{Id}).$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\mathrm{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \mathrm{Id}) = 1\}.$$

Ранее получена параметризация единичной сферы S экспоненциальным отображением:

$$S = \{\mathrm{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C, t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \geq 1\}.$$

Субриманова структура и сфера имеют дискретные симметрии:

$$\varepsilon^i(S) = S, \quad i = 1, \ldots, 8.$$

Основной объект этой работы — сечение сферы двумерным инвариантным многообразием основных симметрий ε^1, ε^2:

$$\widetilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{x = z = 0\}.$$

Обозначим подмножества, на которые распадается сечение $\widetilde{S}$, см. рис. 1:

$$A_\pm = \widetilde{S} \cap \{w = 0, \operatorname{sgn} y = \pm 1\},$$
$$C_\pm = \widetilde{S} \cap \{y = 0, \operatorname{sgn} w = \pm 1\},$$
$$\gamma_1 = \widetilde{S} \cap \{y < 0, w > 0\},$$
$$\gamma_2 = \widetilde{S} \cap \{y > 0, w > 0\},$$
$$\gamma_3 = \widetilde{S} \cap \{y > 0, w < 0\},$$
$$\gamma_4 = \widetilde{S} \cap \{y < 0, w < 0\},$$
$$\widetilde{S} = A_+ \sqcup A_- \sqcup C_+ \sqcup C_- \sqcup (\sqcup_{i=1}^4 \gamma_i). \quad (6)$$

Имеются следующие симметрии между этими подмножествами:

$$\varepsilon^4(\gamma_i) = \gamma_{i+2}, \quad i = 1, 2,$$
$$\varepsilon^4(A_+) = A_-, \quad \varepsilon^4(C_+) = C_-.$$

5. КРАТНОСТЬ ТОЧЕК СЕЧЕНИЯ $\widetilde{S}$

Кратностью точки $q \in G$ называется величина

$$\mu(q) = \mathrm{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}.$$

Теорема 1. (1) $\mu(A_\pm) = 1$.

(2) $\mu(C_\pm) = \mathfrak{c}$ (*континуум* $\cong S^1$).

(3) $q \in \gamma_i \Rightarrow \mu(q) = 2$.

6. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОЧЕК СЕЧЕНИЯ $\widetilde{S}$

Теорема 2. (1) $A_\pm$ *суть точки на анормальных кратчайших*.

(2) $C_\pm$ *суть сопряженные точки*, *точки Максвелла*, *точки разреза*, *центральные элементы группы Энгеля*.

(3) $q \in \gamma_i$ *суть точки Максвелла*, *точки разреза*.

7. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СУБРИМАНОВА РАССТОЯНИЯ ДО НЕКОТОРЫХ ТОЧЕК ГРУППЫ ЭНГЕЛЯ

Теорема 3. (1) *Если* $q(t) = e^{\pm t X_2}$, $x = z = w = 0$, $y = \pm t$ *есть точка анормальной кратчайшей*, *то*

$$d(\mathrm{Id}, q(t)) = t.$$

(2) *Если* $q(t) = e^{\pm t X_4}$, $x = y = z = 0$, $w = \pm t$ *есть центральный элемент группы*, *то*

$$d(\mathrm{Id}, q(t)) = C\sqrt[3]{t},$$
$$C = \sqrt[3]{48 K^2(k_0)} \approx 6.37,$$
$$K(k_0) - 2E(k_0) = 0, \quad k_0 \approx 0.91.$$

8. РЕГУЛЯРНОСТЬ СЕЧЕНИЯ $\widetilde{S}$

Теорема 4. (1) *Кривые* γ_i *аналитичны и регулярны*.

(2) $A_\pm$, $C_\pm$ *суть особые точки*, *в них* $\widetilde{S}$ *негладкая*, *но липшицева*.

(3) $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_+, A_+\}$ *гладкая класса* C^∞.

(4) $\gamma_1 \cup \{C_+\}$ *гладкая класса* C^∞.

(5) $\gamma_1 \cup \{A_-\}$ *гладкая класса* C^1.

9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $\widetilde{S}$

Множество называется аналитическим, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется полуаналитическим, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется субаналитическим, если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Несубаналитичность субримановых сфер тесно связана с наличием анормальных кратчайших. А.А. Аграчев [11] доказал субаналитичность сфер для субримановых структур без анормальных кратчайших и для многих структур без строго анормальных кратчайших. Позже А.А. Аграчев и А.В. Сарычев [12] показали, что для 2-порождающих субримановых структур (для которых нет анормальных кратчайших) сферы субаналитичны. Известно также, что для плоской субримановой структуры в случае Мартине [4] и для некоторых ее возмущений [13] имеются анормальные кратчайшие, а сферы несубаналитичны.

Т е о р е м а 5. (1) *Множество* $\widetilde{S}\backslash\{A_+, A_-\}$ *полуаналитично, потому субаналитично.*

(2) *В окрестности точки* A_- *кривая* γ_1 *есть график неаналитической функции*

$$w = \frac{1}{6}Y^3 - 4Y^3\exp\left(-\frac{2}{Y}\right)(1 + o(1)),$$
$$Y = \frac{y+1}{2} \to 0.$$

(3) *Поэтому множество* $\widetilde{S}$ *неполуаналитично, что эквивалентно несубаналитичности так как* $\widetilde{S} \subset \mathbb{R}^2$.

(4) *Следовательно, сфера* S *несубаналитична.*

10. Exp-log-КАТЕГОРИЯ

Функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит exp-log-категории, если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадлежит exp-log-категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого — функции из exp-log-категории.

Т е о р е м а 6. *В окрестности точки* A_- *кривая* γ_1 *есть график функции из* exp-log-*категории*:

$$w = F\left(Y, \frac{e^{-1/Y}}{Y}\right), \quad Y = \frac{y+1}{2} \to 0,$$

где $F(\xi, \eta)$ *есть аналитическая функция в окрестности точки* $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Поэтому множество $\widetilde{S}$ *принадлежит* exp-log-*категории.*

11. СТРАТИФИКАЦИЯ УИТНИ

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к стратификации Уитни [10]:

если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни (С. Лоясевич, Х. Хиронака),

если множество принадлежит exp-log-категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни (Ta Lê Loi).

Т е о р е м а 7. *Разбиение* (6) *есть стратификация Уитни.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 1–9, 11 написаны Ю.Л. Сачковым, раздел 10 – А.Ю. Поповым. Исследование Ю.Л. Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montgomery R.* A tour of subriemannnian geometries, their geodesics and applications. Amer. Math. Soc., 2002.
2. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
3. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 5–85.
4. *Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I.* Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case // J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 1997. V. 2. P. 377–448.
5. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внут-

ренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. матем. журнал. 2001. Т. 42. № 4. С. 731–748.

6. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
7. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. P. 293–321.
8. *Butt Y.A., Sachkov Yu.L., Bhatti A.I.* Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2) // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. V. 23. P. 155–195.
9. *Ardentov A.A., Sachkov Yu. L.* Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. December. V. 22. Issue 8. P. 909–936.
10. *Горески М., Макферсон Р.* Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.
11. *Agrachev A.* Compactness for sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity // Rend. Semin. Mat. Torino. 1998. V. 56. P. 1–12.
12. *Agrachev A., Sarychev A.* Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity // ESAIM: COCV. 1999. V. 4. P. 377–403.
13. *Bonnard B., Trélat E.*, On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannian geometry // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6[e] serie. 2001. V. 10. № 3. P. 405–491.

SUB-RIEMANNIAN ENGEL SPHERE

Yu. L. Sachkov[a] and A. Yu. Popov[a,b]

[a] *Ailamazyan Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, Russian Federation*

[b] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

The structure of interesection of the sub-Riemannian sphere on the Engel group with a two-dimensional set of discrete symmetries is described: regularity, analytic properties, exp-log category, Whitney stratification, multiplicity of points, charecterization in terms of abnormal trajectories, conjugate points and Maxwell points, explicit expressions of sub-Riemannian distance to singular points.

Keywords: sub-Riemannian geometry, sub-Riemannian sphere, Engel group